

FYZIKA

Teoretické úlohy celostátního kola 47. ročníku FO



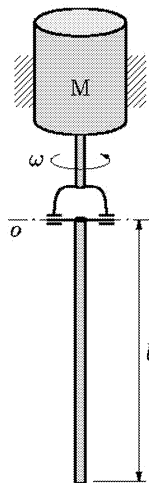
Ve dnech 21. – 24. února se v Plzni uskutečnilo celostátní kolo 47. ročníku fyzikální olympiády (viz zprávy v tomto čísle MFI). V příspěvku uvádíme zadání i řešení teoretických úloh, jejichž autorem je PaedDr. Přemysl Šedivý.

1. Rotující soustava

Motor je upevněn ve svislé poloze. K dolnímu konci hřídele je otáčivě upevněn konec tyče délky l a zanedbatelného průřezu tak, že se tyč může otáčet okolo vodorovné osy o (obr. 1). Rotor motoru se začne otáčet spolu s osou o a jeho úhlová rychlost se bude velmi pomalu zvětšovat.

- Vysvětlíte, proč v reálném zařízení po překročení určité kritické úhlové rychlosti ω_0 se tyč vychýlí ze svislé polohy.
- Určete, jak bude odchylka obíhající tyče od svislého směru záviset na úhlové rychlosti rotoru.
- Sestrojte graf této závislosti, jestliže $l = 0,50$ m. Při jaké úhlové rychlosti dosáhne odchylka tyče od svislého směru hodnoty 60° ?

Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$. Vliv okolního vzduchu zanedbejte.

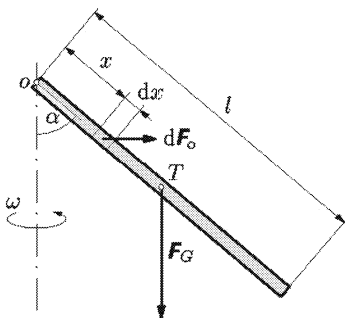


Obr. 1

Řešení:

1. a) Úlohu budeme řešit z hlediska pozorovatele ve vztažné soustavě otáčející se spolu s vychýlenou tyčí okolo svislé osy rotoru. Určíme nejprve celkový moment odstředivých sil působících na jednotlivé části tyče vzhledem k vodorovné ose o procházející koncem tyče (obr. R1). Na element tyče délky dx ve vzdálenosti x od osy o působí odstředivá síla dF_o momentem o velikosti

$$dM = |dF_o| \cdot x \cos \alpha = dm \omega^2 x \sin \alpha \cdot x \cos \alpha = \frac{dx}{l} m \omega^2 x^2 \sin \alpha \cos \alpha .$$



Obr. R1

Celkový moment odstředivých sil dostaneme integrací:

$$M = \frac{m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{l} \int_0^l x^2 dx = m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^2}{3} = m \omega^2 \sin 2\alpha \frac{l^2}{6} . \quad (1)$$

3 body

Proti němu působí moment tíhové síly

$$M' = mg \frac{l}{2} \sin \alpha . \quad (2)$$

Pokud tyč vychýlíme jen nepatrně ze svislé rovnovážné polohy, například v důsledku chvění, které se vždy v takovéto rotující soustavě vyskytuje, můžeme psát

$$\sin \alpha \approx \alpha , \quad \sin 2\alpha \approx 2 \sin \alpha \approx 2\alpha .$$

Pak

$$M \approx \frac{m\omega^2 l^2 \alpha}{3}, \quad M' = \frac{mgl\alpha}{2}.$$

Jestliže $M < M'$, je svislá rovnovážná poloha stabilní, tyč se po malém vychýlení vrátí do svislé polohy. Jestliže $M > M'$, je svislá rovnovážná poloha labilní, tyč se při sebemenší výchylce z rovnovážné polohy bude dále vychylovat, dokud se oba momenty nevyrovnají. Kritická úhlová rychlost ω_0 je taková, pro kterou při malé výchylce z rovnovážné polohy platí $M = M'$. Z rovnosti

$$\frac{m\omega_0^2 l^2 \alpha}{3} = \frac{mgl\alpha}{2}$$

dostaneme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

2 body

b) Odchylku tyče od svislého směru po překročení kritické úhlové rychlosti určíme z rovnosti momentu odstředivých sil a momentu tíhové síly podle (1) a (2):

$$m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^2}{3} = mg \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{3g}{2\omega^2 l},$$

