

INFORMATIKA

Rozklady složených čísel

REDAKCE

Nejednou jsme už připomněli, že při výuce programování je vhodné zabývat se i analýzou hotových programů, a to jak dobrých, tak špatných, tak i takových, které v podstatě dobře plní svůj úkol, ale ve smyslu věcném nebo formálním (styl programování nebo zápisu zdrojového textu) nejsou dotaženy do zcela uspokojivého stavu. S takovými programy mají studenti často snadnou možnost se seznámit – stačí, když si spolu vymění své připravované programy. Někdy by se mohlo zdát, že drobné zrychlení práce programu nebo drobné grafické zjednodušení zápisu programu není příliš významné, takže ani nemá smysl se tím zabývat. Je to ovšem dobrý trénink pro práci na rozsáhlých SW systémech, kde je každé zrychlení podstatné a kde je z hlediska údržby systému nezbytné dodržovat (ve firmě stanovený) styl zápisu programů resp. programování.

Předvedeme si ukázky řešení této úlohy: *Dané přirozené číslo n (v programech je nazváno *Cis* a pracuje se s ním v rozsahu Longint) máme rozložit na součin prvočísel*; např. $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, $17 = 17$. Úlohu řešili i dva žáci jednoho gymnázia v Sarajevu (Bosna a Hercegovina) [1], jejichž programy dále uvádíme. Abychom je učinili čtivější pro naše čtenáře, upravili jsme formu zápisu zdrojového textu programů a označení některých proměnných. Můžete se přesvědčit, že oba programy dávají dobré výsledky pro čísla od 2 do 2 147 483 646 v čase závislém na velikosti největšího faktoru rozkladu (při zadání čísla 1 však hlásí $1 = 0$).

```
program RozkladyDzenan;  
{Dzenan Zukic}  
var  
  Cis, T, I, K: Longint;
```

```

    Fak: array [1..32] of Longint;
begin
    WriteLn;
    Write('Zadej cislo: ');
    ReadLn(Cis);
    K := 0;
    I := 1;
    T := Cis;
    while (I <= Cis) and (T > 1) do
    begin
        I := I + 1;
        if T mod I = 0 then
            while T mod I = 0 do
            begin
                K := K + 1;
                Fak[K] := I;
                T := T div I
            end
        end;
        WriteLn;
        Write(Cis, '=', Fak[1]);
        for I := 2 to K do
            Write('x', Fak[I]);
        ReadLn
    end.

```

Uvedme nyní program druhého z žáků a pak posoudíme, v čem oba postupovali stejně a v čem se lišili.

```

program RozkladyDamir;
{Damir Zekic}
var
    Cis, T, Soucin, I, J, K: Longint;
    F: array [1..100] of Longint;
function Prvoc(Ci: Longint): Boolean;
var
    Y: Integer;
    Delitelno: Boolean;
begin

```

```

Delitelno := false;
Y := 2;
while (Y <= Trunc(Sqrt(Ci))) and not Delitelno do
begin
    if Ci mod Y = 0 then
        Delitelno := true;
        Y := Y + 1
    end;
    Prvoc := not Delitelno;
    if Ci = 1 then
        Prvoc := false
    end;
begin {program}
    WriteLn;
    Write('Zadej cislo: ');
    ReadLn(Cis);
    I := 2;
    J := 0;
    Soucin := 1;
    T := Cis;
    repeat
        while (T mod I = 0) and Prvoc(I) do
            begin
                J := J + 1;
                T := T div I;
                F[J] := I
            end;
            I := I + 1;
            Soucin := 1;
            for K := 1 to J do
                Soucin := Soucin * F[K]
            until Soucin = Cis;
            WriteLn;
            Write(Cis, '=', F[1]);
            for I := 2 to J do
                Write('x', F[I]);
            ReadLn
        end.

