

MATEMATIKA

O goniometrických identitách

LEV KURLIANDČIK – JAROSLAV ŠVRČEK

Uniwersytet M. Kopernika, Toruń, POLSKO – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V tomto článku se budeme zabývat využitím důležitých trigonometrických identit při řešení algebraických úloh, v nichž jako jedna z podmínek pro neznámé x, y, z figuruje některá z následujících algebraických rovností:

$$xy + yz + zx = 1, \quad x + y + z = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$$

Mezi uvedené typy úloh patří (kromě jiných) následující čtyři příklady.

Příklad 1

Nechť x, y, z jsou nezáporná reálná čísla, pro něž platí $xy + yz + zx = 1$. Dokažte, že platí rovnost

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz.$$

Příklad 2

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = xyz,$$

$$3 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 4 \left(y + \frac{1}{y} \right) = 5 \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Příklad 3

Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla taková, že $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Dokažte, že platí nerovnost

$$2(x + y + z) \leq 3.$$

Příklad 4

Nechť kladná reálná čísla x, y, z splňují podmínku

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz.$$

Pak platí nerovnost

$$xyz \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy platí rovnost.

Na první pohled se může zdát, že uvedené úlohy jsou naprosto odlišné. V další části však uvidíme, že k jejich řešení lze využít též prostředek, kterým jsou trigonometrické substituce. Tímto způsobem můžeme vyřešit mnoho dalších úloh. Dříve než se zaměříme na řešení úvodních čtyř úloh, uvedeme následující tvrzení.

Věta 1

Jestliže reálná čísla x, y, z vyhovují podmínce $xy + yz + zx = 1$, pak existují reálná čísla α, β, γ taková, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, kde $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Důkaz. Platí-li pro reálná čísla x, y, z rovnost $xy + yz + zx = 1$, pak nutně $x + y \neq 0$. V opačném případě by bylo $xy = 1$, což je v rozporu s rovností $x + y = 0$. Je tudíž

$$z = \frac{1 - xy}{x + y}.$$

Položme dále $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, kde $\alpha, \beta \in (-\pi; \pi)$. Pak platí

$$z = \frac{1 - xy}{x + y} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \cot g \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Platí tedy $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, tj. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. ■

Řešení příkladu 1. Položme

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \langle 0; \pi \rangle.$$

Pak platí

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

a analogicky pro y a z . Odtud dále plyne

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma. \quad (1)$$

a

$$\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma. \quad (2)$$

Protože však platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \sin(\alpha + \beta) \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \sin \gamma \frac{(-\sin \alpha) \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta (-\cos \gamma)} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned}$$

Využitím vztahů (1) a (2) v předchozí rovnosti dostaneme po snadné úpravě přímo žádanou identitu pro reálná čísla x, y, z . Tím je úloha vyřešena.

Věta 2

Vyhovují-li nenulová reálná čísla x, y, z podmínce $x + y + z = xyz$, pak existují reálná čísla α, β, γ taková, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, přičemž $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, $z = \operatorname{tg} \gamma$.

Důkaz. Platí-li pro nenulová reálná čísla x, y, z rovnost $x + y + z = xyz$, je nutně $xy \neq 1$. V opačném případě by bylo $x + y = 0$, což však není možné. Odtud plyne

$$z = \frac{x + y}{xy - 1}.$$

Položme nyní $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, kde $\alpha, \beta \in (-\frac{1}{2}\pi; 0) \cup (0; \frac{1}{2}\pi)$. Pak platí

$$z = \frac{x + y}{xy - 1} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi - (\alpha + \beta)).$$

Platí tedy $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, tj. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. ■

Řešení příkladu 2. Ze zadání plyne, že $xyz \neq 0$. Dále vidíme, že reálná čísla x, y, z mají stejná znaménka, tj. jsou buď všechna kladná, nebo všechna záporná. Navíc, pokud nějaká trojice (x, y, z) nenulových reálných čísel vyhovuje dané soustavě rovnic, vyhovuje jí rovněž trojice $(-x, -y, -z)$. Stačí se proto omezit na případ, kdy x, y, z jsou kladná reálná čísla.

