

MATEMATIKA

Zajímavá zobecnění Ptolemaiovy věty

PAVEL LEISCHNER

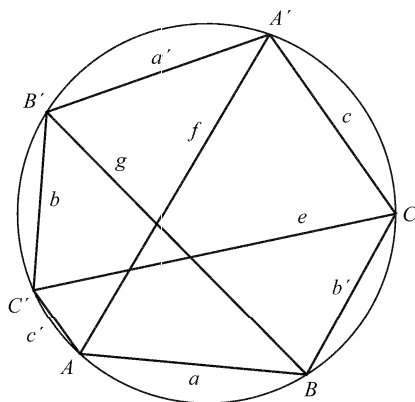
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Ptolemaiova věta říká, že v každém tětiovém čtyřúhelníku je součet součinů délek protilehlých stran roven součinu délek jeho úhlopříček. V článku [2] jsme se seznámili s jejím prostorovým zobecněním a s Ptolemaiovou nerovností. Nyní uvedeme další tři zobecnění této věty. První z nich rozšiřuje tvrzení Ptolemaiovy věty pro tětiový šestiúhelník.

Věta 1 (Fuhmannova)

Nechť $ABCA'B'C'$ je tětiový šestiúhelník. Označme délky jeho stran a úhlopříček AA' , BB' , CC' ve shodě s obrázkem obr. 1. Pak platí rovnost

$$abc + a'b'c' + aa'e + bb'f + cc'g = efg. \quad (1)$$



Obr. 1

Důkaz. Aplikací Ptolemaiovy věty na čtyřúhelníky $ABCA'$ a $BCA'B'$ (obr. 1) dostáváme:

$$ac + b'f = |AC| \cdot |A'B| \quad \text{a} \quad a'b' + cg = |A'B| \cdot |B'C|.$$

První z rovnic vynásobíme číslem b , druhou číslem c' . Jejich sečtením pak dostaneme

$$abc + a'b'c' + bb'f + cc'g = |A'B| (|AC| \cdot b + |B'C| \cdot c'). \quad (2)$$

Pravou stranu vztahu (2) postupně upravíme s využitím Ptolemaiovy věty pro čtyřúhelníky $ACB'C'$ a $A'B'AB$. Obdržíme tak

$$|A'B| (|AC| \cdot b + |B'C| \cdot c') = |A'B| \cdot |AB'| \cdot e = (fg - aa')e,$$

což po dosazení do (2) dává

$$abc + a'b'c' + bb'f + cc'g = efg - aa'e$$

a odtud již po snadné úpravě plyne vztah (1), který jsme chtěli dokázat.

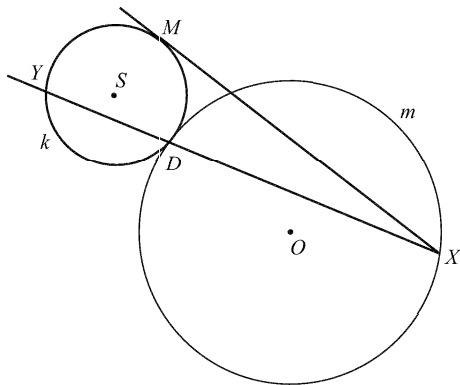
Poznámka 1. Jestliže ve větě 1 položíme $b = b' = 0$, bude $C = B$, $C' = B'$, $g = e$ a ze vztahu (1) dostaneme po vydělení číslem e Ptolemaiovu rovnost $aa' + cc' = ef$ pro tětíkový čtyřúhelník $ABA'B'$.

Bod můžeme považovat za kružnici s nulovým poloměrem. Představme si, že bychom vhodným způsobem nahradili některé vrcholy tětíkového čtyřúhelníku kružnicemi. V této souvislosti si lze položit otázku: Lze nalézt vztah mezi délkami jejich společných tečen tak, abychom limitním přechodem od kružnic k bodům (vrcholům původního čtyřúhelníku) obdrželi z tohoto vztahu Ptolemaiovu rovnost? Odpověď nám poskytnou následující dvě věty.

Věta 2 (Purserova)

Nechť je v rovině dána kružnice k a trojúhelník ABC s vrcholy v její vnější oblasti. Z bodů A, B, C vedme po jedné tečně ke kružnici k a označme T, U, V body dotyku tečen v uvedeném pořadí. Jestliže se kružnice k dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABC , pak je jeden ze součinů $|BC| \cdot |AT|$, $|AC| \cdot |BU|$ a $|AB| \cdot |CV|$ roven součtu zbývajících dvou.

Důkaz. Zavedeme následující označení: Je-li KL libovolná úsečka, značí symbol KL orientovanou úsečku KL s počátečním bodem K a koncovým bodem L . Kružnice m opsaná trojúhelníku ABC je stejnohlá s kružnicí k podle bodu D jejich dotyku. Pro libovolný bod $X \in m$ a jeho obraz $Y \in k$ platí $DY = h \cdot DX$, kde h je koeficient stejnolehlosti, která převádí kružnici m na kružnici k . Kružnice mají vnější dotyk pro $h \in (-\infty, 0)$. V případě vnitřního dotyku je $h \in (0, 1)$. Pro obě situace zřejmě platí $XY = DY - DX = (h - 1)DX$. (Na obr. 2, kde je pro větší názornost vynechán trojúhelník ABC , je znázorněna situace pro $h < 0$; promyslete si sami situaci $h > 0$).