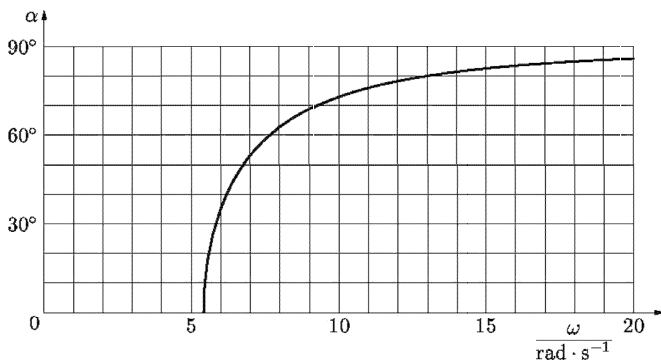
$$\alpha = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}. \quad (3)$$

2 body

c) Pro $l = 0,50$ m dostaneme $\omega_0 = 5,42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pomocí vztahu (3) vyplníme tabulku a sestojíme graf (obr. R2):

$\omega/\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	5,42	6	7	8	10	12	15	20
$\cos \alpha$	1	0,8175	0,6006	0,4598	0,2943	0,2044	0,1308	0,0736
α	0°	35,2°	53,1°	62,6°	72,9°	78,2°	82,5°	85,8°



Obr. R2

Odchylky 60° dosáhneme, když

$$\frac{3g}{2\omega^2 l} = \frac{1}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 7,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

2. Družice

Družice Země o hmotnosti $m = 150 \text{ kg}$ byla navedena na kruhovou oběžnou dráhu o poloměru $R = 6,70 \cdot 10^3 \text{ km}$.

- Jaká je její rychlost a oběžná doba?
- Jaká je celková mechanická energie družice? (Potenciální energii v nekonečné vzdálenosti bereme jako nulovou.)
- Jak se změní poloměr trajektorie a rychlost družice během jednoho oběhu, působí-li na ni horní vrstvy atmosféry odporovou silou o velikosti $F = 7,50 \cdot 10^{-3} \text{ N}$?

Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Hmotnost Země $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, gravitační konstanta $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Řešení:

2. a) Z rovnosti gravitační a dostředivé síly

$$\frac{\kappa M m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi^2 m R}{T^2} \quad (1)$$

odvodíme

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}} = 7\,720 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}} = 5\,460 \text{ s}.$$

2 body

b) Celková mechanická energie E družice je rovna součtu energie kinetické a energie potenciální:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa Mm}{R}.$$

Z (1) odvodíme $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\varkappa Mm}{2R} = -\frac{E_p}{2}$. Pak

$$E = \frac{E_p}{2} = -E_k = -\frac{\varkappa Mm}{2R} = -\frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Celková mechanická energie družice je záporná. Pro dané hodnoty $E = -4,46 \cdot 10^9 \text{ J}$. **3 body**

c) Působením odporové síly se během jednoho oběhu celková mechanická energie družice zmenší o spotřebovanou práci: $\Delta E = -F \cdot 2\pi R$. Z (2) plyne, že poloměr trajektorie se zmenší, ale rychlost družice se zvětší.

1 bod

Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2} \right) = -mv\Delta v - \frac{m(\Delta v)^2}{2} = -F \cdot 2\pi R.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$(\Delta v)^2 + 2v\Delta v - \frac{4\pi RF}{m} = 0,$$

jejímž řešením dostaneme

$$\Delta v = -v \pm \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}}.$$

Podle předcházející úvahy se musí velikost rychlosti družice zvětšit, vyhovovat bude pouze řešení

$$\Delta v = -v + \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}} = -\sqrt{\frac{\varkappa M}{R}} + \sqrt{\frac{\varkappa M}{R} + \frac{4\pi RF}{m}} = 0,273 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\kappa M m}{2(R + \Delta R)} - \left(-\frac{\kappa M m}{2R} \right) = \frac{\kappa M m \Delta R}{2(R + \Delta R)R} = -F \cdot 2\pi R.$$

Z toho

$$\Delta R = -\frac{4\pi F R^3}{\kappa M m + 4\pi R^2 F} = -474 \text{ m}.$$

2 body

Ke stejným výsledkům můžeme rychleji dojít pomocí aproximací:

Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2} \right) \approx -mv\Delta v = -F \cdot 2\pi R,$$

$$\Delta v = \frac{2\pi R F}{mv} = \frac{2\pi R F}{m\sqrt{\frac{\kappa M}{R}}} = \frac{2\pi F R^{1,5}}{m\sqrt{\kappa M}} = 0,273 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\kappa M m}{2(R + \Delta R)} - \left(-\frac{\kappa M m}{2R} \right) = \frac{\kappa M m \Delta R}{2(R + \Delta R)R} \approx \frac{\kappa M m \Delta R}{2R^2} = -F \cdot 2\pi R,$$

$$\Delta R = -\frac{4\pi F R^3}{\kappa M m} = -474 \text{ m}.$$

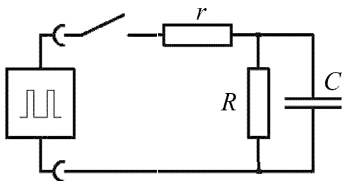
3. Periodické dobíjení kondenzátoru

Elektrický obvod je tvořen zdrojem obdélníkových impulzů, spínačem, dvěma rezistory o odporech r a R a kondenzátorem o kapacitě C (obr. 2). Obdélníkové impulzy mají amplitudu U_0 , dobu trvání τ a periodu T (obr. 3). Vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný. (To mj. znamená, že pokud je svorkové napětí zdroje nulové, chová se zdroj jako zkrat.)

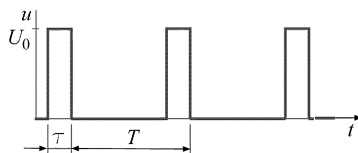
Sepneme-li spínač, bude po delší době napětí na kondenzátoru kolísat okolo stálé průměrné hodnoty U_C , přičemž zvlnění ΔU , tj. rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou okamžitého napětí kondenzátoru během jedné periody zdroje, bude mnohem menší než průměrná hodnota U_C .

a) Za daných předpokladů stanovte U_C a ΔU .

- b) Určete podmínku, kterou musí splňovat veličiny R , r , C , τ a T , aby byl zajištěn předpoklad úlohy že $\Delta U \ll U_C$.
- c) Ověřte, že je tato podmínka splněna, jestliže $R = 1,00 \text{ M}\Omega$, $r = 220 \text{ k}\Omega$, $C = 1,00 \text{ }\mu\text{F}$, $\tau = 2,0 \text{ ms}$, $T = 10,0 \text{ ms}$ a $U_0 = 5,00 \text{ V}$. Vypočítejte pak číselné hodnoty U_C a ΔU .



Obr. 2



Obr. 3

Řešení:

3. a) Okamžité napětí na kondenzátoru kolísá jen nepatrně okolo průměrné hodnoty U_C . Po dobu trvání impulsu se kondenzátor nabíjí a jeho náboj se zvětší o

$$Q_1 = \left(\frac{U_0 - U_C}{r} - \frac{U_C}{R} \right) \tau = \left(\frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) \tau.$$

Ve zbývající části periody se vybíjí a jeho náboj se zmenší o

$$Q_2 = \left(\frac{U_C}{r} + \frac{U_C}{R} \right) (T - \tau) = \left(\frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) (T - \tau).$$

Z rovnosti $Q_1 = Q_2$ dostaneme

$$\frac{U_0}{r} \tau = \frac{U_C(R+r)}{Rr} T, \quad U_C = \frac{U_0 R}{r+R} \cdot \frac{\tau}{T}.$$

3 body

Změna napětí na kondenzátoru během trvání impulsu je

$$\Delta U = \frac{Q_1}{C} = \left(\frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr} \right) \frac{\tau}{C} = \frac{U_0 \tau}{rC} \left(1 - \frac{\tau}{T} \right).$$

Stejně velký je pokles napětí ve zbývající části periody.