Položme nyní

$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta, \quad z = \operatorname{tg} \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0; \tfrac{1}{2}\pi), \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Ze zadání úlohy dále vyplývá

$$\frac{x}{3(1+x^2)} = \frac{y}{4(1+y^2)} = \frac{z}{5(1+z^2)}$$

a (s ohledem na použité substituce) odtud dále plyne

$$\frac{\sin 2\alpha}{3} = \frac{\sin 2\beta}{4} = \frac{\sin 2\gamma}{5}.$$

Protože $(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = \pi$ a současně

$$\sin(\pi - 2\alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(\pi - 2\beta) = \sin \beta, \quad \sin(\pi - 2\gamma) = \sin \gamma$$

plyne dále (ze sinové věty), že $\pi - 2\alpha$, $\pi - 2\beta$ a $\pi - 2\gamma$ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, jehož délky stran jsou úměrné po řadě velikostem 3, 4

a 5. Takový trojúhelník je ale pravoúhlý a pro velikosti jeho vnitřních úhlů platí

$$\pi - 2\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin 2\beta = \frac{4}{5}.$$

Protože $\pi - 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$ a $\pi - 2\beta < \frac{1}{2}\pi$, platí $2\alpha > \frac{1}{2}\pi$ a $2\beta > \frac{1}{2}\pi$, a proto je $\cos 2\alpha < 0$, $\cos 2\beta < 0$. Platí tedy

$$x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 3,$$

$$y = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 2, \quad z = \operatorname{tg} \gamma = 1.$$

Odtud plyne, že daná soustava rovnic má právě dvě řešení v oboru reálných čísel, kterými jsou trojice $(3, 2, 1)$ a $(-3, -2, -1)$.

Věta 3

Jestliže kladná reálná čísla x, y, z vyhovují podmínce $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, pak existují kladná reálná čísla α, β a γ taková, že $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, kde $x = \cos \alpha$, $y = \cos \beta$ a $z = \cos \gamma$, tj. α, β a γ jsou vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku

Důkaz. Položme nyní $x = \cos \alpha$, $y = \cos \beta$, kde $\alpha \in (0; \frac{1}{2}\pi)$. Nechť dále $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, kde $\gamma \in (0; \frac{1}{2}\pi)$. Nyní dokážeme, že platí rovnost

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} + \frac{\cos 2\beta + 1}{2} + \frac{\cos 2\gamma + 1}{2} + 2 \cos \alpha \cos \beta \left(-\cos(\alpha + \beta) \right) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = \\ &= \frac{3}{2} + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = \end{aligned}$$

$$= 1 + \cos(\alpha + \beta) \left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \right) = 1.$$

Proto platí také rovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

tj.

$$z^2 + 2z \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Odtud po snadné úpravě dostaneme

$$(z - \cos \gamma)(z + \cos \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta) = 0,$$

a tedy $z = \cos \gamma$, neboť $z + \cos \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \neq 0$. ■

Řešení příkladu 3. Položme zde

$$x = \cos \alpha, \quad y = \cos \beta, \quad z = \cos \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0; \tfrac{1}{2}\pi), \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Nyní nám stačí dokázat, že platí nerovnost $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$. Vzhledem k tomu, že funkce $f(t) = \cos t$ je na intervalu $(0; \frac{1}{2}\pi)$ konkávní, platí podle Jensenovy nerovnosti (viz např. [4])

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3 \cos \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

Poznamenejme ještě, že výše uvedenou nerovnost lze dokázat také bez použití Jensenovy nerovnosti, pouze užitím součtovým goniometrických vzorců.

Rovnost zde nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}\pi$, tj. právě když platí $x = y = z = \frac{1}{2}$. Tím je úloha vyřešena.

Věta 4

Vyhovují-li kladná reálná čísla x, y, z podmínce

$$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz,$$

pak existují kladná reálná čísla α, β, γ , pro něž platí $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, kde $x = \cos \frac{\alpha}{2}$, $y = \cos \frac{\beta}{2}$, $z = \cos \frac{\gamma}{2}$, tj. α, β a γ jsou vnitřní úhly v trojúhelníku.