Obr. 2

Je-li navíc M bod dotyku tečny z bodu X ke kružnici k , můžeme s využitím poznatků o mocnosti bodu ke kružnici (viz např. [3], [1] nebo [6]) psát:

$$|XM|^2 = |XD| \cdot |XY| = (1 - h) \cdot |XD|^2.$$

Odtud

$$|XD| = k \cdot |XM|, \quad k = \sqrt{\frac{1}{1-h}}. \quad (3)$$

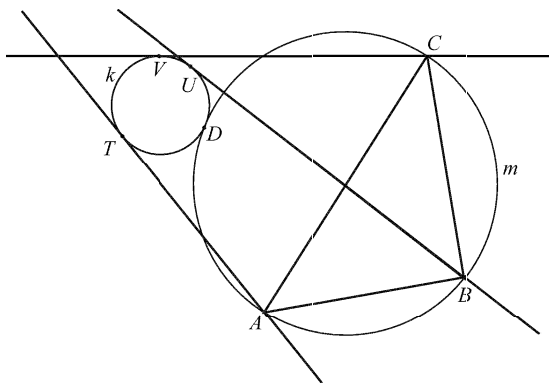
Předpokládejme nejprve, že bod D leží uvnitř toho oblouku AC kružnice m , který neobsahuje bod B (obr. 2). V Ptolemaiově rovnosti

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$$

pro čtyřúhelník $ABCD$ nahradíme s využitím (3) délky úseček CD , AD a BD délkami příslušných tečen. Po vydělení vztahu číslem k dostaneme

$$|AB| \cdot |CV| + |BC| \cdot |AT| = |AC| \cdot |BU|,$$

což jsme chtěli dokázat. Leží-li bod D uvnitř oblouku BC nebo AB , provedeme důkaz analogicky.



Obr. 3

Poznámka 2. Jednu z možných situací znázorňuje obr. 3. Představme si, že se poloměr r kružnice k zmenšuje, přičemž bod D dotyku obou kružnic zůstává pevný. V limitní situaci pro $r = 0$ splynou body T , U a V s bodem D . Věta 2 pak přejde v Ptolemaiovu větu pro tětíkový čtyřúhelník $ABCD$.

Věta 3 (Caseyova)

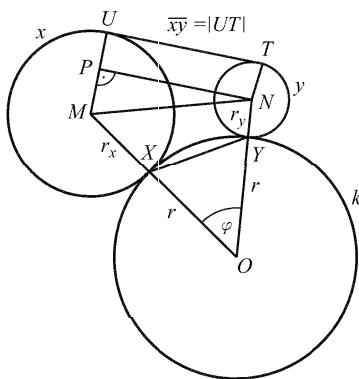
Nechť se kružnice a , b , c , d , dotýkají kružnice k po řadě ve vrcholech A , B , C , D tětívého čtyřúhelníku $ABCD$. Pak platí

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{bc} \cdot \overline{ad} = \overline{ac} \cdot \overline{bd}, \quad (4)$$

kde symbolem $\overline{xy}$ označujeme délku společné vnitřní tečny kružnic x , y za předpokladu že má jedna z těchto kružnic vnější dotyk s kružnicí k a druhá vnitřní. Mají-li kružnice x , y stejný typ dotyku s kružnicí k , dosazujeme za

$\overline{xy}$ délku jejich společné vnější tečny. (Délkou společné tečny dvou kružnic rozumíme vzdálenost jejich dotkových bodů s oběma kružnicemi.)

Důkaz. Nejprve budeme uvažovat situaci na obr. 4 a najdeme vztah mezi délkou $\overline{xy}$ společné tečny kružnic x, y ($x, y \in a, b, c, d$), které mají s kružnicí k vnější dotyk, a vzdáleností $|XY|$ dotkových bodů kružnice k s kružnicemi x, y .



Obr. 4

Dvojným vyjádřením výrazu $|MN|^2$ (jednou pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku PMN , podruhé pomocí kosinové věty z trojúhelníku OMN) dostaneme

$$\overline{xy}^2 + (r_x - r_y)^2 = (r + r_x)^2 + (r + r_y)^2 - 2(r + r_x) \cdot (r + r_y) \cos \varphi. \quad (5)$$

Z rovnoramenného trojúhelníku XOY dále plyne

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{|XY|^2}{2r^2},$$

odkud po dosazení do (5), roznásobení a úpravě dostaneme

$$|XY| = \frac{r}{\sqrt{(r + r_x)(r + r_y)}} \cdot \overline{xy} \quad (6)$$

Pro další úvahy zavedeme následující znaménkovou dohodu: *Poloměr kružnice x nebo y je kladný, má-li tato kružnice vnější dotyk s kružnicí k a záporný v případě vnitřního dotyku. Poloměr kružnice k je vždy kladný.*

Při dodržení této dohody platí vztah (6) i pro obě zbývající možnosti vzájemné polohy kružnic k , x , y (buď jsou oba dotyky s kružnicí k vnitřní nebo je jeden vnitřní a druhý vnější). Doporučujeme čtenáři, aby se o tom přesvědčil postupem analogickým výše uvedenému.

Nyní již snadno dokončíme důkaz věty 3. V Ptolemaiově rovnosti

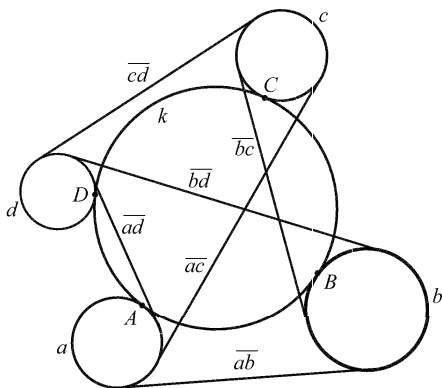
$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$$

pro tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ na obr. 5 nahradíme všechny délky délkami příslušných tečen pomocí (6). Závěrem vynásobíme získaný vztah výrazem

$$\frac{1}{r^2} \sqrt{(r + r_a)(r + r_b)(r + r_c)(r + r_d)}$$

a obdržíme rovnost (4).

Poznámka 3. Na obr. 5 je znázorněna geometrická situace z věty 3 pro případ, kdy mají kružnice a , b , c , d vnější dotyk s kružnicí k . Snadno nahlédneme, že v limitní situaci, kdy budou poloměry kružnic a , b , c a d nulové, obdržíme Ptolemaiovu větu.