3 body

b) Dosazením do vztahu $\Delta U \ll U_C$ dostaneme $\frac{U_0 \tau}{rC} (1 - \frac{\tau}{T}) \ll \frac{U_0 R}{r+R} \cdot \frac{\tau}{T}$,

$$T - \tau \ll C \cdot \frac{Rr}{R+r}.$$

2 body

c) Pro dané hodnoty platí

$$8 \cdot 10^{-3} \text{ s} = T - \tau \ll C \cdot \frac{Rr}{R+r} = 0,18 \text{ s}.$$

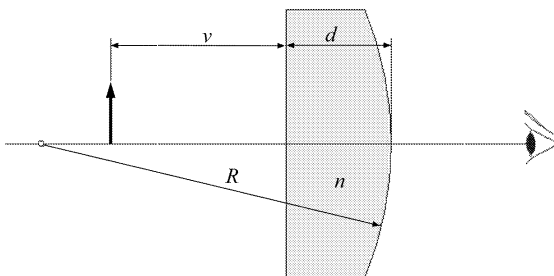
Předpoklady úlohy jsou tedy splněny.

Dále vychází $U_C = 0,82 \text{ V}$, $\Delta U = 36 \text{ mV}$.

2 body

4. Lupa

Malý předmět pozorujeme ploskovypuklou lupou o tloušťce $d = 30 \text{ mm}$ vyrobenou ze skla o indexu lomu $n = 1,56$. Poloměr kulového rozhraní lupy je $R = -100 \text{ mm}$, předmět je ve vzdálenosti $v = 50 \text{ mm}$ od rovinného rozhraní lupy (obr. 4). Určete polohu obrazu vytvořeného lupou a jeho příčné zvětšení.



Obr. 4

Řešení:

4. a) Řešení postupným zobrazáním na prvním a druhém rozhraní čočky
Použijeme zobrazovací rovnici kulového rozhraní ve tvarech

$$n_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a'} \right), \quad \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1,$$

kde $f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$, $f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$ jsou ohniskové vzdálenosti, a vztah pro výpočet příčného zvětšení $\beta = -\frac{f}{a-f}$.

1. *Rovinné rozhraní:* $R \rightarrow \infty$, $n_1 \doteq 1$, $n_2 = n = 1,56$, $a_1 = v$.

Z toho $f_1 \rightarrow \infty$, $f'_1 \rightarrow \infty$.

Použijeme první tvar zobrazovací rovnice. Z něj plyne

$$a'_1 = -\frac{n_2}{n_1} a_1 = -nv = -78 \text{ mm}.$$

Příčné zvětšení obrazu vytvořeného rovinným rozhraním je $\beta_1 = 1$.

5 bodů

2. *Kulové rozhraní:* $R = -100 \text{ mm}$, $n_1 = n = 1,56$, $a_2 = -a'_1 + d = 108 \text{ mm}$, $n_2 \doteq 1$

Použijeme druhý tvar zobrazovací rovnice.

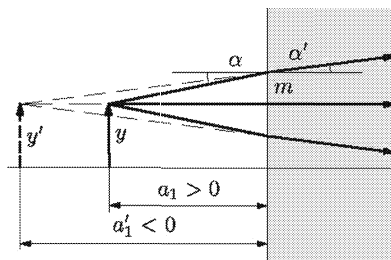
$$f_2 = \frac{nR}{1-n} = 279 \text{ mm}, \quad f'_2 = \frac{R}{1-n} = 179 \text{ mm},$$

$$a'_2 = \frac{a_2 f'_2}{a_2 - f_2} = -113 \text{ mm}, \quad \beta_2 = -\frac{f_2}{a_2 - f_2} = 1,63.$$

Obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení $\beta = \beta_1 \beta_2 = 1,63$.

5 bodů

Jiné řešení zobrazení na rovinném rozhraní vychází z obr. R3:



Obr. R3

Pro malé úhly platí

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \approx \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{\frac{m}{a_1}}{\frac{m}{-a'_1}} = -\frac{a'_1}{a_1},$$

$$a'_1 = -na_1, \quad \beta_1 = \frac{y'}{y} = 1.$$

Řešení pomocí hlavních rovin a ohniskové vzdálenosti tlusté čočky (obr. R4) – viz studijní text *Zobrazení čočkami*

Parametry čočky: $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = -100$ mm, $d = 30$ mm, $n_1 \doteq 1$ (okolní vzduch), $n_2 = n = 1,56$ (sklo)

Obecný vztah pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky

$$\begin{aligned} f &= \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = \\ &= \frac{n R_1 R_2}{(n - 1)[(n - 1)d + n(R_2 - R_1)]} \end{aligned}$$

upravíme na tvar

$$f = \frac{n R_2}{(n - 1) \left[(n - 1) \frac{d}{R_1} + n \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right]}.$$