Důkaz. Položme $x = \cos \frac{\alpha}{2}$, $y = \cos \frac{\beta}{2}$, kde $\alpha, \beta \in (0; \pi)$. Nechť dále $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Nejprve dokážeme následující trigonometrickou identitu

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\beta}{2}} + \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \\ = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\beta}{2}} + \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \\ = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) \right) = \\ = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \\ = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$z \sqrt{1 - z^2} - \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = 2z \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Nechť $z = \cos \frac{\varphi}{2}$, kde $\varphi \in (0; \pi)$. Ukážeme, že nutně $\varphi = \gamma$.

Platí

$$\begin{aligned} z \sqrt{1 - z^2} - \cos \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2} (\sin \varphi - \sin \gamma) = \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} \cos \frac{\varphi + \gamma}{2} = \\ = 2 \sin \frac{\varphi - \gamma}{4} \cos \frac{\varphi - \gamma}{4} \cos \frac{\varphi + \gamma}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Na druhé straně pak platí

$$2z \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \right) = \\ - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{4} \sin \frac{\varphi + \gamma}{4}. \quad (4)$$

Porovnáním pravých stran vztahů (3) a (4) vidíme, že nutně platí $\varphi = \gamma$. ■

Řešení příkladu 4. Položíme-li

$$x = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad y = \cos \frac{\beta}{2}, \quad z = \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi), \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

je nutno s ohledem na tvrzení věty 4 dokázat nerovnost

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro trojici $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\beta}{2}$ a $\cos \frac{\gamma}{2}$ kladných reálných čísel a dále použitím Jensenovy nerovnosti pro konkávní funkci $f(t) = \cos \frac{t}{2}$ na intervalu $(0; \pi)$ obdržíme postupně

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{3} \right)^3 \leq \left(\cos \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \right)^3 = \\ = \cos^3 \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{6} \right) = \cos^3 \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Rovnost zde nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, tj. právě když $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tím je úloha úplně vyřešena.

Z řešení všech čtyř uvedených úloh je patrné, že v každé z nich byly uplatněny vhodné goniometrických substituce, které figurovaly současně

vždy v některé z významných trigonometrických identit (věty 1 – 4). Analogickým způsobem lze řešit poměrně široké spektrum algebraických úloh s příbuznou tematikou. Závěrem předkládáme našim čtenářům (a dalším zájemcům o tuto problematiku) ještě čtyři obtížnější úlohy, které poslouží k procvičení dané problematiky.

Příklad 5

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z , která splňují podmínku $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ platí nerovnosti

$$1 < x + y + z + xyz \leq \frac{13}{8}.$$

Příklad 6

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= 1, \\ \frac{1 - x^2}{1 + x^2} &= \frac{2y}{1 + y^2} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}. \end{aligned}$$

Příklad 7

Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla taková, že $xy + yz + zx = 1$. Pak platí nerovnost

$$\frac{2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} + \frac{2y(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2} + \frac{2z(1 - z^2)}{(1 + z^2)^2} \leq \frac{x}{1 + x^2} + \frac{y}{1 + y^2} + \frac{z}{1 + z^2}.$$

Dokažte.

Příklad 8

Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla taková, že $xy + yz + zx = 1$. Dokažte, že platí nerovnost

$$x + y + z + xyz \geq \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

Literatura

- [1] *Kourliandtchik, L. – Molnár, J. – Švrček, J. – Uscki, M.*: Matematyka jest jedna całość. Miniatury matematyczne 14, Aksjomat, Toruń 2004.
- [2] *Kourliandtchik, L.*: Impresje liczbowe. Tutor, Toruń 2001.
- [3] *Švrček, J.*: Goniometrické substituce. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 10 (2000/01), č. 10, s. 577-582.
- [4] *Švrček, J.*: Odhady goniometrických výrazů. Matematika a fyzika ve škole, roč. 10. (1980), č. 8.
- [5] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha 1988.

Malá Fermatova věta a pár úloh na dělitelnost

EMIL CALDA

Matematicko–fyzikální fakulta UK, Praha

„Malá“ Fermatova věta není tak známá jako její slavný protějšek – „velká“ Fermatova věta. Při řešení řady úloh, týkajících se dělitelnosti celých čísel, je však velmi užitečná, jak ukážeme v tomto článku. Abychom při jejím důkazu příliš neodbočovali, dokážeme nejprve následující větu:

Věta 1

Je-li p prvočíslo, jsou všechna kombinační čísla $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \dots, \binom{p}{p-1}$ dělitelná p .