Obr. 5

Na závěr poznamenejme, že výše uvedená tvrzení se často uvádějí ve tvaru, který odpovídá Ptolemaiově nerovnosti, viz [2]. Formulace a rovněž

důkazy těchto tvrzení ponecháváme čtenáři k promyšlení. Rovněž doporučujeme vytvořit si v CABRI nebo v GEONEXTU dynamické obrázky k větám 2 a 3 tak, aby bylo možné s jejich pomocí demonstrovat všechny situace, již mohou pro dotyk uvažovaných kružnic nastat.

Literatura

- [1] *Boček, L. – Zhouf, J.:* Máte rádi kružnice? Prometheus, Praha 1995.
- [2] *Leischner, P.:* Ptolemaiova nerovnost. MFI, roč.15 (2005/06), č. 7, s. 385–392.
- [3] *Pomykalová, E.:* Matematika pro gymnázia – Planimetrie, Prometheus, Praha 1993.
- [4] *Šarygin, I. F.:* Zadači po geometrii, Nauka, Moskva 1986.
- [5] *Škljarskij, D. O. – Čencov, N. N. – Jaglom, I. M.:* Izbrannye zadači i teoremy elementarnoj matematiky, část 2 – geometrija (planimetrija), GITTL, Moskva 1952.
- [6] *Švrček, J. – Vanžura, J.:* Geometrie trojúhelníka, SNTL, Praha 1988.

Kombinatorika pre budúcich učiteľov matematiky

DUŠAN JEDINÁK

Trnavská univerzita, Trnava, SLOVENSKO

Úvod

Bol som zvedavý na názory svojich poslucháčov (v 3. ročníku vysokoškolského štúdia na Pedagogickej fakulte TU) o ich vzťahu a skúsenostiach so stredoškolskou kombinatorikou. Pripravil som pre nich anketové otázky:

1. *Ktoré okolnosti v doterajšom štúdiu kombinatoriky sú pre Vás smutné, znechucujúce?*
2. *Uvedte, ktoré črty kombinatoriky a okolnosti pri jej vyučovaní vo vašej budúcej praxi zvlášť zvýraznite a prečo?*
3. *Uvedte, akú didaktickú literatúru o stredoškolskej kombinatorike poznáte. V ktorom smere by ste potrebovali metodickú podporu?*

4. *Navrhните postupy pre zlepšenie didaktickej i odbornej úrovne vyučovania kombinatoriky na strednej škole.*
5. *Prečo zaraďovať (nezaraďovať) základné kombinatorické postupy do elementárneho vzdelávania?*

Z odpovedí

Na anketu odpovedalo anonymne 25 budúcich učiteľov matematiky (prpravovaných pre 5. až 9. ročník ZŠ). Neoblúbenosť školskej kombinatoriky priznalo hneď v úvode 13 opýtaných, jeden zmiernil: *V súčasnosti mi už nie je taká odporná ako predtým.* Častými dôvodmi pre neoblúbenosť boli: nedostatočne vysvetlená a slabo pochopená problematika, málo času venovaného podrobnému výkladu, pocit neistoty pri riešení úloh (popletenie vzorcov, zabudnuté možnosti). K oblúbenosti prispievajú: praktickosť problematiky, zaujímavé zadania úloh, rozvoj logického myslenia a možnosť samostatného postupu riešenia. Inšpiratívne dvojznačná bola odpoveď: *Kombinatoriku sme brali tak málo, že som ju mala celkom rada.*

V odpovedi na prvú otázku sa ukázalo, že pre 9 poslucháčov je smutná, znechucujúca *neschopnosť už len začať riešiť obťažnejšie úlohy a celková neznalosť riešenia.* Päť poslucháčov uviedlo, že príčinou tohto stavu je neporiadne vysvetlenie v škole, málo času na pochopenie a nenaučenosť *robiť poriadok.* Zaujímavé boli odpovede: A: *Znechucujúce je pre mňa, pokiaľ dlhodobo neviem nájsť riešenie nejakého príkladu a zároveň nemôžem nájsť niekoho, kto by mi s tým príkladom pomohol.* B: *Mnohí učitelia učia kombinatoriku len námatkovo, povrchné, akoby sa jej tiež báli.* C: *Mne to až doteraz nikto poriadne nevysvetlil, veľmi chaotický výklad, sám učiteľ nemal jasno.* D: *Mrzí ma, že sme k hlbšiemu pochopeniu kombinatoriky neboli viac prinútení.*

Druhá otázka priniesla odpovede, na ktorých sa skoro všetci zhodli. Uvádzali: dôležitosť zadania, predstavivosť, znázornenie, hlbšie pochopenie, ukázať systém – organizačný princíp, zdôvodnenie myšlienkových postupov, vlastný prístup, využitie v praxi.

Odpovede na tretiu otázku ukázali, že poslucháči okrem učebnice pre príslušnú školu a v seminári ukázané publikácie nepoznajú skoro žiadnu didaktickú literatúru. Metodickou pomocou by boli ukážky riešenia náročnejších úloh s viacerými postupmi riešenia, zbierky riešených úloh.

Z odpovedí na štvrtú otázku vyplynulo: prístupné (jasné, názorné, jednoduché, pestré, systémové a praktické) podanie riešenia náročnejších úloh, viac vyučovacích hodín a samostatného riešenia príkladov. Vo vy-

jadreniach poslucháčov boli aj tieto: *V prvom rade, aby sami učitelia, naozaj, čo v najvyššej miere, kombinatoriku ovládali a podávali ju aj so štipkou humoru... Hlavne zmeniť učiteľov, ktorí to nevedia vysvetľovať.*

Piata otázka priniesla hneď aj protikladné odpovede: *Nezaraďovať, kým sa učitelia nenaučia poriadne vysvetliť základné metódy. | Zaradiť – poskytnúť aspoň nejaký základ.* Niekoľko poslucháčov zdôrazňovalo, že kombinatorické učivo je zložité a ťažké, menej prístupné na nižšej vekovej úrovni. Odporúčali zaradiť základy kombinatoriky ako rozširujúce učivo vo vyšších ročníkoch základnej školy. Väčšina bola presvedčená, že školská kombinatorika má svoje opodstatnenie už v elementárnom vzdelávaní, lebo využíva a rozvíja logické myslenie (indukciu, dedukciu), vzbudzuje záujem detí pestrosťou svojich úloh aj ich praktickým uplatnením (aj v bežnom živote treba kombinovať). Včasné zaradenie prispieva k vybudovaniu lepšieho vzťahu k tejto pozoruhodnej matematickej disciplíne. *Základné kombinatorické postupy vychádzajú z praktického života a podporujú zdravé myslenie.*

