

MATEMATIKA

Vyučování matematice a realita školy

FRANTIŠEK KUŘINA

Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové

1. Tři příběhy

Ve svém rodinném archivu mám vysvědčení z r. 1881, na němž lze doložit, že jistý pan učitel Obecné školy Blsecké – Karel Fritz předběhl ve dvou směrech svou dobu. Ačkoliv je na přední straně vysvědčení stupnice známek:

V návštěvě školní: velmi pilně, pilně, méně pilně, nedbale.

V chování mravním: úplně přiměřeně, přiměřeně, méně přiměřeně.

V prospěchu: velmi dobře, dobře, prostředně, nedostatečně.

V pilnosti: tuze velice, velice, dostatečně, nedostatečně,

je jakási Marie Kuřinová hodnocena

v návštěvě školní zcela náležitě,

v mravním chování zcela náležitě,

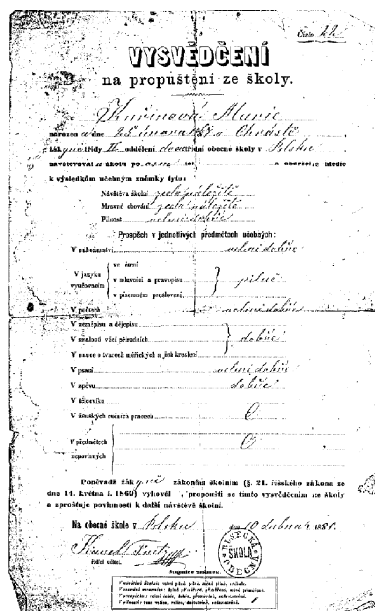
v pilnosti velmi dobře,

v prospěchu pak, např.

v jazyku vyučovacím pilně

a předměty zeměpis, dějepis, znalost věcí přírodních a nauku o tvarech měřických a jich kreslení zintegroval pan učitel do předmětu jediného (termín „člověk a příroda“ ho zřejmě nenapadl)

s prospěchem dobře (obr. 1).



Obr. 1

Těžko můžeme dnes rozhodnout, jak si asi můj pradědeček vyložil „slovní“ hodnocení své dcery Marie. Řekl si, že je v češtině lepší než „velmi dobrá“, nebo horší než „nedostatečná“ a pan učitel hodnotil aspoň její snahu termínem „pilně“?

Slovní hodnocení má bezesporu tu „výhodu“, že si je můžeme vyložit takřka libovolně, zejména pak, že neumožňuje prakticky žádné srovnání.

Z druhé strany je ovšem pravda, že je obtížné zařadit žáka „do příslušné třídy ekvivalence“ charakterizované jedinou známkou. Výstižněji můžeme žáky hodnotit vhodným slovním vyjádřením. Napsat kvalitní slovní hodnocení je ovšem v mnoha směrech náročné a je zde vážné nebezpečí, aby nebylo v praxi prováděno formálně.

Proč asi pan učitel Fritz takto svérázně přistupoval k hodnocení svých žáků? Myslím, že mu nemůžeme přisoudit nějakou vědomou snahu o matení rodičů; podle mého názoru hodnotil tak, jak byl zvyklý – snad z doby svých studií nebo podle praxe učitele, který ho uváděl do učitelského působení. Snad lze z jeho konání usoudit na určitou setrvačnost. Tato vlastnost nemusí mít charakter jen negativní. Učitelé, kteří jsou zvyklí vést žáky k práci, je povedou k práci i tehdy, když na to některá z překotných reforem školy zapomene.

Příběh druhý je ze současnosti. Na všechny vysoké školy, i na učitelské vzdělávání, přichází dnes řada studentů se středoškolskou přípravou různého zaměření. Snad není na škodu, chce-li se stát učitelem matematiky na základní škole např. absolvent strojnické průmyslovky, co však s následující skutečností? Budoucí učitelka matematiky pro základní školu hodnotí svá středoškolská studia písemně takto: „Na ekonomickém lyceu jsem získala znalosti, které student gymnázia nemá. Na této škole jsem nejen úspěšně složila maturitní zkoušku, ale také státnici z obchodní korespondence. Od univerzity očekávám, že mě připraví na povolání pedagoga. Chtěla bych dokázat, aby drogy a alkohol zmizeli ze škol.“ Důležitější než druh školy je její úroveň. Je však třeba si uvědomit, že střední školy s malou dotací matematiky nemohou na dostatečné úrovni pěstovat ty technické kompetence, které jsou pro studium matematiky nezbytné, a které se stěží daří rozvíjet při univerzitním studiu. Zde mám na mysli např. čtení textu s porozuměním (čtenářská gramotnost) a práce s matematickou symbolikou (úprava algebraických výrazů, ...). Důležité ovšem je, aby student (již na základní a střední škole, ale i na univerzitě) chápal smysl a význam pojetí matematiky, kterou studuje. Že máme v tomto smyslu značné nedostatky, budu ilustrovat slovy jedné své studentky druhého semestru:

„Na začátku studií jsem měla takovou (naivní) představu, že se budu učit to, co děti na 2. stupni ZŠ a zdokonalovat se např. v Pythagorově větě a rovnicích o 2 neznámých. Z omylu mě vyvedla 1. přednáška z algebry a nyní už žádná takhle podobně hloupá očekávání nemám. Můžu jen doufat, že se prokoušu analýzou (a vlastně kdo ví, co hrůznějšího mě ještě čeká) a pak se s pubertáky na nějaké vesnické základce budu plácát nad poloměry kružnic. Hodlám vynaložit, co je ve mně (přece to nevzdám), ale nehodlám se úplně zničit.“ Žádná výuka matematiky – ani na škole základní, ani na univerzitě, by se neměla odehrávat v prostředí nedorozumění. Měli bychom se snažit vytvářet klima spolupráce a vzájemné důvěry, aspoň s těmi studenty, kteří to myslí se svým vzděláváním upřímně.