```

Princip obou řešení je stejný: Zadané číslo n postupně dělit dvěma, třemi, ... a v případě, že dělení číslem k vyjde beze zbytku, uloží se dělitel k do pole „faktorů“ a pokračuje se v hledání dalšího dělitele pro číslo n/k . Přitom se zjišťuje, zda nejde o vícenásobnou dělitelnost číslem k . Nakonec se vytiskne výsledek.

V čem jsou rozdíly; posuďte:

a) Dzenan deklaroval pole faktorů číslem 32, Damir číslem 100. Rozhodněte, jaký je účelný rozměr, uvážíme-li že rozkládané číslo se zadává ve formátu Longint.

b) Dzenan končí výpočet, když mu zůstane k dělení číslo 1, Damir tehdy, když součin zjištěných faktorů je roven zadanému číslu. Liší se od sebe jejich poslední dělení?

c) Dzenan dělí postupně všemi čísly $k = 2, 3, 4, \dots$, Damir definuje funkci *Prvoc* a provádí dělení jen tehdy, je-li k prvočíslo. Věcně je to zcela správné, ale je to efektivní? Porovnejte, co je rychlejší, zda (zbytečné) dělení nebo zjišťování, je-li k prvočíslo.

d) Mohla by se funkce *Prvoc* u Damira obejít bez proměnné *Delitelno*?

e) Je v příkazu *while* u Dzenana nezbytná podmínka $I \leq \text{Cis}$?

f) Kde lze v programech uplatnit funkci *Inc*?

g) Jak doplnit programy, aby fungovaly i pro „rozklad“ čísla 1, tj. aby dávaly $1 = 1$ a nikoli $1 = 0$?

h) Rozklad (nahodile zvoleného) čísla 1 258 369 147 trval na jednom konkrétním počítači u Dzenanova programu 10,5 sek, u Damirova 22,5 sek. V čem vidíte příčinu tohoto rozdílu?

i) Doplníte Dzenanův program tak, aby dal správné výsledky i při zadání celého záporného čísla.

j) Upravte Dzenanův program tak, aby po dělení číslem $k = 2$ bylo pak prováděno dělení již jen lichými čísly k .

Vidíme, že nám oba programy poskytly pěkné studijní podklady a že jejich analýza může být pro začínající programátory velmi užitečná.

L i t e r a t u r a

- [1] Rješnja konkursnih zadataka, Informatika. Triangle, Matematički časopis za učenike i nastavnike osnovnih i srednjih škola, serija A, vol. 4 (2000), No. 2, str. 107 – 108.

S inteligentnými kalkulačkami k inteligentnému používaniu matematiky

JOZEF HVORECKÝ

Vysoká škola manažmentu v Trenčíne a University of Liverpool

1. Úvod

Vo svete prebieha tichý zápas o charakter vyučovania matematiky. Jeho cieľom je zlepšiť a zefektívniť vyučovanie matematiky. Jednou z jeho podôb je uplatňovanie výpočtovej techniky pri zatraktívňovaní vyučovacieho procesu a podpore chápania pojmov a metód. Oponenti tvrdia, že žiaci, ktorí budú používať počítače a kalkulačky, nebudú ovládať úpravy aritmetických výrazov a nebudú chápať ich účel a význam. V článku chceme ukázať, že skôr opak je pravdou – odstránením nutnosti vykonávať zdĺhavé a zložité výpočty sa dá získať časový priestor na tvorivé chápanie úloh a cieľov matematiky v reálnom svete.