Krátka anketa ma presvedčila o tom, že spytovaní budúci učitelia majú svoje vlastné názory, ktoré určite aspoň čiastočne vystihujú školskú realitu. Predpokladám, že keď budú chcieť, vedieť a môcť, tak aj oni sami aktívne prispievajú k pozitívnym zmenám v tejto oblasti. Možno o tom svedčí aj presvedčenie jedného z nich: *Kombinatorika učí aj sebadisciplínu a poriadku, nemusí sa bifikovať, poukazuje na praktickosť myslenia. Trénuje sa logika, názornosť a predstavivosť.*

Ponuka

Uvádzame osem zaujímavých úloh aj s riešeniami, ktoré majú poslúžiť ako podnet pre kombinatorické uvažovanie v prostredí našich škôl.

Úloha 1 (Študenti a učitelia)

Koľko je možností prideliť štyroch študentov na preskúšanie trom učiteľom, ak požadujeme:

- aby každý študent bol preskúšaný *aspoň jedným* učiteľom;
- aby každý študent bol preskúšaný *práve jedným* učiteľom;
- aby každý učiteľ preskúšal *aspoň jedného* študenta;
- aby každý učiteľ preskúšal *práve jedného* študenta.

Riešenie:

Označme si študentov A, B, C, D a učiteľov P, Q, R. Potom

- a) študenta A môže preskúšať P, Q, R, PQ, PR, QR, PQR, to je 7 možností;
pre študenta B je to tiež týchto 7 možností, podobne aj pre C i D.
Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé, tak všetkých možností spolu je $7^4 = 2401$.
- b) naznačme jednotlivé možnosti pre každého študenta do tabuľky

A	B	C	D
P	P	Q	R
R	R	R	R
Q	R	P	P

- v jednotlivých riadkoch sú variácie štvrtej triedy (štyria študenti) z troch prvkov (traja učitelia) s opakovaním. Ich počet je $V'4(3) = 3^4 = 81$.
- c) učiteľ P môže preskúšať A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD, teda 15 možností. Podobne 15 možností je pre Q aj pre R. Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé a tak spolu je možností $15^3 = 3375$.
- d) rozpišme jednotlivé možnosti pre každého učiteľa do tabuľky

P	Q	R
A	A	A
A	B	B
B	B	A
B	C	D
D	C	B
D	D	D

to sú variácie tretej triedy (traja učitelia) zo štyroch prvkov (štyria študenti) s opakovaním a ich počet je $V'3(4) = 4^3 = 64$.

Úloha 2 (Manželské páry – vyberajte vhodným postupom)

Z desiatich manželských párov (m – ž) vyberáme päť osôb. Koľko je všetkých takých päťíc, že v nich nie je ani jeden manželský pár (postup zdôvodnite).

Riešenie:

Budeme si predstavovať, akým postupom požadované podmienky splníme:

- a) Vyberieme päť párov z desiatich manželských párov, to sa dá urobiť $C_5(10) = 252$ spôsobmi. Potom vyberieme z každej manželskej dvojice jedného, pre tento výber je $V'_5(2) = 2^5 = 32$ možností. Uplatnením princípu násobenia (spomínané výbery sú nezávislé ku každému prechádzajúcemu výberu) dostávame, že požadovaných päťíc tak, aby v nich nebol ani jeden manželský pár, je $C_5((10) \cdot V'_5(2)) = 252 \cdot 32 = 8\,064$.
- b) Určíme počet päťíc v možných zlozeniach podľa pohlavia. Samí muži (5 m). To je $C_5(10) = 252$ možností. Pre výber päťíc samých žien (5 ž) je tiež 252 možností. Ďalej určíme počet päťíc v zložení:

$$1 \text{ m} + 4 \text{ ž} \dots C_1(10) \cdot C_4(9) = 10 \cdot 126 = 1\,260$$

$$1 \text{ ž} + 4 \text{ m} \dots C_1(10) \cdot C_4(9) = 10 \cdot 126 = 1\,260$$

$$2 \text{ m} + 3 \text{ ž} \dots C_2(10) \cdot C_3(8) = 45 \cdot 56 = 2\,520$$

$$2 \text{ ž} + 3 \text{ m} \dots C_2(10) \cdot C_3(8) = 45 \cdot 56 = 2\,520$$

To dáva spolu (sčítaním) $252 + 252 + 1\,260 + 1\,260 + 2\,520 + 2\,520 = 8\,064$ možností.

- c) Budeme postupne vyberať do päťíc tak, aby boli splnené požiadavky: Prvý môže byť hocikto z dvadsiatich, teda 20 možností.

Druhý môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraného manželského druhu, teda 18 možností.

Tretí môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 16 možností.

Štvrtý môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 14 možností.

Piaty môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 12 možností.

Spolu (princíp násobenia) je to $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 = 967\,680$ možností, ale medzi nimi sa niektoré päťice opakujú, z každých $5! = 120$ zostane iba jedna, teda všetkých požadovaných päťíc je

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{5!} = \frac{967\,680}{120} = 8\,064.$$

- d) Vyberieme päť ľudí z dvadsiatich, na to máme $C_5(20) = 15\,504$ možností. Tam však budú aj päťice, v ktorých bude jedna alebo aj dve manželské dvojice (tieto možnosti musíme z daného počtu odčítať). Určíme, koľko zo spomínaných päťíc obsahuje
- (i) práve jednu manželskú dvojicu – takých možností je

$$C_1(10) \cdot [C_3(9) + C_3(9) + 9 \cdot C_2(8) + 9 \cdot C_2(8)] = 10 \cdot 672 = 6\,720,$$

- (ii) práve dve manželské dvojice $C_2(10) \cdot 16$, pretože ku každej z dvoch vybraných manželských dvojíc možno ešte priradiť jedného človeka zo $(20 - 4) = 16$. Päťíc s dvomi manželskými dvojicami je 720.