Důkaz. Je-li p prvočíslo a k přirozené číslo menší než p , plyne z definice kombinačního čísla

$$k! \binom{p}{k} = p(p-1)(p-2) \dots (p-k+1).$$

Protože součin na pravé straně této rovnosti je dělitelný číslem p , je tímto číslem dělitelný i součin $k! \binom{p}{k}$. Odtud plyne, že číslem p musí být dělitelné

i kombinační číslo $\binom{p}{k}$, neboť všichni činitelé v součinu $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ jsou menší než p , takže žádný z nich (a tedy ani jejich součin) číslem p dělitelný není. Tím je důkaz ukončen.

Nyní vyslovíme a dokážeme ještě jedno tvrzení, z něhož (jak dále uvidíme) bezprostředně vyplývá malá Fermatova věta.

Věta 2

Číslo $a^p - a$, kde a je libovolné celé číslo a p prvočíslo, je dělitelné p .

Důkaz. Nejprve dokážeme, že uvedená věta platí pro všechna a přirozená. Tvrzení dokážeme užitím principu matematické indukce vzhledem k a . Pro $a = 1$ tvrzení evidentně platí. Předpokládejme nyní, že dané tvrzení platí pro určité a přirozené a ukážeme, že tvrzení platí i pro $a + 1$. To je však velmi snadné, neboť podle indukčního předpokladu a dále věty 1 platí

$$\begin{aligned}(a+1)^p - (a+1) &= \left[a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1} a + 1 \right] - (a+1) = \\ &= (a^p - a) + \left[\binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} a \right].\end{aligned}$$

Dané tvrzení platí také pro $a = 0$. Zbývá tedy dokázat větu pro všechna záporná celá čísla a . Je-li však a celé záporné, je $-a$ přirozené číslo, takže podle výše dokázaného je číslo $(-a)^p - (-a)$ dělitelné prvočíslem p . Pro $p \neq 2$ ale platí

$$(-a)^p - (-a) = -a^p + a = -(a^p - a),$$

což znamená, že číslo $-(a^p - a)$, a tudíž i číslo $a^p - a$, kde a je celé záporné číslo a $p \neq 2$, je dělitelné prvočíslem p . Číslo $a^2 - a$ je však dělitelné prvočíslem 2, neboť $a^2 - a = a(a-1)$. Tím je důkaz dokončen.

Věta 3 (malá Fermatova věta)

Číslo $a^{p-1} - 1$, kde p je prvočíslo a a celé číslo nesoudělné s p , je dělitelné p .

Důkaz. Podle věty 2 je číslo $a^p - a$ dělitelné prvočíslem p pro každé celé číslo a . Protože však $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$, kde a je nesoudělné s prvočíslem p , musí být číslo $a^{p-1} - 1$ dělitelné prvočíslem p , což jsme měli dokázat.

Poznámka. Malou Fermatovu větu jsme odvodili jako důsledek věty 2. Není však žádný problém ukázat, že také obráceně z malé Fermatovy věty plyne, že pro každé celé číslo a , které je nesoudělné s prvočíslem p , je $a^p - a$ dělitelné prvočíslem p . Je-li totiž $a^{p-1} - 1$ dělitelné prvočíslem p (pro každé celé číslo a nesoudělné s prvočíslem p , je číslo $a(a^{p-1} - 1) = a^p - a$ dělitelné p . Obě tvrzení jsou tedy ekvivalentní.

Důsledek 1

Protože každé z čísel $2, 3, 4, \dots, p-1$ je nesoudělné s prvočíslem 2 , je podle věty 3 každé z čísel

$$2^{p-1} - 1, 3^{p-1} - 1, 4^{p-1} - 1, \dots, (p-1)^{p-1} - 1$$

dělitelné prvočíslem p . Je tedy prvočíslem p dělitelný i součet těchto $(p-2)$ čísel, tj.

$$\begin{aligned} & (2^{p-1} - 1) + (3^{p-1} - 1) + \dots + [(p-1)^{p-1} - 1] = \\ & = 2^{p-1} + 3^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} - (p-2) = \\ & = 1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} - (p-1). \end{aligned}$$

Snadno se vidí, že poslední výraz je dělitelný prvočíslem p i pro $p=2$. Tím jsme dokázali, že součet

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1} - (p-1),$$

kde p je prvočíslo, je dělitelný p .