Zástancovia kladného názoru dostávajú v súčasnosti novú, stále účinnejšiu „príručnú“ zbraň – inteligentné grafické kalkulačky, ktoré sa vyrábajú v dvoch základných verziách. Prvý model vznikol zdokonalením „inžinierskych“ kalkulačiek. Dokážu teda vykonávať zložité výpočty a výsledok predstaviť v tvare čísel s veľkým počtom desatinných miest. Medzi špičkové výrobky tohoto typu patrí napríklad kalkulačka CASIO FX-9860 SD. Druhý model si vzal za vzor systémy formálnej algebry (z ktorých patria medzi najznámejšie *Mathematica* a *MuPad*), takže ich výsledkami nie sú čísla, ale upravené výrazy vo svojej tradičnej podobe. Príkladom nástroja patriaceho do tejto skupiny je CASIO ClassPad 300. Okrem klasických funkcií „inžinierskych“ kalkulačiek (vyhodnocovanie výrazov, zobrazovanie grafov, štatistické hodnotenia a pod.) oba druhy dnes pracujú s maticami a majú aj vstavané tabuľkové kalkulátory. Riešia rovnice a sústavy rovníc. Umožňujú zaznamenávať text v kombináciách s riešeniami v podobe „elektronických učebníc“. Riešenia v nich sa automaticky prezentujú používateľom, ale zároveň sa z nich dá „odskočiť“ do bežných funkcií kalkulačky, takže študent môže kombinovať spoznávanie novej látky s riešením

cvičných úloh. Rozsah ich schopností je obrovský a v rámci tohoto článku sa nedá priamo ilustrovať. Ako náznak uvedieme, že manuál k CASIO FX-9860 SD má 690 strán.

Výhodou inteligentných kalkulačiek je ich veľkosť (asi 20×10 cm pri hrúbke do 2 cm). Cena je zdanlivo vysoká (niekoľkotisíc korún), ale v nej je už zahrnutý aj bohatý software vbudovaný do hardwaru. Vďaka tomu sú všetky činnosti dostupné okamžite po zapnutí bez nábehového času typického pre osobné počítače. Kalkulačky sú spravidla programovateľné s operačnou pamäťou medzi 64 až 256 KB. V prípade potreby sa dajú pripojiť k osobným počítačom, takže pamäťové obmedzenia vlastne zmiznú. Pre školy sa predávajú v sadách, ktoré obsahujú aj projekčné zariadenie. Vďaka nemu môže učiteľ svoje vysvetľovanie sprevádzať praktickými ukážkami.

V článku sa venujeme hyperbolickým funkciám. Touto „exotickou“, málo prednášanou látkou sa totiž dá ľahko demonštrovať rozdiel medzi doterajším a nastupujúcim trendom. V bežných učebniciach sa o nich nedozviete viac než ich definície

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a pár poučiek typu „*Derivácia sinusu hyperbolického je cosinus hyperbolický; derivácia cosinu hyperbolického je sinus hyperbolický*“. Kde sa takéto funkcie vyskytujú v reálnom svete – a či vôbec – zostáva tajomstvom. Tento prístup sa často uplatňuje pri tradičnom vyučovaní matematiky, ktorého ťažiskom býva memorovanie vzorcov a cieľom schopnosť vykonávať formálne úpravy.

Autor priznáva, že kým nebol v rámci medzinárodného projektu poverený spracovať túto časť látky do modernejšej podoby, tiež o nej nevedel viac. Nepoznal jediný príklad uplatnenia hyperbolickej funkcie. Ak by mu bol niekto dal riešiť rovnicu v ktorej by sa vyskytovala hyperbolická funkcia, snažil by sa vykľučkovať. Ak je dnes presvedčený, že to nie je nič obtiažne, tak len vďaka tomu, že má k dispozícii nástroj, ktorým to ide jednoducho, rýchlo a bez samoúčelného komplikovania. Stačí pochopiť jadro problému – na ostatné je kalkulačka. Výučba matematiky sa preto môže posunúť tam, kde by ju radi mali vidieť všetci učitelia – k riešeniu problémov. V článku naznačíme, ako na to.