Podobně musíme upravit vztah pro výpočet polohy hlavního bodu H :

$$\begin{aligned} a_1(H) &= \frac{n_1 R_1 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \\ &= \frac{R_1 d}{(n - 1)d + n(R_2 - R_1)} = \frac{d}{(n - 1) \frac{d}{R_1} + n \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

Protože $R_1 \rightarrow \infty$ dostáváme

$$f = -\frac{R_2}{n - 1} = 179 \text{ mm}, \quad a_1(H) = -\frac{d}{n} = -19,2 \text{ mm},$$

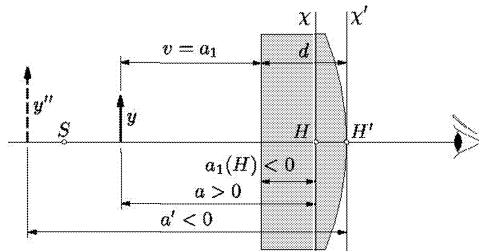
$$a'_2(H') = -\frac{n_1 d R_2}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = 0.$$

6 bodů

Pozorovaný předmět má předmětovou vzdálenost $a = a_1 - a_1(H) = 69,2$ mm.

Obrazová vzdálenost je $a' = \frac{af}{a-f} = -113$ mm $= a'_2$, obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení $\beta = -\frac{f}{a-f} = 1,63$.

4 body



Obr. R4

Literatura

- [1] *Trnka, J.:* Zobrazení čočkami (dostupné na www.fo.cuni.cz/texty/cocky.pdf).

Nová éra elektroniky, spintronika

LUBOMÍR SODOMKA

Adhesiv, Liberec

Spintronika, magnetotronika, spinová elektronika, je nový kvantově fyzikální interdisciplinární obor na rozmezí magnetismu a elektroniky, který patří do nanofyziky a těší se jako každý nový obor velkému zájmu výzkumu i aplikacím zvláště ve výpočetní a sdělovací technice. Podstatou spintroniky je řízení a ovládání proudu jen magnetické charakteristiky částic magnetických momentů (spinů). Při normální elektronice se spiny částic (elektronů) neberou v úvahu. Ve spinoelektronice se užívá spinový stupeň volnosti. Existence spinového polarizovaného toku byla experimentálně prokázána na feromagnetikách a potvrzena i teoreticky.

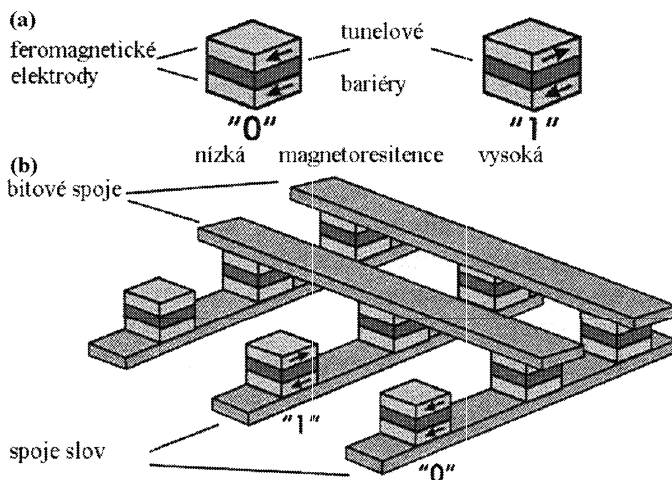
První kroky k využití spinového stupně volnosti jsou spojeny s objevem gigantické magnetoresistance magnetických multivrstev (1988). Magnetická multivrstva je tvořena střídáním magnetických (např. železa a chromu) a nemagnetických vrstev. Magnetoresistance takových vrstev je nejnižší, jsou-li magnetické momenty v magnetických vrstvách uspořádány

rovnoběžně, a je nejvyšší, jsou-li uspořádány antiparalelně. Přesahuje-li relativní zvětšení magnetoresistance 200 %, pak jde o gigantickou magnetoresistanci (GMR). Při speciální konstrukci magnetické multivrstvy lze dodat toho, že magnetická konfigurace se dá měnit z paralelní do antiparalelní orientace spinů spínáním magnetickým polem poměrně slabé intenzity kolem 80 A/m (několika Oe). První spintronický prvek, odpovídající funkci diody, je spinotropická dioda, spinoda. Je to základní prvek spinotropických obvodů. Se spinodami se setkáváme dnes již ve čtecích hlavách a na harddiscích moderních počítačů. Užitím obvodů se spinodami se podstatně zvyšuje kapacita paměti a čtecí rychlost až o dva řády. Nelze však užitím GMR překročit informační hustotu 0,17 Gbit/mm². Další zvyšování rychlosti čtení a hustoty informací v paměti lze pravděpodobně dosáhnout dalším spintronickým prvkem, kterým je tunelový magnetický přechod (TMP, TMJ).