Teda po odčítaní nevhodných možností ($6\,720 + 720$) dostaneme

$$15\,504 - (6\,720 + 720) = 8\,064$$

požadovaných dvojíc spĺňajúcich požiadavky úlohy.

Úloha 3 (Usporiadajte si svoje kruhy)

Za kruhový stôl treba rozsadiť p ľudí. Koľko rôznych rozsadení môžeme vykonať ak

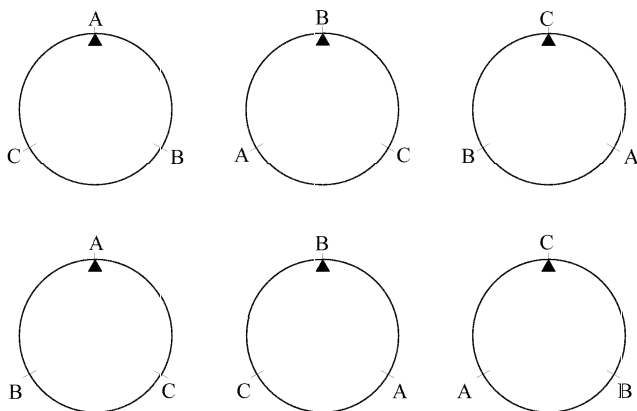
- a) záleží aj na mieste vzhľadom k stolu;
- b) nezáleží na mieste vzhľadom k stolu, ale len na bezprostredných susedoch zľava a sprava;
- c) nezáleží na mieste vzhľadom k stolu, ale ani nerozlišujeme zvlášť susedov zľava a sprava (len ich bezprostrednú susedskosť);

Riešenie:

Vytvorme si najprv jednoduchú predstavu (obr. 1). Pre tri prvky A, B, C máme $3! = 6$ možností v strede stola sme ich očíslovali, „vrch stola“ sme označili ▲.

- a) ak záleží na polohe vzhľadom k „vrchu stolu“ je $3! = 6$ rozsadení. (č. 1 – 6)
- b) ak záleží len na susedoch (s ohľadom či zľava alebo sprava) je možností, lebo obr. 1 – 2 – 3 aj 4 – 5 – 6 sú len „pootočené“.
- c) ak nezáleží na tom, či je ten istý sused zľava alebo sprava, tak rozsadení je $\frac{2!}{2} = 1$, (teda polovicu z takých čo b) lebo obr. 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 majú všetci tých istých susedov.

Zovšeobecnenie a) $p!$ b) $\frac{p!}{p} = (p-1)!$ c) $\frac{(p-1)!}{2}$



Obr. 1

Úloha 4

Sedem dievčat tancuje v „kole“. Koľko je rozličných možností pre ich rozmiestnenie?

Riešenie: Ak tancujú v „kole“, nezáleží na polohe vzhľadom ku „kolu“, t.j. počet možností je $6!$.

Úloha 5

Koľko rozličných náramkov sa dá vyrobiť zo siedmich rôznofarebných guliek?

Riešenie: Pri náramku nerozlišujeme susedov zľava – sprava (náramok sa dá „obrútiť“), teda počet možností je $\frac{6!}{2}$.

Úloha 6

Sedem chlapcov a sedem dievčat tancuje v kole tak, že sú usporiadaní striedavo (ch – d). Koľko je rôznych možností usporiadať takéto kolo?

Riešenie: Počet usporiadaní chlapcov je $6!$ (nezáleží na poradí vzhľadom ku kolu). Medzi nich umiestniť 7 dievčat, to sa dá $7!$ spôsobmi (záleží na poradí vzhľadom k chlapcom). Teda je $6! \cdot 7!$ možností pre takéto kolo.

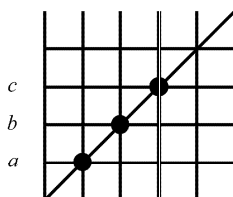
Úloha 7 (Poznať definíciu a vedieť kombinovať)

Množina L má n rôznych prvkov.

- Koľko existuje na L binárnych relácií?
- Koľko existuje na L reflexívnych relácií?
- Koľko existuje na L symetrických relácií?

Riešenie:

- Binárna relácia je každá podmnožina karteziánskeho súčinu $L \times L$. Ak má množina L počet prvkov n , tak počet prvkov $L \times L$ je n^2 . Z n^2 prvkov môžeme vytvoriť rôznych podmnožín. Na množine L , ak má n prvkov existuje binárnych relácií.
- Relácia ϱ je na L reflexívna, ak pre každý prvok platí $x \in L \ x\varrho x$. Naznačme si to (napríklad pre $n = 3$) na obr. 2:



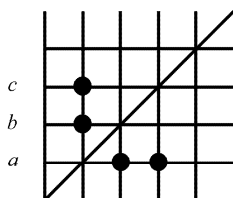
Obr. 2

V reflexívnej relácii musia byť „prvky z uhlopriečky“. $A_r: [x, x], [y, y], \dots$ týchto je pre n -prvkovú množinu práve n .

K nim môžeme pridať niektoré zo zostávajúcich prvkov z $L \times L$; tých je $n \cdot n - n = n \cdot (n - 1)$.

Teda z nich vytvárame ľubovoľné podmnožiny. Na množine L (n -prvkovej) existuje $2^{n(n-1)}$ reflexívnych relácií.

- Relácia ϱ je na L symetrická, ak platí pre každé $x \in L$: $x\varrho y$, potom $y\varrho x$. Predstavme si to na obr. 3 (pre $n = 3$). Je to „symetria podľa uhlopriečky“.



