

Lagrangeova identita

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Znalost důležitých algebraických identit je velmi užitečným prostředkem při řešení řady úloh z oblasti elementární matematiky. Mezi takové identity patří tzv. Lagrangeova identita (rovnost). Jejím přímým důsledkem je přitom známá Cauchy–Schwarzova nerovnost, pomocí níž často dokazujeme také další, obtížnější nerovnosti např. v matematické olympiádě a v dalších matematických soutěžích na středních školách. V tomto článku budou uvedeny některé aplikace Lagrangeovy identity při řešení konkrétních úloh.

Věta (Lagrangeova identita)

Nechť n je přirozené číslo, které je větší než 1. Potom pro libovolná reálná čísla a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \quad (1)$$

Důkaz provedeme užitím principu matematické indukce vzhledem k n .

(i) Ověříme nejprve platnost identity (1) pro $n = 2$. Platí

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = \\ & = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - (a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_2^2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \end{aligned}$$

Identita (1) tedy pro $n = 2$ platí.

- (ii) Nyní předpokládáme, že daná rovnost platí pro určité $n \geq 2$ a ukážeme, že platí rovněž pro $n+1$. Uvažujme proto libovolná reálná čísla a_i, b_i , kde $i = 1, 2, \dots, n+1$. Přitom platí

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right)^2 = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 - \\
 & \quad - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 2a_{n+1} b_{n+1} \sum_{i=1}^n a_i b_i - a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 = \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - 2a_{n+1} b_{n+1} \sum_{i=1}^n a_i b_i + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i b_j - a_j b_i)^2.
 \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že dané tvrzení platí i pro $n+1$.

Spojením kroků (i) a (ii) je pak dokázána platnost tvrzení pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$.

Vzhledem k tomu, že pravá strana Lagrangeovy identity (1) nabývá vždy nezáporných hodnot, platí (jako její speciální případ) následující tvrzení.

Důsledek (Cauchy-Schwarzova nerovnost)

Nechť n je přirozené číslo a a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou libovolná reálná čísla. Pak platí nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (2)$$

Rovnost v ní nastává, právě když v Lagrangeově identitě (1) pro všechny dvojice (i, j) přirozených čísel takové, že $1 \leq i < j \leq n$, platí $a_i b_j = a_j b_i$,

tj. právě když existuje reálné číslo λ takové, že $a_i = \lambda b_i$ ($b_i \neq 0$) pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Následující úlohy nám poslouží k prezentaci přímého využití Lagrangeovy identity (1) v praxi.

Příklad 1

Jsou-li přirozená čísla m a n tvaru $a^2 + 3b^2$, kde a, b jsou celá čísla, je i jejich součin mn téhož tvaru. Dokažte.

Řešení: Nechť platí $m = x^2 + 3y^2$ a $n = u^2 + 3v^2$, kde x, y, u, v jsou celá čísla. Uvažujme identitu (1) pro $n = 2$. Volbou

$$a_1 = x, \quad a_2 = y\sqrt{3}, \quad b_1 = u, \quad b_2 = v\sqrt{3}$$

dostaneme po jednoduché úpravě

$$mn = (x^2 + 3y^2)(u^2 + 3v^2) = (xu + 3yv)^2 + 3(xv - yu)^2.$$

Je tedy i součin obou čísel m a n téhož tvaru.

Příklad 2

Uvažujme celá čísla p, q, r, s , která vyhovují podmínce $ps - qr = 1$. Dokažte, že zlomek

$$\frac{p^2 + q^2}{pr + qs}$$

je v základním tvaru.

Řešení: Nechť d značí největšího společného dělitele celých čísel $p^2 + q^2$ a $pr + qs$. Uvažujme opět identitu (1) pro $n = 2$ a dále $a_1 = p$, $a_2 = q$, $b_1 = r$, $b_2 = s$. Platí tak

$$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) - (pr + qs)^2 = (ps - qr)^2. \quad (3)$$

Protože levá strana rovnosti (3) je dělitelná číslem d , musí být stejným přirozeným číslem dělitelná i její levá strana. Podle zadání úlohy však platí $ps - qr = 1$, tedy $d = 1$.