2. Cosinus hyperbolický v praxi

Matematika tu nie je iba pre seba a potešenie matematikov. Vznikla, aby pomáhala riešiť problémy, ktoré sa okolo nás vyskytujú. To, že sa postupom času stala i zdrojom dobrých pocitov pre tých, ktorí jej rozumejú, je zaujímavé, ale pre postavenie matematiky ako jedného zo základov všeobecného vzdelania irelevantné. Skúsenosť vraví, že väčšina žiakov v nej nenájde potešenie, ktoré pri nej pociťujú matematici. Mali by sme preto ich priviesť aspoň k tomu, aby pochopili jej užitočnosť – a s tým aj užitočnosť profesie „matematik“. Kým si naprostá väčšina verejnosti pri slove „matematik“ predstaví iba učiteľa matematiky, nemôžeme očakávať, že si niekto prizve matematika na riešenie ekonomického alebo technického problému – s tými predsa (podľa názoru laikov) nemajú matematici nič spoločné. Tým my sami – učitelia matematiky – skresľujeme jej obraz a naše postavenie v spoločnosti.

Vyššie uvedené definície hyperbolických funkcií určite nestačia na pochopenie ich účelu a zmysluplnosti. Dajú sa získať iba tým, že sa študent presvedčí, že za vzorcami sa skrývajú fakty a javy okolitého sveta. Domnievame sa, že zložitost' vzorcov (ak si ich netreba „vtĺkať do hlavy“) nemôže byť prekážkou. Funkcie pomenúvame najmä preto, aby sme nemuseli recitovať dlhé výrazy. Bavme sa preto so študentmi viac o názvoch a o modeloch, ktoré opisujú, ako o symboloch a vzorcoch.

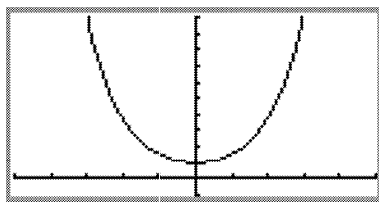
Začnime praktickou úlohou: *Do každej ruky chyťte jeden koniec retiazky. Približujte ruky k sebe a vzdalujte ich. Dívajte sa na krivku, ktorú retiazka vytvára. Viete ju pomenovať?*

Mýli sa ten, kto tipuje parabolu. Nie je to však žiadna tragédia – veľa slávnych matematikov vrátane Galilea Galileiho spravilo rovnakú chybu. (Asi aj to sa sluší študentom povedať. Presvedčenie, že matematici sú neomylní, odrádza „menej dokonalých“ jedincov od nej.) Až v roku 1669 Jungius [1] zistil správny vzorec – ide o graf hyperbolického cosinu, krivku zvanú *reťaznica* (řetězovka).

Prvá prednosť inteligentných grafických kalkulačiek spočíva v možnosti zapísať vzorec funkcie a zobraziť krivku, ktorá mu zodpovedá – pozri obr. 1.

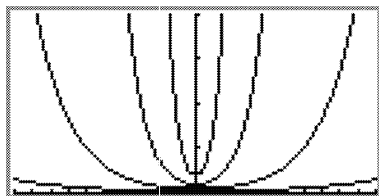
Ďalšou výhodou je možnosť manipulovať s grafom vyjadreným v parametrickom tvare. Parametrický tvar rovnice reťaznici je

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = 0,5 a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$



Obr. 1 Cosinus hyperbolický

Na obr. 2 sú grafy pre hodnoty a rovné 0,25; 0,5; 1 a 2. Inteligentné kalkulačky obsahujú „editor grafov“, vďaka ktorému sa dá preddefinovať rádovo niekoľko desiatok funkcií a zobraziť ľubovoľná (výberom špecifikovaná) kombinácia. Vďaka tomu sa dá sledovať nielen vplyv parametra na tvar funkcie, ale napríklad graficky riešiť rovnice – rovnosť dvoch funkcií – tak, že každú stranu rovnice nakreslíme ako samostatnú funkciu.)



Obr. 2 Vplyv parametra na tvar krivky

Je celkom jednoduché prepojiť pojem parametra s praxou: Rozťahovaním rúk sa mení vzhľad krivky – vždy je to však reťaznica. Inou možnosťou je študovať zmeny tvaru predlžovaním a skracovaním reťaze pri konštantnej vzdialenosti rúk, čo isto konali konštruktéri reťazových mostov.