Důsledek 2

Nechť p je liché prvočíslo, pak číslo $2^{p-1} - 1$ je dělitelné p .

Dříve, než ukážeme využití uvedených výsledků při řešení konkrétních úloh, připomeňme, že pro libovolná celá čísla a, b a n přirozené platí rovnost $a^n - b^n = (a - b) \cdot k$, kde k je kladné celé číslo.

Příklad 1

Dokažte, že $97^{100} - 47^{100}$ je dělitelné číslem 5 050.

Řešení: Dané číslo je dělitelné padesáti, neboť $97^{100} - 47^{100} = (97 - 47)k = 50k$, kde k je celé číslo. Dále ukážeme, že dané číslo je dělitelné rovněž číslem 101. Všimněme si, že 101 je prvočíslo, které je nesoudělné s čísly 97 a 47. Podle malé Fermatovy věty je tedy každé z čísel $97^{100} - 1$ a $47^{100} - 1$ dělitelné prvočíslem 101, takže je tímto číslem dělitelný i jejich rozdíl

$$(97^{100} - 1) - (47^{100} - 1) = 97^{100} - 47^{100}.$$

Tím jsme ukázali, že dané číslo je dělitelné součinem $50 \cdot 101 = 5\,050$ (50 a 101 jsou nesoudělná přirozená čísla).

Příklad 2

Dokažte, že pro libovolné celé číslo a je $a^7 - a$ dělitelné číslem 42.

Řešení: Protože 7 je prvočíslo, je podle malé Fermatovy věty číslo $a^6 - 1$ dělitelné sedmi pro všechna celá čísla a , která jsou nesoudělná s prvočíslem 7. Z poznámky za větou 3 dále vyplývá, že číslo

$$a^7 - a = a(a^3 - 1)(a^3 + 1) = a(a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$$

je dělitelné sedmi pro všechna celá čísla a . Součin $a(a - 1)(a + 1)$ je však (pro libovolné a celé) dělitelný dvěma i třemi, neboť se jedná o součin tří po sobě jdoucích celých čísel.

Tím jsme ukázali, že číslo $a^7 - a$ je pro všechna a celé dělitelné součinem $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Příklad 3

Dokažte, že $a^{1105} - a$ je pro všechna celá čísla a dělitelné číslem 1105.

Řešení: Protože $1105 = 5 \cdot 221 = 5(15^2 - 2^2) = 5 \cdot 13 \cdot 17$, ukážeme, že daný výraz je pro každé celé číslo a dělitelný prvočísly 5, 13 a 17.

K důkazu toho, že číslo $a^{1105} - a$ je pro libovolné a celé dělitelné pěti, stačí ukázat, že číslo $a^{1104} - 1$ je dělitelné pěti pro každé celé číslo a nesoudělné s pěti. Podle malé Fermatovy věty je číslo $a^4 - 1$ dělitelné pěti pro každé a celé nesoudělné s pěti, a tudíž i číslo

$$a^{1104} - 1 = (a^4)^{276} - 1 = (a^4 - 1)k,$$

kde k je celé číslo, je dělitelné pěti pro každé celé číslo a nesoudělné s pěti.

Podobně lze postupovat i při důkazu toho, že číslo $a^{1105} - a$ je dělitelné třinácti, resp. sedmnácti pro všechna celá čísla a . Využijeme přitom vztahů

$$a^{1104} - 1 = (a^{12})^{92} - 1 = (a^{12} - 1)l,$$

resp.

$$a^{1104} - 1 = (a^{16})^{69} - 1 = (a^{16} - 1)m,$$

kde l, m jsou celá čísla.

Tím jsme dokázali, že číslo $a^{1105} - a$ je pro všechna celá čísla a dělitelné součinem $5 \cdot 13 \cdot 17 = 1105$.

Příklad 4

Nechť a, b jsou celá čísla. Je-li součet $a^2 + b^2$ dělitelný sedmi, jsou tímto prvočíslem dělitelná obě čísla a i b . Dokažte.

Řešení: Uvedené tvrzení (ve tvaru implikace) dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že číslo $a^2 + b^2$ je dělitelné sedmi a přitom aspoň jedno z čísel a, b není sedmi dělitelné.