Podstata spinody je spolu s paměťovou spinotropickou buňkou na obr. 1.

Tunelový magnetický přechod (TMP) a TMP paměť

Struktura TMP je vytvořena ze dvou feromagnetických vrstev, oddělených tenkou izolační vrstvou nejčastěji oxidu hlinitého (Al₂O₃). Elektronům mohou tunelovat tenkou vrstvou, přičemž pravděpodobnost tunelování zá-

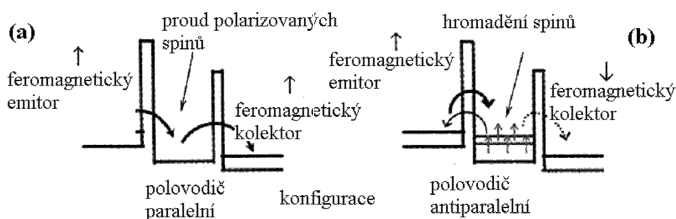


Obr.1 a) Spinody ve stavu 0 a 1, b) síť spinod k vytvoření paměti

visí na orientaci spinů ve feromagnetiku a tím závisí na orientaci spinů i magnetoresistance. Je různá pro paralelní a antiparalelní orientaci spinů (magnetických momentů). Poměr magnetoresistance činí u TMP až 70 %. Na tomto principu lze vytvářet i nové typy pamětí počítačů. Přednost spintronických pamětí proti polovodičovým spočívá v tom, že podržují uložené údaje i po nějakou dobu po vypnutí počítače. Výhodnější magnetickou polarizaci proti klasickým kovovým feromagnetikám (Fe, Cr, Ni) mají některé magnetické látky jako je *manganit*. Nejvhodnější se jeví v současné době *magnezit* (Fe_3O_4).

Spintronika s polovodiči

Spintronika s použitím polovodičů rozšiřuje možnosti většího sortimentu konstrukcí spintronických prvků. Polovodičová spintronika umožňuje vytvářet velké množství elektronických prvků na jednom čipu a multifunkční součástky. Kromě toho je zajištěna integrace mezi magnetoresistencovými prvky s prvky polovodičovými a vytvářet tak složité optoelektronické spintronické součástky. Příklad konstrukce a současně i funkce takových prvků je na obr. 2. Je možné i vytvářet spintronické LEDy.



Obr. 2 Feromagnetická struktura s polovodičovou tenkou vrstvou s paralelní (a) a antiparalelní konfigurací (b)

Spintronika, která je v zatím začátcích, dosáhla již přesto značných úspěchů při konstrukci miniaturních kvantových nanosoučástek s vysokou snímací rychlostí a s možností dosahování vysokých hustot informací v počítačových pamětech.

Literatura

- [1] Fert, A. et al.: The new era of spintronics. Europhysics News 34 (6, 2004), s. 227.
- [2] Burkard, Q. et al.: Spintronics a quantum dots for quantum computers and quantum communications. Fortschritte der physik 48 (2000), s. 965.

Presnosť merania tiažového zrýchlenia matematickým kyvadlom

Ján BEŇAČKA

Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra, Slovensko

Matematické kyvadlo je známe zariadenie na meranie tiažového zrýchlenia [1, 2]. Študentom je známe, že kosínusový priebeh závislosti výchylky od času ako aj vzťah na výpočet g sú len približné a sú dostatočne presné len pri malej amplitúde. Možno preto vysloviť dve otázky: Ako vyzerá presný graf závislosti výchylky od času a ako veľká je chyba pri určení g ? Aby sme mohli tieto otázky zodpovedať, musíme poznať presné riešenie. Toto riešenie má podobu určitého integrálu a možno ho nájsť napríklad v [3]. Pre komplexné riešenie problému sme vytvorili program, ktorý je dostupný na www.jbenacka.szm.sk.