Uvažovaný zlomek je tudíž v základním tvaru (je nezkracitelný).

Příklad 3

Určete všechny čtveřice (x, y, z, t) celých čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}xz - 2yt &= 3, \\ xt + yz &= 1.\end{aligned}$$

Řešení: Stejně jako v předešlém případě využijeme Lagrangeovu identitu (1) pro $n = 2$. Položíme-li zde $a_1 = x$, $a_2 = y\sqrt{2}$, $b_1 = t\sqrt{2}$ a $b_2 = z$, dostaneme

$$(x^2 + 2y^2)(2t^2 + z^2) - 2(xt + yz)^2 = (xz - 2yt)^2.$$

Ze zadání dále plyne

$$(x^2 + 2y^2)(2t^2 + z^2) = 11.$$

Prvočíslo 11 je rozložitelné na součin dvou přirozených čísel, kdy záleží na jejich pořadí, dvěma způsoby. Platí $11 = 1 \cdot 11$, nebo $11 = 11 \cdot 1$.

Je-li současně $(x^2 + 2y^2) = 1$ a $(2t^2 + z^2) = 11$, nutně pro složky hledaného řešení dané soustavy platí $x = \pm 1$, $y = 0$, $z = \pm 3$ a $t = \pm 1$. Zkouškou se ale přesvědčíme, že dané soustavě rovnic vyhovují v tomto případě pouze dvě čtveřice (x, y, z, t) celých čísel, a to $(1, 0, 3, 1)$ a $(-1, 0, -3, -1)$.

Platí-li $(x^2 + 2y^2) = 11$ a současně $(2t^2 + z^2) = 1$, dostaneme analogickým postupem další dvě celočíselná řešení dané soustavy rovnic, a to $(3, 1, 1, 0)$ a $(-3, -1, -1, 0)$.

Závěr. Daná soustava rovnic má 4 celočíselná řešení, kterými jsou čtveřice $(1, 0, 3, 1)$, $(-1, 0, -3, -1)$, $(3, 1, 1, 0)$ a $(-3, -1, -1, 0)$.

Příklad 4

Je dáno přirozené číslo $n \geq 2$ a reálná čísla x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) taková, že $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$. Dokažte, že pro ně platí nerovnost

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \leq 2 \left| 1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|.$$

Řešení: Využitím identity (1) dostaneme postupně následující odhady

$$\begin{aligned}(x_1y_2 - x_2y_1)^2 &\leq \sum_{i \leq j \leq n} (x_iy_j - x_jy_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 = \\&= 1 - \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_iy_i\right) \left(1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i\right) \leq \\&\leq \left|1 - \sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \cdot \left|1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i\right|.\end{aligned}$$

Podle Cauchy–Schwarzovy nerovnosti (2) ale zároveň platí

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) = 1.$$

Je tedy

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq 1, \quad \text{tj.} \quad \left|1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq 1 + \left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq 2$$

a celkově tak platí nerovnost

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2 \left|1 - \sum_{i=1}^n x_iy_i\right|,$$

kterou jsme chtěli dokázat.

Literatura

- [1] *Soulami, T. B.*: Les olympiades de mathématiques (Réflexes et stratégies). Ellipses, Paris 1999.
- [2] *Steele, J. M.*: The Cauchy–Schwarz Master Class (An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities). Cambridge University Press, 2004.

O jedné vlastnosti součtu mocnin prvních n přirozených čísel

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

O součtech k -tých mocnin prvních n přirozených čísel, tj. o součtech

$$S(k, n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

se s výjimkou vzorce

$$S(1, n) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

studenti mnoho nedovídají. Některým jsou sice známy ještě vzorce

$$S(2, n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S(3, n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ale z těchto znalostí se dá jen stěží usoudit na to, že součet $S(k, n)$ má tuto pozoruhodnou vlastnost:

Pro všechna přirozená čísla n a lichá čísla k je číslo $S(k, n)$ dělitelné číslem $S(1, n)$.