I třetí příběh je současný: odehrává se na jaře 2006. Jde v něm o jednu scénu školské politiky inspirované *Bílou knihou* [1], totiž o návrh ministerstva školství zvýšit radikálně počet studentů na gymnáziích. Jako celá současná reforma se má i tento v zásadě správný krok uskutečnit „plošně“, bez ohledu na podmínky a možnosti realizace, zato však s nevkusnými nárázkami na pohodlné učitele, očekávané úplaty za přijetí na gymnázium a příjmy učitelů za přípravu na zkoušky, jak o tom píše sama ministryně školství v článku [2]. Vzpomínám si, že názor „mít aspoň maturitu“ pramáňoval již v r. 1937 Jaroslav Žák ve svém „vědeckém“ pojednání *Študáci a kantoři* [3] (obr. 2).



Obr. 2

Do boje za masová gymnázia vytáhl i Ondřej Hausenblas. V článku *Školy nejen pro vyvolené* např. píše: „*Když jdou (žáci) v patnácti do učení, jejich příprava k tomu, aby se jednou stali moudrými dospělými, se vlastně uzavírá*“ ([4], s. 2). Jak jinak vidí „*cestu k moudrosti*“ např. T. G. Masaryk v práci [5], s. 95: „*... příliš se díváme na řemeslo a všechnu tzv. práci fyzickou jako na nižší v porovnání s prací duchovní. To je zastaralý aristokratismus, nepochopení toho, co práce fyzická je. Řemeslo a všechna práce praktická je metodicky nadměru důležitá a namnoze cennější než práce duchovní. – Při každém řemesle, při každé praktické práci naučí se člověk metodicky ... spořádaně myslet jako v logice, ne-li více. Druhá přednost je účelnost praktické práce fyzické. Při práci duchovní často nikdo neví, k čemu dojde a komu to prospěje, tu však je účel určitý.*“

Je trapnou iluzí, že studium na gymnáziu vede automaticky k moudrosti. Dobře organizované vzdělávání vede k rozvíjení duševních schopností studenta, formální vzdělávání, zvláště studentů s nižšími studijními předpoklady, vede k biflování, nikoliv však k rozvíjení tvořivých kompetencí, nevede k moudrosti.

Podle mého názoru je jediná rozumná cesta: zvyšovat kvalitu gymnaziálního vzdělávání a vytvářet podmínky i pro jeho kvantitativní rozvoj. 15 000 Kč za každé nově vytvořené místo na gymnáziu nebo lyceu ([6], s. 5) – to se mi nejeví jako koncepčně vedená školská politika. Nechápu, jak může sociolog Petr Matějů napsat: „*Opravdu toužíme po elitně vzdělané menšině za cenu, že 60 až 70 procent lidí bude bez vzdělání jako za první republiky? Jsem přesvědčen, že elitně vzdělaná menšina ohrožuje národ.*“ (Jak asi? Otázka F. K.). „*A navíc, u nás to se vzděláním učitelů asi nebude moc slavné, když mohou být tak nezodpovědní, že pro vlastní pohodlí a pocit nadřazenosti nechtějí dopřát vzdělání co nejvíce žákům. To je profesní selhání*“ ([7], s. 5). Proti těmto názorům uvádím myšlenku Jarmily Skalkové, s níž plně souhlasím: „*... každá škola má šanci rozvíjet úsilí, aby alespoň v některé oblasti činnosti dosahovali její žáci elitní úrovně a aby byla dobrou školou*“ ([14], s. 120).

2. Škola a práce

Snad jsem poněkud nemoderní, ale podle mého názoru bychom měli učit žáky ve škole pracovat. A to ne pracovat pilníkem nebo krumpáčem, ale pracovat duševně. Je to v souladu s idejemi Komenského, s názory T. G. Masaryka a řady dalších.

Připomeňme např. z *Didaktiky analytické* [8] zásady

XXXIV: *Žáku přísluší práce, učiteli řízení,*

CXXXVI: *V každém umění nechť je praxe důležitější než theorie ... Způsobu práce porozumíš z předvedení i jediné dobré ukázky a pozorného pochopení, avšak způsobilost k práci mohou přinést pouze četná cvičení.*

Komenského myšlenka „Člověka dělá člověkem jeho myšlení, řeč a práce“ se odráží v prvních dvou aspektech v klíčových kompetencích naší současné reformy, práce se však v těchto materiálech chápe převážně ve smyslu manuálním (Pracovní činnosti a spolupráce, [9], s. 32). Současná reforma Masarykovu ideu „Vždy bude hlavní věcí ve škole naučit pracovat“ ([5], s. 101) podle mého názoru nerespektuje. Je to v souladu s nerealistickou představou školy jako pouhé „příležitosti k rozvinutí všech schopností všech členů společnosti“ ([1], s. 16); Masaryk pojímá školu realističtěji: „Od samého počátku má učitel příležitost vidět v dětech všechny vady, které mají lidé dorostlí. Vidí, jak dítě klame a šidí, jak markýruje učení, jak lichotí učitelovi, krátce všechny vlastnosti mravní přicházejí při vyučování k platnosti – právě proto, že učení je práce, obtíž, tedy něco nemilého. To musí být překonáno a ve způsobu, jak se to překonává, záleží vychování“ ([5], s. 101). V podobném duchu píše náš publicista Václav Jamek: „Škola není místo, kde by dítě mělo získat co nejvíce vědomostí a přitom se pokud možno vůbec nenamáhat. Koncept „školy hrou“ spíše žádá, aby škola využívala spontánní objevování schopnosti dítěte, a tak je k námaze motivovala, ne však, aby je veškeré námahy ušetřila. Škola bez námahy a píce není žádoucí; především ve škole si dítě může vštípit základní kulturu úsilí, která je v naší civilizaci potřebná. Požadovat výkon – a to výkon smysluplný – je jednou ze základních funkcí školy“ ([10], s. 184). Jeden z našich reformních pedagogů z doby první republiky Stanislav Vrána zdůrazňuje: „Je třeba, aby žák měl program studia, a to co do látky i času, a aby jej pokud jen lze přesně dodržel. Nechť se žák snaží pracovat uvědoměle“ ([11], s. 60). Pro současnou naši reformu jsou osnovy čímsi druhořadým, jejich tvorbu přenechává školám. Je to pochopitelné, protože učit žáky pracovat si neklade za svůj cíl. Ondřej Hausenblas dokonce píše v článku *Proč a jak chodit do školy?* „Musíme vytvořit zákonné prostředí, v němž se nepodaří nadané učitele těm ostatním uklovat. Stačí k tomu poměrně málo. Musíme vzít školám nástroj ke klování, a tím jsou striktně vymezené osnovy, závazné plány učiva, monopolní učebnice“ ([12], s. 53). Souhlasím s tím, že osnovy i plány učiva by měly být vymezeny volně, monopolní učebnice pak už dávno nemáme. Osnovy však nejsou „nástrojem klování“, ale nástrojem