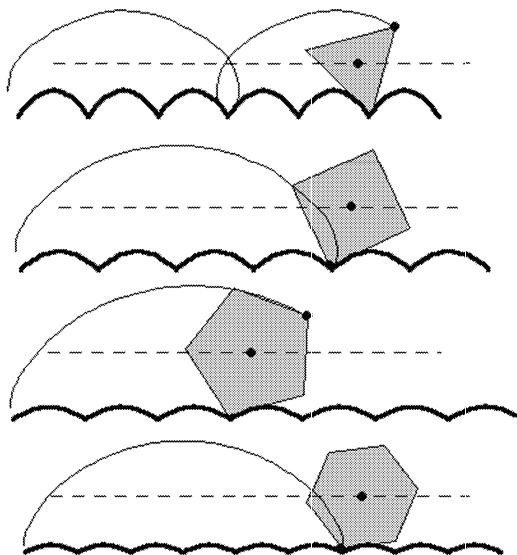
3. Liečba šokom

Ak je niekto zvedavý na zaujímavosti o cosinu hyperbolickom, nech navštívi webovskú stránku <http://mathworld.wolfram.com/Roulette.html>

Veľmi pôsobivá animácia ukazuje, ako po koľajniciach, ktorých elementy tvoria identické úseky cosinu hyperbolického jazdia „kolesá“ v tvare pravidelných mnohoúhelníkov.

Na obr. 3 je momentka z tejto animácie, naznačujúca pohyb štyroch najjednoduchších pravidelných mnohoúhelníkov: rovnoramenného trojuholníka, štvorca, pravidelného päťuholníka a pravidelného šesťuholníka.

Ich ťažiská sa pohybujú po priamke, takže pre pasažiera je pohyb dokonale plynulý. S počtom strán sa úseky skracujú a stávajú menej vypuklými. Toto pozorovanie sa dá zovšeobecniť na „prekvapivý“ záver: *Kruh (chápaný ako „limitný mnohoúhelník“) sa hladko pohybuje po priamke.* Ak niečo robí matematiku krásnou, tak je to práve podobné „uvažovanie naopak“.



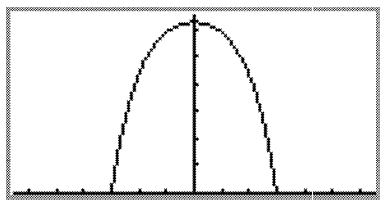
Obr. 3 Pohyb mnohoúhelníkov po dráhe tvorenej úsekmi z cosinu hyperbolického

4. Riešenie vzťahov obsahujúcich hyperbolické funkcie

V roku 1965 v Saint Louis (USA) postavili mohutný oblúk v tvare obráteného grafu cosinu hyperbolického. Je opísaný rovnicou [2]

$$y = 693,8597 - 68,7672 \cdot \cosh 0,0100333x$$

Pre žiakov sú prirodzené otázky: *Aký je oblúk vysoký? Ako ďaleko sú od seba vzdialené jeho piliere?*

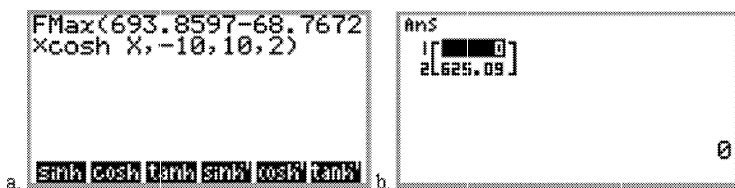


Obr. 4 Oblúk v Saint Louis

4.1. Výška oblúka

Prvou pomôckou na zistenie výšky oblúku je zobrazenie funkcie (obr. 4). K riešeniu vedú dve cesty:

1. Vidieť, že oblúk umiestnený tak, že maximum je v bode $x = 0$. Uspokojíme sa s týmto konštatovaním a vypočítame $693,8597 - 68,7672 \cosh 0$. Výsledok je 625,09. Nakoľko Američania počítajú v stopách, po prepočítaní je to 190,5 metrov.
2. Polohu maxima funkcie zistíme výpočtom. Špecifikujeme funkciu, dva krajné body intervalu, v ktorom sa maximum nachádza (zvolili sme $[-10; 10]$), a počet desatinných miest výsledku (v našom prípade dve) – pozri obr. 5a.