K důkazu tohoto tvrzení použijeme známý fakt, že součet mocnin každých dvou celých čísel a, b s tímž lichým exponentem k je dělitelný součtem těchto čísel:

$$a^k + b^k = (a + b) \cdot m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Předpokládejme nejprve, že v součtu $S(k, n)$ je číslo n sudé, takže platí:

$$\begin{aligned} S(k, n) &= 1^k + 2^k + 3^k + \dots + \left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^k + \dots \\ &\quad \dots + (n-2)^k + (n-1)^k + n^k = \\ &= [1^k + n^k] + [2^k + (n-1)^k] + [3^k + (n-2)^k] + \dots \\ &\quad \dots + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^k\right] \end{aligned}$$

Protože součet k -tých mocnin v každé hranaté závorce je dělitelný číslem $(n+1)$, je tímto číslem dělitelný i součet $S(k, n)$. Ukážeme-li nyní, že součet $S(k, n)$ je dělitelný i číslem $\frac{n}{2}$, bude tento součet dělitelný součinem $\frac{1}{2}n(n+1)$, tj. výrazem $S(1, n)$. Za tím účelem vyjádříme $S(k, n)$ ve tvaru:

$$S(k, n) = [1^k + (n-1)^k] + [2^k + (n-2)^k] + [3^k + (n-3)^k] + \dots \\ \dots + \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right)^k + \left(\frac{n}{2} + 1 \right)^k \right] + \left(\frac{n}{2} \right)^k + n^k$$

Každý výraz v hranaté závorce je dělitelný sudým číslem n , takže je dělitelný i číslem $\frac{n}{2}$; tímto číslem $\frac{n}{2}$ jsou však dělitelné i mocniny $\left(\frac{n}{2}\right)^k$ a n^k , takže číslem $\frac{n}{2}$ je dělitelný celý součet $S(k, n)$. Tím je ukázáno, že číslo $S(k, n)$ je pro sudá n (a lichá k) dělitelné číslem $S(1, n) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Předpokládejme nyní, že v součtu $S(k, n)$ je číslo n liché, takže platí:

$$S(k, n) = 1^k + 2^k + \dots + \left[\frac{1}{2}(n-1) \right]^k + \left[\frac{1}{2}(n+1) \right]^k + \left[\frac{1}{2}(n+3) \right]^k + \dots \\ \dots + (n-2)^k + (n-1)^k + n^k = [1^k + n^k] + [2^k + (n-1)^k] + \dots \\ \dots + \left[\left(\frac{1}{2}(n-1) \right)^k + \left(\frac{1}{2}(n+3) \right)^k \right] + \left(\frac{1}{2}(n+1) \right)^k$$

Každý výraz v hranaté závorce je dělitelný sudým číslem $(n+1)$, takže je dělitelný i číslem $\frac{1}{2}(n+1)$, a protože i poslední sčítanec $\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^k$ je tímto číslem dělitelný, je číslem $\frac{1}{2}(n+1)$ dělitelný i součet $S(k, n)$. Součet $S(k, n)$ je však dělitelný i číslem n , neboť platí:

$$S(k, n) = [1^k + (n-1)^k] + [2^k + (n-2)^k] + \dots \\ \dots + \left[\left(\frac{1}{2}(n-1) \right)^k + \left(\frac{1}{2}(n+1) \right)^k \right] + n^k$$

Odtud je vidět, že každý výraz v hranaté závorce včetně posledního sčítance n^k je dělitelný číslem n , takže je číslem n dělitelný i celý součet $S(k, n)$.

Tím jsme ukázali, že číslo $S(k, n)$ je dělitelné číslem $S(1, n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ i pro lichá n (a lichá k).