pořádku, účelnosti a smyslu školní práce. Převzít odpovědnost za tento důležitý úkol by pedagogická věda a státní orgány samozřejmě měly.

Příležitostí učit pracovat v matematice je přirozeně dost. Každému žákovi základní školy a studentu střední školy bychom měli představit matematiku jako nástroj porozumění světu a základní metody práce s tímto nástrojem by měl každý vzdělaný člověk zvládnout. Zdůrazňuji termín základní metody v souvislosti s každým žákem; vše ostatní nechť je v oblasti příležitostí pro ty, kteří mají zájem a předpoklady. Učit lze především zkušenostmi, na základě činností, na základě práce. Americký učitel *John Holt* to vysvětluje velmi výstižně: „*My učitelé – možná všechny lidské bytosti – jsme v zajetí pozoruhodné iluze. Myslíme si, že můžeme vzít obrázek, konstrukci, fungující představu čehosi vybudovanou v naší hlavě na základě dlouhé zkušenosti a znalosti a přeměnou této představy do posloupnosti slov ji přenést celou do hlavy někoho jiného. Snad v jednom případě z tisíce, je-li vysvětlení mimořádně dobré a posluchač mimořádně zkušený a dovedný v přeměně posloupnosti slov do skutečnosti slovy nepopsané a sdílejí-li vysvětlující a posluchač mnoho zkušeností, o kterých se hovoří, může tento způsob fungovat a nějaký skutečný smysl může být sdělen. Ve většině případů ale vysvětlování nezlepšuje pochopení a může je dokonce zhoršovat.*“ ([13], 159).

3. Škola a společnost

Bílá kniha [1] vychází z velkolepé konstrukce pedagogické reality v našem státě. Všimněme si několika myšlenek z ní citovaných.

Společnost trvá a rozvíjí se v cyklu rodinné, společenské a občanské reprodukce, která probíhá ve třech základních fázích:

- *fáze přijetí či zakořenění, kdy se z dítěte péčí, ochranou a pomocí druhých stává dospělá osoba, schopná převzít svůj další život do vlastních rukou,*
- *fáze uplatnění a prosazení, kdy mladý člověk vstupuje do samostatného života, přijímá různé profesní, společenské a občanské role a s nimi i vlastní tvůrčí podíl na životě společnosti a osudu naší planety,*
- *fáze předávání, kdy se dospělý člověk sám ujímá péče o novou generaci a o předávání převzaté kultury svého národa a společnosti.* ([1], s. 13).

„Úroveň vzdělání, kvalita i výkonnost vzdělávacího systému a především

míra toho, jak společnost dokáže využít tvůrčího potenciálu všech svých členů, se staly rozhodujícím činitelem dalšího vývoje společnosti i ekonomiky“ ([1], s. 15).

„Poskytnout příležitost k rozvinutí všech schopností každému členu společnosti se stalo základním požadavkem společenským, etickým i politickým, a to v celé sféře politického spektra“ ([1], s. 16).

Kéž by nedocházelo k destrukci této vize!

Kéž by neplatilo pro naše poměry to, co popisuje významný francouzský filosof *Alain Finkielkraut* již v r. 1987:

„Úkolem školy je utvářet ducha, žáci proti ní stavějí přelétavou pozornost mladého televizního diváka; škola se podle *Condorceta* snaží „setřít hranici mezi nevzdělanou a vzdělanou částí lidského rodu“, žáci vykládají tento emancipační záměr jako zastaralý program donucování a v témže odmítání autority, disciplíny i tradice směšují mistra, jenž učí, s mistrem, jenž vládne.

Jak vyřešit tento rozpor? „Tím, že budeme modernizovat školu,“ tvrdí v zásadě obhájci školy stejně jako reformátoři. Jedni hledají způsob, jak přiblížit výchovu spotřebě, a – v některých amerických školách – jdou dokonce tak daleko, že balí gramatiku, historii, matematiku a všechny základní předměty do rockové hudby, kterou žáci poslouchají s walkmanem na uších. Ti druzí doporučují opatrněji hromadné zavedení počítačů do učeben, aby studenty vážně adaptovali na techniku, aniž by je nutili opustit hravý svět dětství. Od elektrického vláčku k informatice, od zábavy k poznání má tato cesta probíhat pozvolna, a je-li to možné, dokonce aniž by si to její účastníci uvědomovali. Málo záleží na tom, že inteligence žáka rozvíjená hrou se strojem zůstane v úrovni manipulace a nepozvedne se na úroveň myšlení ...“ ([15], s. 93).

„Se všeobecnou školní docházkou přestalo být dospívání buržoazní výsadou a stalo se všeobecnou součástí života. A také způsobem života: chránění před rodičovským vlivem školskou institucí a před vlivem učitelů „skupinou vrstevníků“, mohli si mladí lidé vybudovat svět pro sebe, obrácené zrcadlo hodnot, jež je obklopují. Džínové uvolnění proti konvenčnímu oblékání, obrázkové seriály proti literatuře, rocková hudba proti slovnímu vyjádření ... vítězství blboucké pošetilosti nad myšlením.“ ([15], 96).