Obr. 5 Základné kroky pri výpočte maxima funkcie

Na tento príkaz sa vypočítajú súradnice maxima^{*)}: $x = 0$, $y = 625,09$ (obr. 5b).

4.2 Rozpätie oblúka pri základni

Ako vidieť z obr. 4, to, že sa piliere dotýkajú zeme, znamená pre funkciu, že pretína x -ovú os. Hľadáme teda korene rovnice

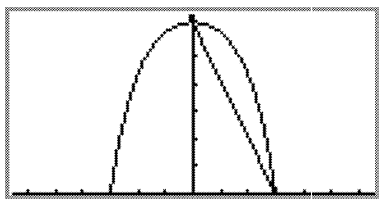
$$693,8597 - 68,7672 \cosh(0,0100333x) = 0,$$

^{*)} Tieto kalkulačky spravidla nemajú národné verzie, takže desatinné čísla sa píšú podľa anglo-americkej normy, t.j. s desatinnou bodkou.

ktoré udávajú x -ové súradnice pätičiek pilierov. Bez kalkulačky by to bolo sotva predstaviteľné, s ňou je to hračka. Equation Solver (riešiteľ rovníc) vypočíta riešenie akejkoľvek rovnice, ktorá sa dá do kalkulačky uložiť podobne jednoducho ako v predchádzajúcom prípade našiel maximum. Riešeniami sú $-299,226$ and $299,226$ (v metroch -91 a 91). Ich vzdialenosť je teda asi 600 stôp, čiže 182 m.

4.3 Dĺžka piliera od základne po maximum

Vo vnútri jedného z pilierov jazdí výťah, ktorý vozí návštevníkov do vyhladkovej miestnosti na vrchole oblúka. Aký dlhú cestu vykonajú návštevníci v ňom? Priame meranie dĺžky krivky nie je jednoduché. My však nepotrebujeme úplne presné riešenie – niečo zaberá miestnosť na vrchole, niečo aj objem výťahu – takže sa uspokojíme s odhadom. Zostavme ďalší obrázok (obr. 6). Predstavuje oblúk a najkratšiu možnú cestu na jeho vrchol. Definíciu krivky poznáme – a vďaka predošlým dvom výpočtom poznáme aj súradnice dvoch bodov priamky. Obidve krivky musia byť vyjadrené v rovnakej súradnicovej sústave. Výpočet musíme preto realizovať v stopách. Vrchol oblúka má súradnice $(0, 625)$, päťka piliera $(299, 0)$.



Obr. 6 Oblúk a najkratší možný výťah

Priamka je teda definovaná vzťahom

$$y = 625,0925 - (625,0925/299,226) \cdot x$$

Nás zaujíma dĺžka úseku medzi dvomi sledovanými bodmi. Je to prepona pravoúhleho trojuholníka, ktorého tretím vrcholom je $(0, 0)$. Preto výsledok je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{625,0925^2 + 299,226^2} = 693,020081,$$

693 stôp, t.j. 211,2 m.

Samozrejme, toto je iba prvé priblíženie, výťah v skutočnosti je dlhší. Presnejšiu hodnotu dostaneme, keď priamku nahradíme lomenou čiarou pozostávajúcou z dvoch úsečiek. Bod zlomu bude mať súradnice

$$x = 150$$

$$y = 693,8597 - 68,7672 \cosh(0,0100333 \times 150) = 531,35$$

Oblúk teda nahradíme lomenou čiarou:

- Prvý úsek medzi (0; 625,0925) a (150; 531,35),
- Druhý úsek medzi (150; 531,35) a (299,226; 0)

Ich dĺžku vypočítame rovnakým spôsobom – pomocou Pytagorovej vety. Úseky majú dĺžku 176,87 a 551,91 stôp. Spolu 728,79 stôp, čiže 222,14 m.