Obr. 3

Takých prvkov (dvojíc) je $\frac{n \cdot n - n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Z nich počet podmnožín je $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Počet všetkých možných symetrických relácií pre množinu L , ktorá má n prvkov, je teda $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Úloha 8 (Správna predstava, úspech zaručený)

Stanovte počet riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$, kde $x_i \in \mathbb{N}_0$ pre dané n prirodzené.

Riešenie: Predstavme si napríklad konkrétne rovnicu $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, t.j. $k = 3$, $n = 5$.

Riešenia si môžeme rozpísať do tabuľky

x_1	x_2	x_3	
5	0	0	3 riešenia (môžeme zamieňať)
4	1	0	6 riešení
3	2	0	6 riešení
3	1	1	3 riešenia
2	2	1	3 riešenia, teda spolu je 21 riešení

Môžeme uvažovať aj takto: Treba rozmiestniť päť jednotiek a dve značky, napr.

$$1 \quad 1 \quad \square \quad 1 \quad 1 \quad \square \quad 1$$

(to predstavuje riešenie $2+2+1=5$). To môžeme urobiť $C_2(7) = P'_{5,2}(7) = 21$ spôsobmi.

Ak našu úvahu zovšeobecníme pre $k, n \in \mathbb{N}$, počet riešení danej rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n,$$

kde $x_i \in \mathbb{N}_0$ pre dané n prirodzené bude $C_{k-1}(n+k-1)$, teda ako počet rozdelení $k-1$ značiek na $n+k-1$ polí.

Záver

Ak vás úlohy didakticky zaujali, skúste ich používať aj pre svojich žiakov.

57. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Najděte všechna čtyřmístná čísla končící číslicí 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí.

Pavel Tlustý

Z9–I–2

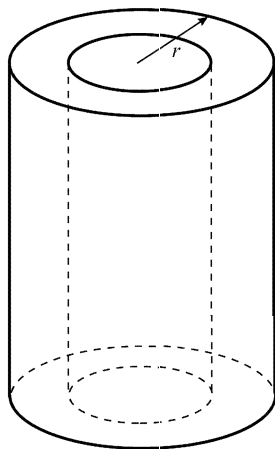
Petr se ptal babičky, kolik je dědečkovi let. Babička mu odpověděla takto: „To víš, už dávno nám není padesát, ale zase nám ještě není osmdesát let. Když vynásobíš součet mého a dědečkova věku jejich rozdílem a k výsledku přičteš oba naše věky, dostaneš 492“. „Aha,“ řekl po chvíli Petr, „tak to je dědečkovi ...“ Kolik let je Petrovu dědečkovi, víte-li, že je starší než Petrova babička?

Michaela Raabová

Z9–I–3

Středem rotačního válce s podstavou o poloměru r a výškou v byl vyvrtán válcový otvor. Objem takto vzniklého „dutého válce“ je poloviční než objem válce původního. Vyjádřete tloušťku stěny dutého válce pomocí r .

Marie Krejčová



Z9–I–4

Minulou divadelní sezónu se prodávaly vstupenky za jednotnou cenu 160 Kč. Pro letošní sezónu se sedadla rozdělila do dvou kategorií. Místa I. kategorie stojí 180 Kč, místa II. kategorie 155 Kč. Pokud jsou všechna sedadla v sále rozprodána, je celková tržba stejná jako při vyprodaném představení loni. Ředitel divadla však není s tímto rozdělením spokojen a pro příští sezónu plánuje změnu: z nejméně atraktivních míst současné II. kategorie vytvoří novou III. kategorii. Aby se tržba za vyprodaný sál nezměnila, rozhodl, že vstupenky budou stát 180 Kč (I. kategorie), 160 Kč (II. kategorie) a 130 Kč (III. kategorie). V jakém poměru budou příští sezónu počty sedadel jednotlivých kategorií?

Libor Šimůnek

Z9–I–5

Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a je o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Ve školním bufetu prodávají čokoládu za 19,50 Kč. Kolik zaplatili kluci za všech pět čokolád dohromady? Kolik stojí jedna čokoláda v obchodě za školou?

Monika Dillingerová

Z9–I–6

V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte bod K , který je vrcholem rovnoběžníku $BCDK$, a bod L , který je vrcholem rovnoběžníku $CDAL$. Ukažte, že přímka KL prochází středem strany AB daného čtyřúhelníku $ABCD$.

Jaroslav Švrček

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Najděte všechna čtyřmístná čísla dělitelná třemi, která po vynásobení číslem 17 dávají součin končící trojčíslím 519.

Libuše Hozová

Z8–I–2

Najděte všechny trojice přirozených čísel menších než 10, jejichž součin je sedminásobkem jejich součtu.

Libuše Hozová

Z8–I–3

Jano si koupil sedmimílové boty. Jeho kamarád Honza z Čech si koupil létající koberec. Potom se oba dva zúčastnili pohádkového dvanáctihodinového závodu. Během závodu měli hlad, a tak se oba dva zastavili na jídlo. Oběma zabrala přestávka na jídlo jednu hodinu. Kdyby se Honza nezastavil po cestě na „vepřo-knedlo-zelo“, předběhl by Jana o 51 kilometrů. Kdyby se Jano nestavil na bryndzové halušky, předběhl by Honzu o 28 kilometrů. Jak daleko od sebe by skončili, kdyby nejedl ani jeden z nich? Kdo z nich by byl první?

Monika Dillingerová

Z8–I–4

V Tramtárii mají pět lékařských fakult, z nichž každá může přijmout do prvního ročníku 200 studentů. Příjímací zkoušky na jednotlivé fakulty se konají v různé dny, proto si studenti mohou podat přihlášku na více škol. Ptali jsme se na jednotlivých fakultách, kolik dostali přihlášek pro rok 2007/08. Získali jsme tyto odpovědi:

1. fakulta: „Dostali jsme pětkrát více přihlášek, než kolik jsme měli volných míst“.
2. fakulta: „U nás počet uchazečů převyšoval kapacitu o 320 %“.
3. fakulta: „Na naši fakultu se hlásilo o 510 uchazečů více, než kolik jsme mohli přijmout“.
4. fakulta: „U nás na každé volné místo připadly v průměru 3 přihlášky“.
5. fakulta: „K nám se hlásilo o tři čtvrtiny zájemců více, než kolik jsme měli míst“.