Při dobře připravené reformě vzdělávání bychom měli vycházet z dosti hlubokého studia společnosti. Takovou studii našich poměrů neznám. Ve Spojených státech se o ni pokusil sociolog *Paul Ray*, který rozdělil obyva-

telstvo podle základních postojů, hodnot a chování do tří velkých skupin. 29 % americké populace jsou podle něho tradicionalisté, konzervativní lidé s tradičními náboženskými hodnotami, 47 % obyvatel tvoří modernisté, kteří oceňují osobní úspěch, technologický pokrok a klasickou spotřební společnost. 24 % Američanů jsou „*kulturní tvořivci*“, kteří vyznávají hodnoty typické pro společnost založenou na znalostech (citováno podle knihy [16], s. 150). Kdybychom předpokládali, že tyto „třídy“ společnosti budou mít odraz i v mladé generaci, dostali bychom dosti dobrou směrnicí pro vzdělávání: tvořivá vrstva mládeže uvítá konstruktivní přístupy, modernisté budou vyžadovat instrukci jak dosáhnout úspěchu a konzervativní část společnosti patrně o žádné hlubší vzdělání neprojeví zájem.

Zdá se, že problémy vzdělávání se stávají problémy globálními, jak o tom svědčí názory dvou významných českých osobností z odlehklých oblastí kultury.

Spisovatel *Ludvík Kundera* napsal:

„... je možno představit si budoucnost bez třídního boje nebo bez psychoanalýzy, nikoli však bez nezadržitelného vzestupu přejatých myšlenek, které vepsány do computerů, programovány masovými médii, mohou se stát brzy silou, která rozdrťí veškeré originální a individuální myšlení, a udusí tak samu podstatu evropské kultury Novověku“ ([17], s. 48).

Když jsem si přečetl tuto myšlenku, musel jsem si položit otázku: Nemá na tomto neblahém vývoji silný podíl i škola svým dlouholetým způsobem předávání informací, tedy transmisivním způsobem výkladu a praktickou absencí jejich kritického posuzování?

Biolog a filosof *Stanislav Komárek* publikoval nedávno názor ještě vyhraněnější: *„... nemáme-li „projít“ budoucnost a stát se jen folkloristicky malebným přívěskem Čínou dominovaného světa, je třeba se i v péči o vzdělání rychle vzpamatovat. Jinak se může stát, že se sjednocení Evropy mine svým nejelastnějším účinkem a bude vyhánět hlavně administrativní květy dosud nevídaných tvarů a barev a stane se rejdištěm malicherného dirigismu nikdy nepoznaného rozsahu, jehož chabým prorokem byl náš pražský rodák Franz K. ([18]).“*

Problematika je o to vážnější, že krize vzdělávání je celosvětová. Např. sociolog *Zygmunt Bauman* považuje „*pragmatické prohlášení Magny Charty evropských univerzit, nedávno podepsané v Bologni, podle níž univerzity jsou „autonomní instituce ve středu společnosti,“ pouze sladkou nostalgii v době, kdy se rychle ztrácí jejich původní postavení“ ([19], s. 154).* Nekritické přijímání reformy učitelského studia u nás se z tohoto hlediska jeví

v novém světle. Absolvent tříletého bakalářského studia, který podle mého názoru nebude mít kvalifikaci na nic, má mít podle Bílé knihy ([1], s. 71), „kvalifikaci vhodnou pro otevřený evropský trh práce“.

4. Škola a matematika

Dag Hrubý vidí zcela správně souvislosti: *„Úroveň výuky matematiky je dána především úrovní učitele. Odborná erudice je podmínkou nutnou, nikoliv postačující. Samozřejmostí je jistá znalost historie matematiky, která je nedílnou součástí historie evropského myšlení. Nejdůležitější však je, aby vám výuka přinášela radost. Tato radost se bude pak přenášet na vaše žáky. Autoritu, renomé u žáků, kolegů, rodičů a veřejnosti vám nezajistí diplom, tituly, ředitel, krajský úřad, ministerstvo. Tu si musíte vybojovat sami“* ([20], s. 40).

V této části článku bych se rád spolu s vámi zamyslel nad některými otázkami matematického vzdělávání, jak je vidím na konci své pedagogické dráhy. Půjde tedy o jakýsi shrnující pohled, pohled nutně subjektivní a nemohu tvrdit, že správný. Povede-li vás k zamyšlení nad vaší vlastní prací, bude účel mého článku splněn. Omlouvám se, že mnohé otázky nemohu hodnotit z hlediska praxe ve třídě, omlouvám se i za to, že jsem některé myšlenky publikoval někde již dříve.

Často si připomínám myšlenku významného francouzského matematika *René Thoma*, tvůrce teorie katastrof: pro vyučování matematice je důležitá filozofie matematiky. Anž bych zde chtěl připomínat nějaké definice matematiky, chci zdůraznit, že na náš předmět se můžeme dívat z řady různých aspektů. Jinak bude k matematice přistupovat učitel, který vidí v matematice soubor hotových, krásných, abstraktních matematických struktur, jinak ten učitel, který hledá cesty k těmto strukturám. Nejde jen o historické poznámky, jde o to, že matematika nezačíná definicemi, ale otázkami a problémy. Touto skutečností by mělo být ovlivněno jakékoliv vyučování matematice. Jinak bude přistupovat k výuce ten učitel, který matematiku chápe jako „ideální techniku“ či jako „metodu předpovídání pomocí formálních kalkulu“. Technika musí spolehlivě fungovat, otázka proč funguje je vlastně otázka druhotná. Jiné aspekty matematického vzdělávání bude zdůrazňovat zastánce matematiky jako systému formálních dedukcí, jiné ten, který v matematice vidí řešení problémů. Důležité je najít v praxi míru. „Tyranie důkazů“ do školské matematiky nepatří, brát všechno bez argumentace také ne. Matematika jako soubor úloh bez proniknutí do ma-

tematického „pozadí“ jejich řešení by samozřejmě nebylo rovněž správné, nebylo by ale správné ani předvádět honosnou stavbu disciplíny, jejíž smysl by všem žákům unikal. Který z těchto aspektů je správný? Žádný sám o sobě a všechny v rozumném vztahu. Podle mého názoru si dobrý učitel matematiky má klást podobné otázky vždycky, když přistupuje k základní otázce: Jak zprostředkovat určité téma určité třídě. Přirozeně by bylo vhodné, aby viděl ve třídě různá individua, různé zájmy, různé úrovně nadání atp.