Ak bude lomenú čiaru tvoriť viac úsečiek, výsledok bude ešte presnejší. Ak oblúk nahradíme šiestimi úsečkami, ktorých horizontálne súradnice budú $x = 0, 50, 100, 150, 200, 250, 299,226$ stôp, a použijeme Pytagorovu vetu na zistenie ich dĺžok, výsledok bude 738,9 stôp, teda 225,22 m.

SHEET	A	B	C	D
1	X	Y	Part	Total
2	0	625.09		738.9
3	50	616.25	50.774	
4	100	587.47	57.691	
5	150	531.35	75.162	
6	200	433.47	109.91	
7	250	268.68	172.21	
8	299.22	7.8E-4	273.15	

Obr. 7 Nahradenie krivky lomenou čiarou zo šiestich úsečiek

Výpočet netreba robiť manuálne. Na obrázku 7 je vo (vstavanom) tabuľkovom kalkulátore. Iba hodnoty x v prvom stĺpci boli vložené ručne. Hodnoty y v druhom stĺpci sú hodnoty $f(x)$. Na ich výpočet stačí:

- Napísať do bunky C2 formulu

$$= 693.8597 - 68.7672 * \cosh(0.0100333 * B2)$$
- Túto formulu skopírovať do buniek B3 až B8.

Výpočet dĺžky jednotlivých strán lomenej čiary v treťom stĺpci sa realizuje podobne. V bunke C3 vypočítame dĺžku prvej úsečky – medzi (0; 625,09) a (50; 616,25) – a formulu skopírujeme do buniek C4 až C8. V bunke D2 je suma dĺžok všetkých šiestich úsečiek.

Zistená hodnota sa líši od predchádzajúcej iba o tri metre. Pri delení na dvanásť častí, výsledok sa zvýši už iba o jednu stopu, teda asi 30 cm. Hoci

jemnejšie delenie intervalu by prinieslo ešte presnejšie hodnoty, vzhľadom na uvedené technické obmedzenia je presnosť výpočtu dostačujúca.

5. Záver

Svet sa mení. Matematika a jej vyučovanie by sa malo meniť tiež. V časoch, keď si ľudia vyberajú program kín na internete a rovnako kupujú aj lístky na predstavenia, bolo by nepochopiteľné, ak by sa matematika neprispôsobila rovnakému trendu. Aj internet dokážeme efektívne používať bez toho, aby sme museli rozumieť jeho princípom. A ak nefunguje, neváhame sa obrátiť na špecialistu. Rovnaký postoj by sme zrejme mali zaujať aj k matematike. Naučme žiakov využívať ju – bez nutnosti chápať ju v jej celej komplexnosti. Zároveň nezabudnime vychovávať skupinu budúcich špecialistov – tých, ktorí budú vedieť riešiť problémy, na ktoré nebude laik stačiť.

Táto zmena nepríde rýchlo, ale všetky indície naznačujú, že prísť musí. Predtým však treba vykonať veľa mravenčej práce – analyzovať, ktoré oblasti matematiky sa takto vhodne spracovať a ako, pripraviť experimentálne učebné osnovy a overiť ich na školách, napísať učebnice, vytvoriť softwarovú podporu v národných jazykoch, zaškoliť učiteľov, vytvoriť pre nich konzultačné centrá, ktoré by im priebežne pomáhali v riešení každodenných problémov, oboznámiť rodičov s cieľmi a zámermi reformy, atď., atď. Treba však začať čím skôr. Svet sa totiž mení oveľa rýchlejšie, ako si dokážeme predstaviť.

L i t e r a t u r a

- [1] <http://mathworld.wolfram.com/Catenary.html>
- [2] *Thayer, W. V.*: Owner's manual for Saint Louis Arch, 1993.
<http://www.jug.net/wt/archcgf.htm>