Vzhledem k tomu, že není možné, aby součet $a^2 + b^2$ byl dělitelný sedmi a přitom právě jedno z čísel a, b bylo také dělitelné sedmi, můžeme dále předpokládat, že ani jedno z čísel a, b není dělitelné sedmi. Z tohoto předpokladu odvodíme spor. Podle malé Fermatovy věty platí: Jsou-li a, b libovolná celá čísla, která jsou nesoudělná s prvočíslem 7, jsou tímto prvočíslem dělitelná čísla $a^6 - 1$, $b^6 - 1$ a také jejich součet

$$(a^6 - 1) + (b^6 - 1) = a^6 + b^6 - 2 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - 2.$$

To však není možné. Podle našeho předpokladu je totiž součet $a^2 + b^2$ dělitelný sedmi. Potom však výraz $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - 2$ sedmi dělitelný být nemůže, což je spor.

Pokud je tedy součet $a^2 + b^2$ dělitelný sedmi, je rovněž každé z celých čísel a, b je dělitelné sedmi. Tím je důkaz uzavřen.

56. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

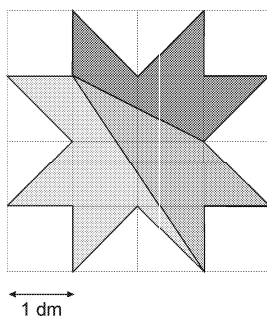
KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Lukáš natíral laťkový plot. Každých 10 minut natřel 8 latěk. Jeho mladší bratr Ondra mu chvilku pomáhal, takže byl Lukáš hotov o čtvrt hodiny dříve, než předpokládal. Jak dlouho mu Ondra pomáhal, když natřel každých 7 minut 4 latky?

Michaela Raabová

Z6–I–2



Hvězda na obrázku je rozdělena dvěma úsečkami na tři díly. Zjisti obsah každého z nich.

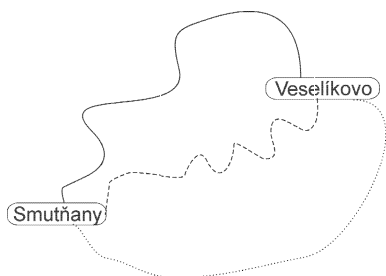
Libor Šimůnek

Z6–I–3

Vícemístné číslo se nazývá *optimistické*, jestliže jeho číslice zleva doprava rostou. Jestliže však číslice čísla zleva doprava klesají, říkáme, že je toto číslo *pesimistické*. Součet sedmimístného pesimistického a sedmimístného optimistického čísla, která jsou zapsána týmiž číslicemi, je 11001000. Které číslice jsme použili na zápis těchto dvou čísel?

Světlana Bednářová

Z6–I–4



Ze Smutňan do Veselíkova vedou tři cesty. Ta, která je na mapě vyznačena plnou čarou, měří 40 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 80 km/h a vybírá se na ní mýtné 50 Kč. Čárkovaná cesta je dlouhá 35 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 60 km/h a mýtné je 150 Kč. Na tečkované cestě, která je dlouhá 45 km, se vybírá mýtné 100 Kč a nejvyšší povolená rychlost je 100 km/h. Strýček Uspěchaný a tetička Spořivá se chtějí dostat ze Smutňan do Veselíkova, strýček co nejdříve, tetička co nejlevněji. Oba si zavolali taxi, jehož řidiči si účtují 15 Kč za kilometr cesty a zaplacení mýtného.

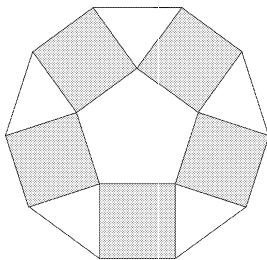
- Kterou cestu má vybrat taxikář strýčka Uspěchaného?
- Kterou cestu má vybrat taxikář tetičky Spořivé?
- O kolik minut bude kratší cesta strýčka Uspěchaného v porovnání s cestou tetičky?
- O kolik korun zaplatí strýček víc než tetička?