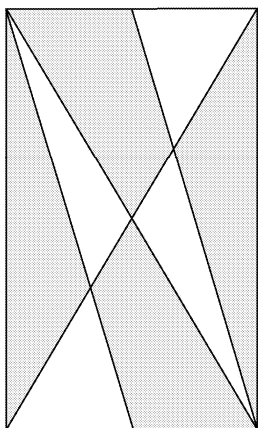
V akademickém roce 2007/08 nakonec na lékařské fakulty nastoupilo do 1. ročníku 1 000 studentů. Ze statistik vyplývá, že zájemce o studium medicíny podal na lékařské fakulty průměrně 2,5 přihlášky. Kolik zájemců se nedostalo na žádnou z fakult?

Libor Šimůnek

Z8–I–5

Pan Poleno s panem Střepinou vyráběli nové domovní dveře o obsahu 3 m^2 . Rám dveří tvaru obdélníku, jeho úhlopříčky a dvě další příčky, které spojovaly dva vrcholy obdélníku se středy protilehlých stran, byly z kovových tyčí. Pan Poleno vyplnil dřevem čtyři tmavé části dveří a pan Střepina zbývající části dveří zasklil. Kolik metrů čtverečních dřeva potřeboval pan Poleno na výplň dveří.

Libuše Hozová

**Z8–I–6**

Král si dal kolem svého čtvercového pozemku vykopat 2 metry široký a 4 metry hluboký příkop. Vykopáním příkopu se velikost jeho pozemku zmenšila o $1\,200 \text{ m}^2$.

- Jaká je nyní výměra královského pozemku?
- Kolik litrů vody je v příkopu, když ho král dal naplnit do tří čtvrtin?

Miroslava Smítková

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Číslo je *trochu nešťastné*, je-li násobkem čísla 13. Číslo, které je násobkem čísla 17, se nazývá *trochu usměvavé*. Kolik existuje čísel mezi přiroze-

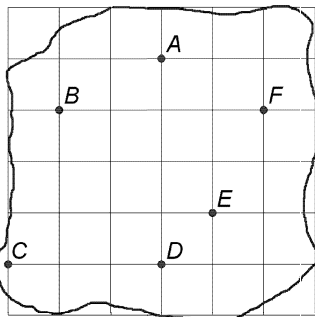
nými čísly od 1 do 1 000 000, která nekončí nulou ani pětkou a jsou přitom zároveň trochu nešťastná a trochu usměvavá?

Marta Volfová

Z7–I–2

Vláda země Tramtárie se rozhodla, že své území rozdělí do šesti okresů. Vybrala proto šest nejvýznamnějších měst a každému chce přiřadit okres podle následujícího klíče: každé místo v zemi patří do okresu toho města, které je danému místu nejbližší. Překreslete si ve vhodném měřítku mapu Tramtárie a narýsujte do ní hranice okresů. (Okresní města jsou označena písmeny $A - F$, silná čára značí hranice Tramtárie. Pomyslná čtvercová síť má pouze usnadňovat orientaci v mapě a nijak neovlivňuje hranice okresů!)

Libor Šimůnek



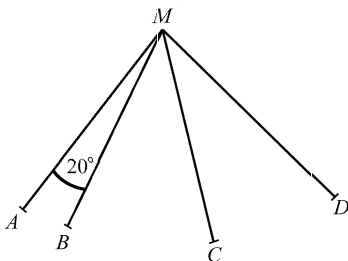
Z7–I–3

Ve 12 hodin stála na parkovišti česká, německá a francouzská auta, a to v poměru 9:4 (česká ku německým) a 2:3 (německá ku francouzským). Během hodiny odjelo jedenáct a přijelo pět českých aut, odjelo jedno a přijelo jedenáct německých aut a odjela tři a přijelo šest francouzských aut. Jaký je poměr českých, německých a francouzských aut ve 13:00 na parkovišti, když ve 12:00 tam bylo dvanáct francouzských aut?

Šárka Ptáčková

Z7–I–4

Shodné úsečky AM , BM , CM a DM jsou uspořádané jako na obrázku. Jednotlivé dvojice těchto úseček svírají úhly o velikostech 20° , 20° , 50° , 50° , 70° a α ($\alpha \leq 180^\circ$). Jaká je velikost úhlu, který svírají přímky AB a CD ? (Obrázek je nepřesný, nevyplatí se měřit.)



Michaela Raabová

Z7–I–5

Políčka na šachovnici 4×4 vybarvi 4 barvami a vepiš do nich 4 písmena J, A, R, O tak, aby v každém řádku a každém sloupci byly zastoupeny všechny barvy i všechna písmena. (Každé políčko bude obsahovat právě jedno písmeno a bude vybarveno jednou barvou. Každé písmeno musí být vybarveno postupně všemi barvami a také každá barva musí vystřídat všechna písmena.) Najdi aspoň jedno řešení.

Marta Volfová

Z7–I–6

Na papíře je napsáno několik bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel. Je mezi nimi 12 násobků čísla 5 a 10 násobků čísla 7.

- Kolik přirozených čísel je na papíře napsáno?
- Najdi jednu řadu čísel, která odpovídá těmto podmínkám.

Libor Šimůnek

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 135 a 136, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle aktuálního (16.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 135

Nechť a , b , c a d jsou obvykle označené délky stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a e , f délky jeho úhlopříček AC a BD . Dokažte, že platí

$$(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Pro jaké konvexní čtyřúhelníky nastane rovnost?