Zjednodušené riešenie

Pohybová rovnica matematického kyvadla vo vákuu je [1 – 3]

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \sin \varphi, \quad \varphi(0) = \Theta, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad (1)$$

kde $\varphi = \varphi(t)$ je výchylka, L je dĺžka kyvadla, Θ je amplitúda a g je tiažové zrýchlenie. Ak $\varphi \leq 5^\circ$, potom $\sin \varphi \approx \varphi$ a (1) prejde na jednoduchší tvar s riešením

$$\varphi(t) = \Theta \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{L}} \right). \quad (2)$$

Z neho vyplýva známy vzťah

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}, \quad (3)$$

pričom periódu T odmeriame. Označme takto vypočítané g ako g_S .

Presné riešenie

Platí, že $\dot{\varphi} = \frac{v}{L}$, kde v je rýchlosť. Keďže

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{v}}{L} = \frac{1}{L} \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{L^2} \frac{dv}{d\varphi},$$

rovnica (1) prejde na tvar

$$v \frac{dv}{d\varphi} = -gL \sin \varphi. \quad (4)$$

Riešenie je [3]

$$v = L\dot{\varphi} = \sqrt{2gL(\cos \varphi - \cos \Theta)}. \quad (5)$$

Potom

$$\int_{\varphi}^{\Theta} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\cos \xi - \cos \Theta)}} = t\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \varphi \in \langle -\Theta; \Theta \rangle, \quad (6)$$

a po úprave

$$\int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Theta}{2} \sin^2 \beta}} = t\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \varphi \in \langle -\Theta; \Theta \rangle. \quad (7)$$

Graf funkcie $\varphi(t)$ je na obr. 1. Pre porovnanie je priložený graf funkcie (2). Amplitúda $\Theta = 60^\circ$ v oboch prípadoch. Vidíme, že grafy majú rôzne periódny. Presná perióda (ktorú meriame pri experimentoch) je väčšia. Z toho vyplýva, že vzťah (3), ktorý bol odvodený z kosínusového priebehu a teda očakáva „kosínusovú“ periódu, musí produkovať chybu. Skutočne, v tomto prípade je to asi 13 %.

Platí, že $\varphi = 0$, ak $t = T/4$. Dosadením do (7) dostávame

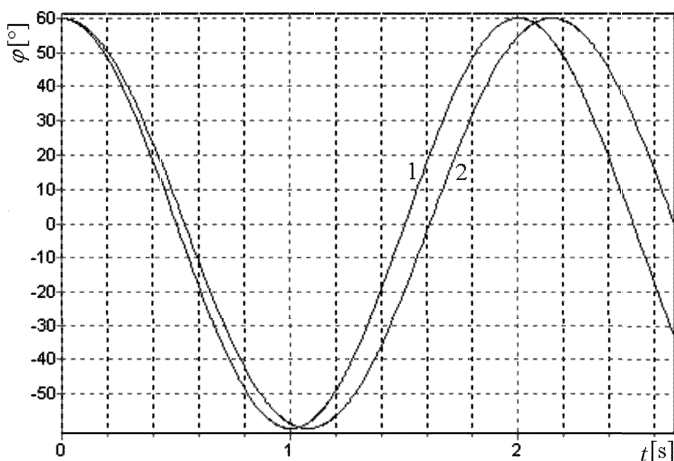
$$g = 16 \left(\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Theta}{2} \sin^2 \beta}} \right)^2 \frac{L}{T^2} = 16I^2 \frac{L}{T^2} = C \frac{L}{T^2} \quad (8)$$

Toto je správny vzťah pre výpočet g . Takto získané g označíme ako g_E . Platí:

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{\Theta \rightarrow 0} g_E = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} = g_S. \quad (9)$$