Světlana Bednářová

Z6–I–5

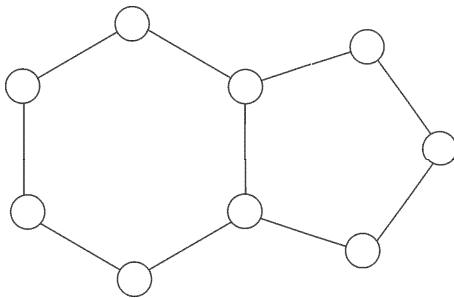
Naše třída plánovala turistický výlet. Jednotlivé skupiny myslely, že jeho délka bude 28, 16, 32, 37 a 15 kilometrů. Spletly se ale o 5, 7, 8, 9 a 14 kilometrů. Jak dlouhý byl výlet?

Marta Volfová

Z6–I–6

Ze shodných čtverců a rovnoramenných trojúhelníků jsme složili (bez překrývání) útvar znázorněný na obrázku. Zjisti velikosti vnitřních úhlů těchto rovnoramenných trojúhelníků.

Světlana Bednářová

KATEGORIE Z5**Z5–I–1**

Šestiúhelník a pětiúhelník mají společnou stranu se dvěma vrcholy. Doplň do všech vrcholů obou obrazců čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby součet čísel v šestiúhelníku i v pětiúhelníku byl 24. Každé číslo použij právě jednou. Stačí, když najdeš aspoň jedno řešení.

Libuše Hozová

Z5–I–2

Cyklistického závodu Tour de Lhota se zúčastnila šestičlenná družstva. V prvních deseti etapách závod nikdo nevzdal. V jedenácté etapě po hromadném pádu odstoupilo 17 cyklistů a v každé další etapě pak jich odstoupilo vždy o 3 méně než v předešlé etapě. Do cíle závěrečné 15. etapy dojelo 53 cyklistů. Kolik družstev se zúčastnilo závodu?

Šárka Ptáčková

Z5–I–3

Cvičená blecha Hopsalka stála na hodinách na čísle 12. Hrála s Vaškem následující hru: Vašek házel kostkou. Kolik ok mu padlo, o tolik čísel poskočila. Po prvním hodu skočila po směru chodu hodinových ručiček, po druhém hodu proti směru hodinových ručiček a po třetím hodu opět po směru hodinových ručiček. Víme, že Vaškovi padla oka 2, 5 a 6, ale nevíme, v jakém pořadí. Na která čísla mohla Hopsalka doskočit po třetím skoku?

Libuše Hozová

Z5–I–4

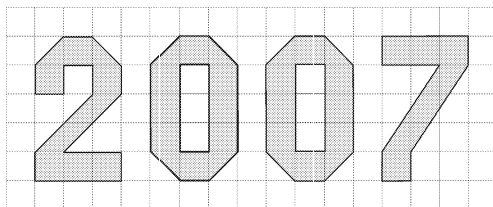
Pomocí číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a pomocí dvou desetinných čárek utvoř dvě desetinná čísla tak, aby jejich součet byl co nejmenší. Najdi všechny možnosti. (Každou číslici použij právě jednou.)

Světlana Bednářová

Z5–I–5

Sedm trpaslíků sbíralo hříbky. V košíčkách měli 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hříbků. Sněhurka chtěla stejný počet hříbků na polévku jako na smažení i jako na usušení. Jak rozdělili trpaslíci své košíčky do tří skupin tak, aby počet hříbků v každé skupině byl stejný? (Trpaslíci nesměli hříbky z košíčků vytahovat.)

Šárka Ptáčková

Z5–I–6

Lucka vystříhovala ze čtverečkováného papíru číslice 2, 0, 0, 7 tak, jak je naznačeno na obrázku. Urči obsah vystřižených číslic, je-li strana čtverečku sítě dlouhá 4 cm.

Michaela Raabová

Zajímavé matematické úlohy

Otevíráme 14. ročník naší pravidelné řešitelské rubriky „Zajímavé matematické úlohy“. V každém ročníku bylo dosud publikováno vždy deset úloh. V předchozích číslech našeho časopisu tak najdete již 130 zajímavých úloh.

Řešení první dvojice úloh nového ročníku můžete zaslat nejpozději do 20. 10. 2006 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 131

V trojúhelníku ABC při obvyklém označení stran, úhlů a výšek platí rovnost

$$\frac{1}{v_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

právě když jeden z úhlů γ , $|\alpha - \beta|$ má velikost 90° . Dokažte

Jaromír Šimša

Úloha 132

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

Jaroslav Švrček