Čtenář si jistě všiml, že použití známé vlastnosti součtu mocnin se stejnými lichými exponenty a následné uzávorkování sčítanců $S(k, n)$ do vhodných dvojic byl výborný nápad, který by mohl matematické zázemí některých studentů obohatit. Tento nápad (podotýkám, že nepochází ode mne – kdysi jsem se s ním někde setkal) se nedá použít, je-li číslo k v součtu $S(k, n)$ sudé. Snadno se lze přesvědčit o tom, že součet $S(k, n)$ není pro všechna sudá k dělitelný součtem $S(1, n)$ pro každé přirozené n , ale jen pro některé. Např. pro $k = 2, n = 4$ je součet $S(2, 4) = 30$ součtem $S(1, 4) = 10$ dělitelný, ale pro $k = 2, n = 5$ součet $S(2, 5) = 78$ součtem $S(1, 5) = 15$ dělitelný není.

Písemkové příklady na SŠ 28

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pokračujeme dalšími příklady, které jsou inspirací i praktickou pomůckou pro učitele matematiky. Úvodní komentář nalezne čtenář v [1], poslední pokračování v [2]. Příklady z jednotlivých tématických celků (TC) jsou vybírány nahodile co do zaměření i co do obtížnosti. U každého příkladu jsou uvedeny dvě rovnocenné verze A, B a dále ještě verze C, D na další použití (náhradní písemka, písemka v paralelce, předchozí procvičení či domácí úloha). Je volen stručný text vhodný i k zápisu na tabuli, vyučující si ovšem může text upravit a přizpůsobit podle podmínek ve třídě a v souladu s používanou terminologií a symbolikou.

Chce-li se i některý čtenář podělit o své zkušenosti se svými kolegy a nabídnout jim zadání některých svých osvědčených příkladů pro písemné zkoušení, nechť se s touto nabídkou obrátí na náš časopis.

TC: Řešení rovnic a nerovnic

1. A|[B] Řešte nerovnici s neznámou x a parametrem u [v]:

$$(u^2 + 1)x < 5u(x + 1) + x(1 - 3u) \quad | \quad (v^2 + 4)x \geq 4(v + 2x) + x(3v - 4).$$

Obsah: Úpravy nerovnic jsou zcela jednoduché, jde zejména o zvládnutí diskuse řešení.

Výsledky:

A: Diskutuje se nerovnice po úpravě ve tvaru $u(u - 2)x < 5u$; pro $u \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ je množinou všech řešení $X = \left(-\infty, \frac{5}{u - 2}\right)$, pro $u \in (0, 2)$ je $X = \left(\frac{5}{u - 2}, +\infty\right)$, pro $u = 0$ je $X = \emptyset$, pro $u = 2$ je $X = \mathbb{R}$.

B: Diskutuje se nerovnice po úpravě ve tvaru $v(v - 3)x \geq 4v$; pro $v \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ je množinou všech řešení $X = \left\langle \frac{4}{v - 3}, +\infty \right\rangle$ pro $v \in (0, 3)$ je $X = \left(-\infty, \frac{4}{v - 3}\right)$, pro $v = 0$ je $X = \mathbb{R}$, pro $v = 3$ je $X = \emptyset$.

Verze C|D: Týž text pro nerovnice

$$(u^2 + 5)x > 3u(1 - x) - x(u - 5) \quad | \quad (v^2 - 3)x \leq 2v(1 - 2x) - x(v + 3).$$

Výsledky:

C: Diskutuje se nerovnice po úpravě ve tvaru $u(u + 4)x > 3u$; pro $u \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ je množinou všech řešení $X = \left(\frac{3}{u + 4}, +\infty\right)$, pro $u \in (-4, 0)$ je $X = \left(-\infty, \frac{3}{u + 4}\right)$, pro $u = 0$ je $X = \emptyset$, pro $u = -4$ je $X = \mathbb{R}$.