Radek Horenský

Řešení:

Uvažujme posunutí, které zobrazí bod D na bod B . Označme A' a C' po řadě obrazy bodů A , C v tomto posunutí. Platí tak $|AB| = a$, $|A'B| = |AD| = d$, $|C'B| = |CD| = c$, $|CB| = b$ (obr. 1). Čtyřúhelník $AA'C'C$ je rovnoběžník v němž platí $|AC| = |A'C'| = e$, $|AA'| = |CC'| = f$. Pro úhly ACC' a CAA' přitom platí $\cos |\angle ACC'| = -\cos |\angle CAA'|$. Podle kosinové věty je

$$\begin{aligned} |AC'|^2 &= |AC|^2 + |CC'|^2 - 2|AC| \cdot |CC'| \cdot \cos |\angle ACC'|, \\ |A'C|^2 &= |AC|^2 + |AA'|^2 - 2|AC| \cdot |AA'| \cdot \cos |\angle CAA'|. \end{aligned}$$

Sečtením obou vztahů dostaneme

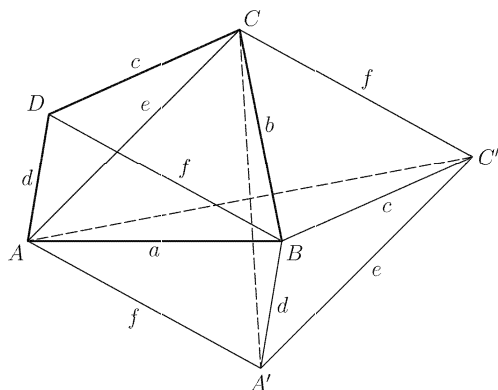
$$|AC'|^2 + |A'C|^2 = 2(e^2 + f^2).$$

Jelikož $2(e^2 + f^2) = (e + f)^2 + (e - f)^2$ a číslo $(e - f)^2$ je nezáporné, platí nerovnost

$$(e + f)^2 \leq |AC'|^2 + |A'C|^2.$$

Rovnost v ní nastane, právě když $e = f$. Užitím trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelníky ABC' a $A'BC$ dostaneme

$$|AC'| \leq |AB| + |C'B| = a + c \quad \text{a} \quad |A'C| \leq |A'B| + |CB| = d + b.$$



Obr. 1

Rovnost v těchto nerovnostech nastane pouze v případech, kdy body A, B, C' , resp. A', B, C leží na jedné přímce. Spojením posledních tří nerovností získáme dokazovanou nerovnost

$$(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2,$$

přičemž rovnost v ní nastane, právě když bod B je průsečíkem úhlopříček rovnoběžníku $AA'C'C$ se shodnými stranami. Tato situace nastane, právě když čtyřúhelník $ABCD$ má shodné úhlopříčky a dvojice protilehlých stran, tedy právě když $ABCD$ je pravoúhelník (obdélník nebo čtverec).

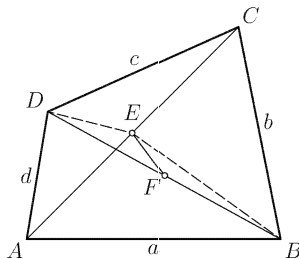
Jiné řešení (podle Jozefa Mészárose)

Označme E, F po řadě středy úhlopříček AC a BD (obr. 2). Pro délky těžnic BE a DE po řadě v trojúhelnících ABC a ACD platí

$$\begin{aligned} |BE|^2 &= \frac{1}{2} (|AB|^2 + |BC|^2) - \frac{1}{4} |AC|^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} e^2, \\ |DE|^2 &= \frac{1}{2} (|AD|^2 + |DC|^2) - \frac{1}{4} |AC|^2 = \frac{1}{2} (d^2 + c^2) - \frac{1}{4} e^2. \end{aligned}$$

Sečtením těchto vztahů dostaneme

$$|BE|^2 + |DE|^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2).$$



Obr. 2

Pro délku těžnice $|EF|$ trojúhelníku BDE platí

$$|EF|^2 = \frac{1}{2} (|BE|^2 + |DE|^2) - \frac{1}{4} |BD|^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2) - \frac{1}{4} f^2.$$

Jelikož $|EF|^2$ je nezáporné číslo, dostaneme úpravou předcházejícího vztahu

$$e^2 + f^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

přičemž rovnost nastává, právě když $E = F$, tedy právě když $ABCD$ je rovnoběžník.

Podle Ptolemaiovy nerovnosti pro čtyřúhelník $ABCD$ dále platí

$$ef \leq ac + bd,$$

přičemž rovnost nastává, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ tětiový. Přičtením dvojnásobku tohoto vztahu k předcházející nerovnosti získáme

$$e^2 + 2ef + f^2 \leq a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2,$$

což po úpravě dává dokazovanou nerovnost

$$(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Rovnost nastává, právě když je $ABCD$ tětiový rovnoběžník, tedy právě když $ABCD$ je pravoúhelník.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5 a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Neúplné řešení zaslali: *Vladimír Pavel* z Blovic a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 136

Dokažte, že neexistuje reálné číslo c , pro které by čísla

$$x_1 = (c-1)(c-2)\dots(c-2006), \quad x_2 = (c+1)(c+2)\dots(c+2006)$$

byla kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + (c^2 - 1^2)(c^2 - 2^2)\dots(c^2 - 2006^2) = 0.$$

Jaroslav Zhouf

Řešení:

Uvažujme polynom

$$P(c) = (c+1)(c+2)\dots(c+2006)$$

s kladnými (celočíselnými) koeficienty. Jelikož 2006 je sudé číslo, platí

$$P(-c) = (-c+1)(-c+2)\dots(-c+2006) = (c-1)(c-2)\dots(c-2006).$$

Polynom $P(c) + P(-c)$ je sudá funkce a jeho koeficienty jsou dvojnásobky koeficientů polynomu $P(c)$ u sudých mocnin proměnné c , tedy kladná čísla. Proto pro všechna reálná čísla c platí

$$0 < P(c) + P(-c) = x_1 + x_2.$$

Podle vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice budou čísla x_1 a x_2 pro nějaké reálné číslo c kořeny dané kvadratické rovnice, právě když $x_1 + x_2 = 0$, což ale není možné.

Neexistuje tedy reálné číslo c , pro které by čísla x_1 a x_2 byla kořeny dané kvadratické rovnice.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozsef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.