Jsem přesvědčen, že za mnohé problémy s přijímáním matematiky veřejností jsme odpovědní sami. V praxi se můžeme setkat s výukou matematiky, která nerozvíjí myšlení, která nekultivuje žádné kompetence užitečné pro život, s výukou matematiky, která nedbá na porozumění, která je formální, s výukou matematiky, která matematice škodí. I v matematice se někdy nahrazuje porozumění pamětí, rozbor řešení úlohy vzpomínkou na úlohu „podobnou“, . Kdybychom dokázali přesvědčit žáky a studenty, jejich rodiče, prarodiče, a tedy postupně i spisovatele, umělce a politiky, že matematika přispívá k obohacování člověka, měli bychom vyhráno. Proč je to tak těžké? Protože je to v praxi složitější. Když student vidí, že kritériem úspěšnosti nejsou znalosti, pronikavost logického úsudku a originalita myšlení, ale kategorie zcela jiné, těžko ho můžeme získat pro matematiku, zvláště když ji předvádíme na bizarní problematice, která nesouvisí ani s realitou života, ani s teoretickými pohledy na určitou vědní oblast. Nejdůležitější je ukázat, že matematika souvisí s žakovým světem, že může být účinným nástrojem k porozumění životu. To je ovšem umění, které může s úspěchem pěstovat jen takový učitel, který má matematiku takto zažitou. Zdá se mi, že mnoho potíží vzniká z požadavku učit „všechny všemu“, jak to požaduje Bílá kniha již v úvodním mottu z *Komenského Obecné porady* ([1], s. 13).

Není patrně možné dosahovat slušných vyučovacích výsledků v klimatu nepřátelském rozvoji osobnosti, ve škole, v níž je většina třídy naladěna nepříznivě nejen proti matematice, ale proti jakékoliv práci. Je kladným rysem *Bílé knihy*, že si její autoři uvědomují potřebu změnit klima školy ([1], s. 41), problém však je jak a v jakém „časovém horizontu“ toho dosáhnout. Pochybuji, že to je reálné v „horizontu střednědobém“ ([1], s. 7). Jednotliví učitelé v „nepříznivé společenské atmosféře“ nic nezmohou, nepomůže jim rámcový vzdělávací program ani integrace předmětů. Jak se v této situaci zachovat? Patrně nezbývá než uchýlit se k nějaké ne příliš kladné motivaci, neboť změnit společnost nemůžeme a dostáváme se do

problémů, z nichž lze stěží vybřednout. Radost z práce, o níž mluví Dag Hrubý, v této situaci učitel sotva zažije.

Jaká je struktura budoucích konzumentů matematiky? Nemůžeme vyložit, že máme ve třídě budoucího matematika – tvůrce. Měli bychom to poznat na jeho chápání matematiky, na jeho porozumění problematice, na charakteru jeho reakcí a otázek, které klade. Nemusí to ovšem být ani student vzorný ani student příliš pořádný. Práce s ním nemusí být lehká. Takovéhoho studenta můžeme zaujmout problémy takřka vědeckými, ale matematická olympiáda může být i pro něho nepřekonatelnou překážkou, zvláště je-li typu hloubavého, nikoliv však soutěživého, má-li dobré nápady, ale nedokáže-li je dovést k přijatelným formulacím. Pro tohoto studenta není metoda výkladu matematiky prvořadou záležitostí, problémy, které chce řešit, si sám často vyhledává, měli bychom mu pomoci orientovat se v literatuře, najít si čas diskutovat s ním o problémech, které ho zajímají, pomoci mu v budování jeho vlastního matematického světa.

V každé třídě sedí ovšem i budoucí uživatelné matematiky. Ti, kteří nebudou potřebovat matematiku ve své profesi, vědí, že vystačí s velmi omezeným rozsahem matematických vědomostí, stačí jim zpravidla učivo základní školy. Dobře provozovaná matematika by ovšem měla rozvíjet jejich kritičnost, pracovitost, tvořivost. Jsou to hodnoty, které uznává naše společnost? Patrně ne vždy. Budoucí „konzumenti matematiky“ by si ovšem přáli naučit se potřebné postupy (o pojmy jim zpravidla nejde) rychle, jasně a spolehlivě. Smysl matematického dokazování jim uniká, v učebnici přece musí být věci, které jsou správné, o dějepisných faktech se také nemůžeme přesvědčit. Student, který tíhne k praxi, k technice, chce-li poznávat matematiku, bude dávat přednost matematice pokud možno jednoduché, názorné, nejde mu o její pojmovou vytříbenost. I na tyto studenty bychom měli myslet při utváření školních vzdělávacích programů a jejich realizaci ve třídě.