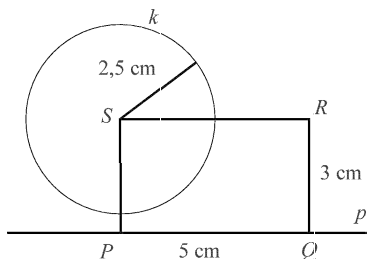
D: Diskutuje se nerovnice po úpravě ve tvaru $v(v + 5)x \leq 2v$; pro $v \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$ je množinou všech řešení $X = \left(-\infty, \frac{2}{v + 5}\right]$, pro $v \in (-5, 0)$ je $X = \left[\frac{2}{v + 5}, +\infty\right)$, pro $v = 0$ je $X = \mathbb{R}$, pro $v = -5$ je $X = \emptyset$.

TC: Základy planimetrie

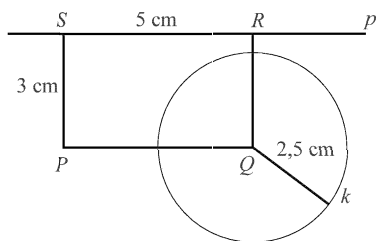
2. **A|[B]** Je dán obdélník $PQRS$ ($|PQ| = 5$ cm, $|QR| = 3$ cm), kružnice $k = (S; 2,5$ cm) [$k = (Q; 2,5$ cm)] a přímka $p = PQ$ [$p = SR$]. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABR [PBC] tak, aby $A \in k$, $B \in p$ [$B \in k$, $C \in p$].

Obsah: Sestrojení obdélníku a kružnice, otočení přímky (nebo kružnice) o 60° .

Výsledky: Zadání viz na obr. 1a, 1b. Úloha má 2 řešení.



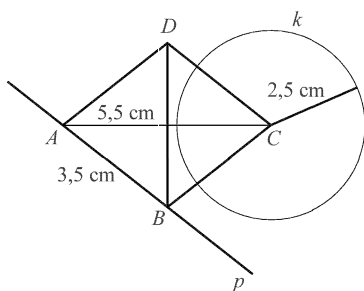
Obr. 1a



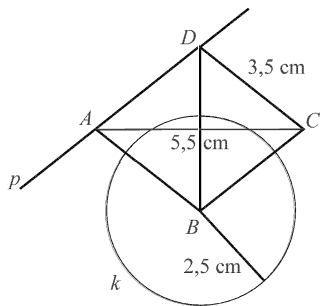
Obr. 1b

Verze C|[D]: Je dán kosočtverec $ABCD$ ($AB = 3,5$ cm, $AC = 5,5$ cm) kružnice $k = (C; 2,5$ cm) [$k = (B; 2,5$ cm)] a přímka $p = AB$ [$p = AD$]. Sestrojte rovnostranný trojúhelník PKD [PKC] tak, aby $K \in k$, $P \in p$.

Výsledky: Zadání viz na obr. 1c, 1d. Úloha má 2 řešení.



Obr. 1c



Obr. 1d

TC: Kombinatorika a pravděpodobnost

3. A[B] Je dáno 6 [5] prvků – písmen a, b, c, d, e, f [u, v, x, y, z]. Jaká je pravděpodobnost jevu J_1 : V náhodně vybrané permutaci prvků jsou samohlásky *vedle sebe*, a jevu J_2 : ... *co nejdál od sebe*.

Obsah: Permutace n prvků, snížení počtu prvků permutace vytvořením dvojice ae , resp. ea [uy , resp. yu] na sousedních pozicích nebo na 1. a poslední pozici, klasická definice pravděpodobnosti.

Výsledky:

$$\begin{aligned} \text{A: } J_1: p_1 &= \frac{2 \cdot 5!}{6!} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}; & J_2: p_2 &= \frac{2 \cdot 4!}{6!} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}; \\ \text{B: } J_1: p_1 &= \frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}; & J_2: p_2 &= \frac{2 \cdot 3!}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}; \end{aligned}$$

Verze C[D]: Je dána množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Jaká je pravděpodobnost jevu J_1 : V náhodně vybrané kombinaci 5. třídy jsou právě dvě sudá [lichá] čísla, J_2 : ... nejsou současně čísla 1 a 2 [1, 2 a 3].