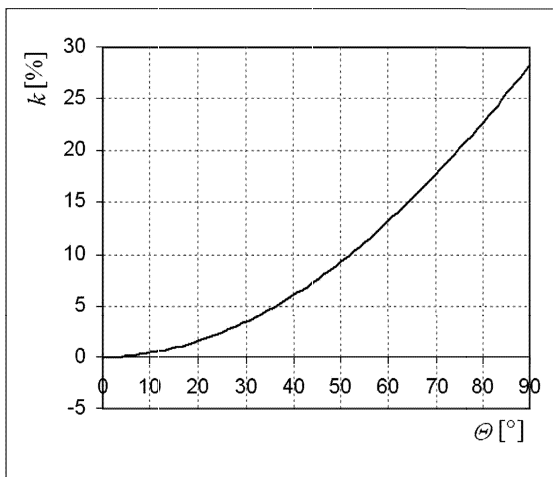
Relatívna chyba, ktorej sa dopustíme, ak použijeme vzťah (3) namiesto (8), je

$$k = \frac{g_E - g_S}{g_E} = 1 - \frac{\pi^2}{4I^2}. \quad (10)$$



Obr. 1 Závislosť výchylky kyvadla na čase: zjednodušené (kosínusové) riešenie – 1, presné riešenie – 2

Všimnime si, že $\lim_{\Theta \rightarrow 0} k = 0$. Graf funkcie $k(\Theta)$ je na obr. 2. Ak $\Theta = 5^\circ$, potom $k = 0,095 \%$; ak $\Theta = 16^\circ$, $k = 0,972 \%$ a ak $\Theta = 30^\circ$, potom $k = 3,393 \%$.



Obr. 2 Závislosť relatívnej chyby od amplitúdy

Literatúra

- [1] *Hlavička, A. et al.*: Fyzika pro pedagogické fakulty, (SPN, Praha, 1971), s. 588 – 592.
 - [2] *Tipler, P. A.*: Physics, 2nd ed. (Worth Publishers, New York, 1982), s. 326 – 330.
 - [3] *Barger V. – Olsson, M.*: Classical mechanics: a modern perspective, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1995), s. 67 – 71.
-

Z HISTORIE

Na počátku přenosu elektrické energie byla konopná vlákna

Dnes všudypřítomná a zdánlivě samozřejmá elektřina ještě neslouží příliš dlouho – v historii lidstva to představuje pouze nepatrný krůček. Ale přece už i ona má své dějiny a slavné osobnosti. Přitom elektřinu – přinejmenším atmosférickou a živočišnou – znají lidé již více než dva tisíce let. Ostatně slovo elektron je ze staré řečtiny. Také pokusy s ebonitovou tyčí a liščíím ohonem či žertovné taškařice abbého *Nolleta* jsou doslova vousaté. Od nich se však dlouho nepokročilo vpřed. Až věk osvícenců v 18. století znamenal počátek nové éry.

„Látky lze rozdělit na vodiče a izolátory. Vodiči lze elektřinu přenášet i na velké vzdálenosti“. K těmto zásadním poznatkům dospěl anglický přírodovědec-samouk *Stephen Gray*, od jehož narození a úmrtí letos uplynulo „kulatých“ 340 a 270 let (1666 – 1736). Původně pracoval jako řemeslník-barvíř, ale po odchodu na odpočinek se začal zajímat o nové fyzikální objevy. Při svých experimentech

zjistil, že elektřinu vyrobenou třením na rotačním elektrostatickém generátoru („třecí elektrice“), sestrojeném v roce 1660 *Otto von Guericke*m, je možno vést pomocí konopných vláken, pokud jsou vlhká.

V roce 1729 společně se svým přítelem *G. Wheelerem* zřídil první venkovní elektrické vedení. Z okna své pracovny umístil na tyče od fazolí konopnou šňůru na vzdálenost 765 stop (asi 230 metrů). Jako izolátory, jejichž vlastnosti oba výzkumníci již také znali, použili krátká hedvábná vlákna, nepřenášející elektrický náboj. Rovněž rozpoznali, že mosazným drátem se šíří elektřina okamžitě, a též, že na izolovaném tělese lze udržet elektrický náboj až několik měsíců. Všechny tyto – především *Grayovy* – poznatky byly oceněny v roce 1731 jeho zvolením za člena prestižní Královské společnosti (*Royal Society*).

Grayovo vedení velmi dobře přenášelo „skleněnou“ elektřinu, vyrobenou třením. Primitivnímu zdroji tedy odpovídala primitivní elektrická síť. Elektrický proud o vyšším napětí musel být veden jinak. „Drátěné cesty“ se staly symbolem moderní civilizace. To však je již jiná kapitola z historie poznání v oboru elektřiny a magnetismu.

Bohumil Tesařík