Prostudují-li si *Glosy a komentáře* ([20]), nemohu se zbavit pocitu pojmového předimenzování gymnaziální matematiky. Zčásti je to podle mého názoru způsobeno tím, že současné pojetí se soustřeďuje především na zprostředkování určitých matematických struktur studentům. Je možné jiné pojetí? Jsem přesvědčen, že ano, např. orientací na studiu kvantitativní a kvalitativní stránky jevů studentova světa. Nejsem si samozřejmě jist, zda je takovýto názor realizovatelný a zda by byl úspěšnější než současná praxe, naznačím však, oč mi jde. Pojem množina by měl vyrůstat ze společenské a přírodní reality, právě tak jako pojmy relace a funkce,

mnohem intenzivněji než je to realizováno v současné praxi. Abstrakce není pouze procesem matematickým, je to proces obecně pojmotvorný, který je spjat i s konstrukcí jazyka. Zdá se, že toho prakticky nevyužíváme. Jazyk matematiky by měl být přirozenější, než je tomu v současné době. Těžko můžeme přesvědčit inteligentního laika, že je účelné v matematice učit, že z libovolných dvou výroků plyne buď první z druhého, nebo druhý z prvního. To je ovšem při dnes zavedeném vyjadřování nutné akceptovat. Osobně bych se přimlouval za intuitivní zavedení relace logického vyplývá. Přes řadu potíží by se matematika reálnému životu určitě přiblížila. Podobně považuji za vhodné poznávat vlastnosti prostoru – všemi vhodnými prostředky postupně zaváděnými a ne zvlášť různé „druhy“ geometrií. Analogicky aritmetika a algebra by měly být rozvíjeny s problémy kalkulací a s využitím výpočetní techniky. Znovu zdůrazňuji, že nevím, zda je naznačený přístup rozumný, cítím však, že současné „akademické“ pojetí asi udržitelné není.

Vážným problémem každého vzdělávání jsou ovšem konflikty s bezprostředními zájmy studentů a jejich rodičů, s plněním požadavků ředitelů, inspektorů a školské správy. Vznešené cíle o rozvíjení osobnosti studenta narážejí na překážky ve formě přijímacích zkoušek nejrůznějšího druhu. Zdá se, že jejich pojetí není v souladu s rozvíjením kompetencí a je zde vážné nebezpečí orientace části školního vzdělávání na přípravu na testy. Poctivý učitel cítí povinnost připravit studenta na školu, kterou si zvolil a sladění těchto úkolů s hlubšími cíli je často obtížné.

Přesto věřím, že se nám podaří budovat školu, která bude úspěšně rozvíjet vzdělání svých občanů, která bude přispívat k budování demokracie (Bydžovský) a která bude školou radostnou (Hrubý).

L i t e r a t u r a

- [1] Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha. MŠMT, Praha 2001.
- [2] *Buzková, P.*: Ano, je potřeba víc gymnázií. Lidové noviny, 9. 2. 2006.
- [3] *Žák, J.*: Študenti a kantoři. Cesta, 2005.
- [4] *Hausenblas, O.*: Školy nejen pro vyvolené. Respekt 10, 6. – 12. 3. 2006.
- [5] *Masaryk, T. G.*: Některé problémy pedagogické a didaktické. In: O škole a vzdělání. SPN, Praha 1990.
- [6] *Mahdalová, K.*: To není balík, to je dítě. Respekt 10, 6. – 12. 3. 2006.
- [7] *Matějů, P.*: Elita škodí zdraví. Respekt 10, 6. – 12. 3. 2006.
- [8] *Komenský, J. A.*: Didaktika analytická. Samcovo Knihkupectví, Praha 1946.

- [9] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. VÚP, Praha 2002.
- [10] *Jamek, V.*: O patřičnosti v jazyce. Nakladatelství Franze Kafky, Praha 1998.
- [11] *Vrána, S.*: Učebné metody. Dědictví Komenského. Praha 1936.
- [12] *Hausenblas, O.*: Proč a jak chodit do školy. Přítomnost, č. 4, 1991.
- [13] *Holt, J.*: Jak se děti učí. Strom, Praha 1995.
- [14] *Skalková, J.*: Pedagogická výzva nové doby. Paido, Brno 2004.
- [15] *Finkelkraut, A.*: Destrukce myšlení. Atlantis, Brno, 1993.
- [16] *Cílek, V.*: Makom. Dokořán, Praha 2004.
- [17] *Kundera, L.*: Zneuznané dědictví Cervantesovo. Atlantis, Brno 2005.
- [18] *Komárek, S.*: Velké činy. Lidové noviny 25. 2. 2006.
- [19] *Bauman, Z.*: Individualizovaná společnost. Mladá fronta, Praha 2004.
- [20] *Hrubý, D.*: Glosy a komentáře. Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání. Matematika. Rukopis 2006.

Písemkové příklady na SŠ 29

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pokračujeme dalšími příklady, které jsou inspirací i praktickou pomůckou pro učitele matematiky. Úvodní komentář nalezne čtenář v [1], poslední pokračování v [2]. Příklady z jednotlivých tématických celků (TC) jsou vybírány nahodile co do zaměření i co do obtížnosti. U každého příkladu jsou uvedeny dvě rovnocenné verze A, B a dále ještě verze C, D na další použití (náhradní písemka, písemka v paralelce, předchozí procvičení či domácí úloha). Je volen stručný text vhodný i k zápisu na tabuli, využívající si ovšem může text upravit a přizpůsobit podle podmínek ve třídě a v souladu s používanou terminologií a symbolikou.

Chce-li se i některý čtenář podělit o své zkušenosti se svými kolegy a nabídnout jim zadání některých svých osvědčených příkladů pro písemné zkoušení, nechť se s touto nabídkou obrátí na náš časopis.

TC: Základní poznatky z matematiky

1.

A: Nesvítí-li kontrolní světlo, pak je ventil uzavřen. Vidím, že kontrolní světlo svítí. Z toho usuzuji, že ventil není uzavřen.

B: Je-li přístroj v pořádku, pak se pojistka nespálí. Vidím, že pojistka se spálila. Z toho usuzuji, že přístroj není v pořádku. Je tento úsudek správný?

Obsah: Tabulky pravdivosti negace, konjunkce a implikace, užití tabulek k ověření, zda daný složený výrok je tautologie.