Výsledky:

$$\begin{aligned} \text{C: } J_1: p_1 &= \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{9}{5}} = \frac{6 \cdot 10}{126} = \frac{10}{21}; \\ J_2: p_2 &= 1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{9}{5}} = 1 - \frac{35}{126} = 1 - \frac{15}{18} = \frac{13}{18}; \\ \text{D: } J_1: p_1 &= \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{5}} = \frac{10 \cdot 6}{126} = \frac{10}{21}; \\ J_2: p_2 &= 1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{5}} = 1 - \frac{15}{126} = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}; \end{aligned}$$

TC: Diferenciální a integrální počet

4. A|[B] Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3 \quad | \quad y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 3$$

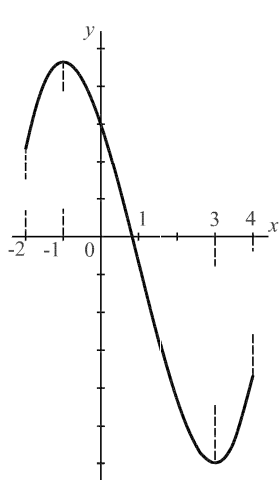
na intervalu $\langle -2, 4 \rangle$ [$[-4, 2]$].

Obsah: Využití 1. a 2. derivace k vyšetření průběhu funkce.

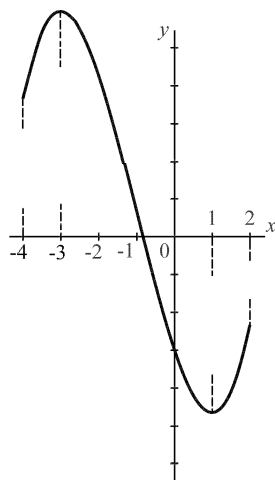
Výsledky: A: $y' = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, $y'' = 2x - 2 = 2(x - 1)$; další údaje jsou v tab. 1a.

x	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, 4)$	4
y	7/3		14/3		-2/3		-6		-11/3
y'	> 0		0	< 0			0	> 0	
y''	< 0				0	> 0			
funkce	roste		lok. max.	klesá			lok.min.	roste	
	konkávní				inflexe		konvexní		
	$f(0) = 3$								
Obr. 2a									

Tab. 1a



Obr. 2a

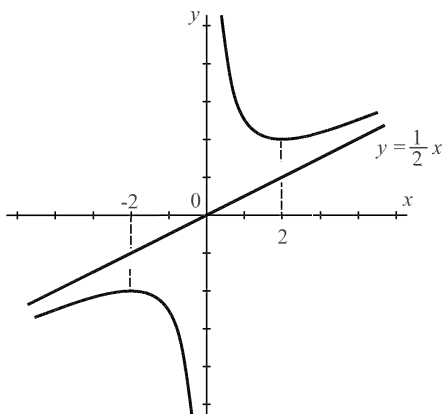


Obr. 2b

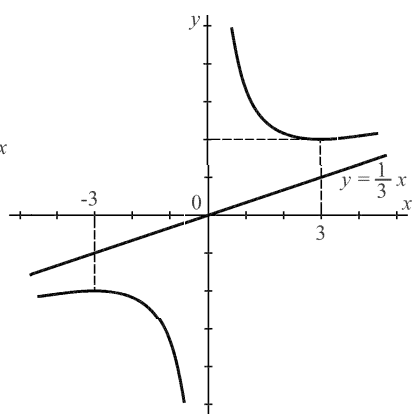
B: $y' = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, $y'' = 2x + 2 = 2(x + 1)$; další údaje jsou v tab. 1 b.