Výsledky: A: Nesprávný úsudek. B: Správný úsudek.

Komentář: Řešení např. A lze provést takto: S = svítí kontrolní světlo, U = ventil je uzavřen.

Úsudek přepíšeme v jazyku logiky: $((\neg S \Rightarrow U) \wedge S) \Rightarrow \neg U$ a zjišťujeme, zda jde o tautologii. Např. takto:

S	U	$((\neg S$	$\Rightarrow U)$	$\wedge$	S)	$\Rightarrow$	$\neg U$	
1	1	0	<u>1</u>	1	1	<u>1</u>	0	
1	0	0	<u>1</u>	0	1	<u>1</u>	1	
0	1	1	<u>1</u>	1	0	<u>0</u>	0	
0	0	1	<u>0</u>	0	0	<u>0</u>	1	Není to tautologie.

C: Je-li vůz zabrzděn, pak nejede. Vidím, že vůz jede. Z toho usuzuji, že není zabrzděn.

D: Neteče-li voda, pak lze provést opravu. Vidím, že voda teče. Z toho usuzuji, že nelze provést opravu.

Je tento úsudek správný?

Výsledky: C: Správný úsudek; D: Nesprávný úsudek.

TC: Funkce

2.

A|B: Zjednodušte výraz

$$A = \frac{\sqrt[5]{a^8 c^3 \sqrt{(ac)^{11}}}}{c \sqrt{ac} \sqrt[5]{(ac)^2}} \quad \Bigg| \quad B = \frac{\sqrt{b^7 c^3 \sqrt[5]{(bc)^2}}}{c \sqrt[5]{bc} \sqrt{(bc)^5}}.$$

Obsah: Operace s odmocninami nebo převedení na operace s mocninami s racionálním exponentem.

Výsledky: A: $A = a^2$; B: $B = b^3$

C|D: Zjednodušte výraz

$$A = \frac{\sqrt{ax^3} \sqrt[5]{a^4x^2}}{\sqrt[5]{a^7x^2} \sqrt{a^5x^3}} \quad \left| \quad B = \frac{\sqrt[5]{by^7} \sqrt{b^7y^3}}{\sqrt{b^3y} \sqrt[5]{b^4y^2}}.$$

Výsledky: C: $A = \frac{x}{a}$; D: $B = \frac{y}{b}$.

TC: Analytická geometrie

3.

A{B}: Je dána přímka $p = KL$, $K[5; -1; 1]$, $L[11; 0; -2]$ $\{K[-1; 2; 2]$, $L[3; -5; -2]\}$ a rovina $\varrho: 2x - y - 2z + 7 = 0$ $\{2x + y - 2z + 13 = 0\}$. Určete jejich průsečík a odchylku s přesností na minuty.

Obsah: Přímka daná dvěma body, průsečík přímky s rovinou, směrový vektor přímky, vektor normály roviny, skalární součin, odchylka přímky od roviny.

Výsledky:

A: Přímka p ; směrový vektor $\vec{u} = (6; 2; -3)$, rovnice:

$$\begin{aligned}x &= 5 + 6t, \\y &= -1 + 2t, \\z &= 1 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Průsečík $[-1; -3; 4]$, odchylka $\varphi = 49^\circ 38'$.

B: Přímka p ; směrový vektor $\vec{u} = (4; -7; -4)$, rovnice:

$$\begin{aligned}x &= -1 + 4t, \\y &= 2 - 7t, \\z &= 2 - 4t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Průsečík $[-5; 9; 6]$, odchylka $\varphi = 19^\circ 28'$.

C{D}: Je dána přímka $p = KL$, $K[-1; -1; -2]$, $L[-5; 1; 2]$ $\{K[2; -2; -4]$, $L[-1; -8; 2]\}$ a rovina $\varrho: 6x - 2y + 3z + 2 = 0$ $\{6x + 2y - 3z - 4 = 0\}$. Určete jejich průsečík a odchylku s přesností na minuty.

Výsledky:

C: Přímka p ; směrový vektor $\vec{u} = (-2; 1; 2)$, rovnice:

$$\begin{aligned}x &= -1 - 2t, \\y &= -1 + t, \\z &= -2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Průsečík $[1; -2; -4]$, odchylka $\varphi = 22^\circ 24'$.

D: Přímka p ; směrový vektor $\vec{u} = (-1; -2; 2)$, rovnice:

$$\begin{aligned}x &= 2 - t, \\y &= -2 - 2t, \\z &= -4 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Průsečík $[1; -4; -2]$, odchylka $\varphi = 49^\circ 38'$.

TC: Posloupnosti a řady

4.

A[B]: Nejmenší úhel v daném trojúhelníku má $24^\circ [40^\circ]$, přičemž velikosti úhlů jsou prvními třemi členy geometrické posloupnosti. Určete velikost úhlů s přesností na minuty.

Obsah: geometrická posloupnost, součet vnitřních úhlů trojúhelníku, řešení kvadratické rovnice s iracionálními kořeny, zaokrouhlení.

Výsledky:

A: $q^2 + q - 6,5 = 0$, $q \approx 2,0981$; úhly: 24° , $50^\circ 21'$, $105^\circ 39'$.

B: $q^2 + q - 2,6 = 0$, $q \approx 1,4365$; úhly: 40° , $57^\circ 28'$, $82^\circ 32'$.

C[D]: Největší úhel v daném trojúhelníku má $120^\circ [95^\circ]$, přičemž velikosti úhlů jsou prvními třemi členy geometrické posloupnosti. Určete velikost úhlů s přesností na minuty.

Výsledky:

C: $q^2 + q - 0,5 = 0$, $q \approx 0,3660$; úhly: 120° , $43^\circ 55'$, $16^\circ 5'$.

D: $q^2 + q - 0,2 = 0$, $q \approx 0,1708$; úhly: 150° , $25^\circ 37'$, $4^\circ 23'$.

Literatura

- [1] Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 1. MFI, roč. 3 (1993/94), č. 2.
- [2] Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 28. MFI, roč. 15 (2005/06), č. 9.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 127 a 128, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (15.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 127

Nechť K , L , M jsou středy a D , E , F libovolné vnitřní body po řadě stran BC , CA , AB trojúhelníku ABC . Označme K' , L' , M' středy úseček AD , BE a CF . Přímky AD , BE a CF se protínají v jednom bodě, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK' , LL' a MM' . Dokažte.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Body K' , L' , M' leží po řadě na středních příčkách LM , MK , KL trojúhelníku ABC (obr. 1). Protože střední příčka LM je rovnoběžná se stranou BC , plyne z podobnosti trojúhelníků AMK' a ABD , resp. ALK' a ACD

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|MK'|}{|K'L|}. \quad (1)$$

Cyklickou záměnou dále dostaneme

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|KL'|}{|L'M|}, \quad (2)$$

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|LM'|}{|M'K|}, \quad (3)$$

Vynásobením vztahů (1), (2) a (3) obdržíme

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|KL'|}{|L'M|} \cdot \frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|}.$$

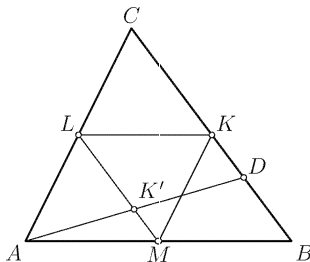
Podle Cèvyovy věty v trojúhelníku ABC se přímky AD , BE a CF protínají v jednom bodě, právě když platí

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

tedy právě když

$$\frac{|KL'|}{|L'M|} \cdot \frac{|LM'|}{|M'K|} \cdot \frac{|MK'|}{|K'L|} = 1.$$

To podle Cèvyovy věty v trojúhelníku KLM nastane, právě když se v jednom bodě protínají přímky KK' , LL' a MM' .



Obr. 1

Správné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 128

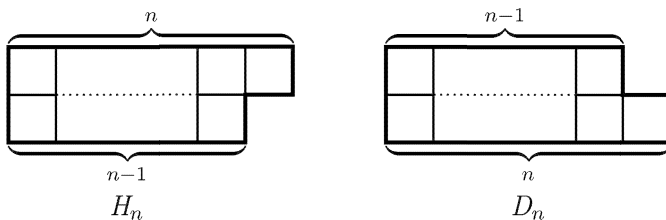
Kolika způsoby můžeme rozřezat obdélník 10×2 na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 ?

(Dvě rozřezání obdélníku považujeme za různá, pokud se liší počtem získaných útvarů nebo polohou alespoň jednoho řezu.)

Pavel Calábek

Řešení:

Pro libovolné přirozené číslo n označme a_n počet možných rozřezání obdélníku $n \times 2$ na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 . Označme dále H_n , resp. D_n šestiúhelník, který je složen ze dvou pásů $n \times 1$ a $(n - 1) \times 1$, přičemž delší pás je nahoře resp. dole (obr. 2). Necht' h_n , resp. d_n udávají počet jejich rozřezání na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 .



Obr. 2

Zřejmě platí $a_1 = 2$ (buď jeden obdélník 2×1 , nebo dva čtverce 1×1), $a_2 = 7$ (obr. 3).



Obr. 3

Šestiúhelník H_n je osově souměrný s šestiúhelníkem D_n . Tedy pro všechna přirozená čísla nutně platí $h_n = d_n$. Snadno se vidí, že $h_1 = d_1 = 1$, $h_2 = d_2 = 3$ (pro h_2 viz obr. 4)



Obr. 4

Předpokládejme, že $n \geq 3$ je libovolné přirozené číslo a uvažujme nějaké přípustné rozřezání obdélníku $n \times 2$. Počet všech možných rozřezání takových, že v pravém horním rohu je čtverec 1×1 je d_n . Počet všech možných rozřezání takových, že vpravo je obdélník 1×2 (postavený na výšku) je a_{n-1} . Počet všech možných rozřezání takových, že vpravo je obdélník 2×1 (postavený na šířku) a pod ním vpravo dole čtverec 1×1 je d_{n-1} . Počet všech možných rozřezání takových, že vpravo jsou pod sebou dva obdélníky 1×2 (postavené na šířku) je a_{n-2} . Tento výčet udává všechny možnosti rozřezání podle útvaru vpravo nahoře a všechny možnosti rozřezání jsou evidentně navzájem různé. Platí proto

$$a_n = d_n + d_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Předpokládejme, že $n \geq 3$ a uvažujme nějaké přípustné rozřezání šestiúhelníku H_n . Vpravo nahoře se nachází buď čtverec nebo obdélník, všechna taková rozřezání jsou navzájem různá, platí proto

$$h_n = a_{n-1} + d_{n-1}.$$

Pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ platí

$$h_n = a_{n-1} + h_{n-1},$$

$$a_n = h_n + h_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Jelikož známe hodnoty a_1 , a_2 , h_1 a h_2 , můžeme podle předchozích vztahů dosazovat do následující tabulky

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_n	1	3	10	32	103	331	1 064	3 420	10 993	35 335
a_n	2	7	22	71	228	733	2 356	7 573	24 342	78 243

Obdélník 10×2 můžeme rozřezat na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 celkem 78 243 různými způsoby.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Poznámka. Pokud bychom v úloze 128 požadovali, aby každé rozřezání daného obdélníku obsahovalo alespoň jeden čtverec 1×1 a alespoň jeden obdélník 2×1 , je v článku *E. Caldy: Dlážděné plochy a čísla Fibonacciova* (MFI, roč. 7, č. 7, s. 396-400) ukázáno, že celkový počet možných rozřezání daného obdélníku $n \times 2$, na obdélníky 2×1 je 89, přitom existuje právě jedno rozřezání obdélníku $n \times 2$ na čtverce 1×1 . Proto by existovalo celkem 78 153 rozřezání požadovaných vlastností.