x	-4	$(-4, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 2)$	2
y	11/3		6		2/3		-14/3		-7/3
y'	> 0		0	< 0			0	> 0	
y''	< 0				0	> 0			
funkce	roste		lok. max.	klesá			lok.min.	roste	
	konkávni				inflexe		konvexní		
	$f(0) = -3$								Obr. 2b

Tab. 1b



Obr. 2c



Obr. 2d

Verze C|D: Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \quad | \quad y = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}.$$

Výsledky: C: $y' = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$, $y'' = \frac{4}{x^2}$; další údaje jsou v tab. 1c.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y		-2		n. def.		2	
y'	> 0	0	< 0	n.def.	< 0	0	> 0
y''	< 0			n.def.	< 0		
funkce	roste	lok.max.	klesá	asympt.	klesá	lok.min.	roste
	konkávní			$x = 0$	konvexní		
	asymptota $y = x/2$ pro $x \rightarrow \pm\infty$; $f(1) = 5/2$ $f(-1) = -5/2$ $f(6) = 10/3$ $f(-6) = -10/3$ Obr. 2c						

Tab. 1c

D: $y' = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{3x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{3x^2}$, $y'' = \frac{6}{x^2}$; další údaje jsou v tab. 1d.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y		-2		n. def.		2	
y'	> 0	0	< 0	n.def.	< 0	0	> 0
y''	< 0			n.def.	< 0		
funkce	roste	lok.max.	klesá	asympt.	klesá	lok.min.	roste
	konkávní			$x = 0$	konvexní		
	asymptota $y = x/3$ pro $x \rightarrow \pm\infty$; $f(1) = 10/3$ $f(-1) = -10/3$ $f(6) = 5/2$ $f(-6) = -5/2$ Obr. 2d						

Tab. 1d

Literatura

- [1] Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 1. MFI, roč. 3 (1993/94), č. 2.
- [2] Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 26. MFI, roč. 14 (2004/05), č. 6.

56. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

víte-li, že má čtyři různé reálné kořeny, přičemž součet dvou z nich je roven číslu 1.

Jaromír Šimša

A–I–2

Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC , CA , AB po řadě v bodech K , L , M . Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK . Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné.

Peter Novotný

A–I–3

Jsou-li x, y, z reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ splňující podmínku $xy + yz + zx = 1$, pak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leq 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Jaroslav Švrček

A–I–4

Určete, pro která přirozená čísla n je možno množinu $M = \{1, 2, \dots, n\}$ rozdělit a) na dvě, b) na tři navzájem disjunktní podmnožiny o stejném počtu prvků tak, aby každá z nich obsahovala také aritmetický průměr všech svých prvků.

Peter Novotný

A–I–5

V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC , jejichž strana BC je průměrem kružnice k .

Jiří Dula

A–I–6

Určete všechny funkce $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006).$$

Petr Kaňovský

KATEGORIE B**B–I–1**

Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

Pavel Novotný

B–I–2

Je dána kružnice k s průměrem AB . K libovolnému bodu Y kružnice k , $Y \neq A$, sestrojme na polopřímce AY bod X , pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X .

Pavel Leischner

B–I–3

Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že každá k -prvková množina trojmístných, po dvou nesoudělných přirozených čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.

Pavel Novotný

B–I–4

V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC . Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB , pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový.

Ján Mazák

B–I–5

Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$.

Jozef Moravčík

B–I–6

Je dána úsečka AA_0 a přímka p . Sestrojte trojúhelník s vrcholem A a výškou AA_0 , jehož těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce p .

Eva Řídká

KATEGORIE C**C–I–1**

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

Jaroslav Švrček

C–I–2

Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.

Ján Mazák

C–I–3

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž zápis neobsahuje nulu a má následující vlastnost: vynecháme-li v něm libovolnou číslici, dostaneme číslo, které je dělitelem původního čísla.

Jaromír Šimša

C–I–4

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD . Označme E střed strany AB , F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE . Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A, F, C leží v přímce.

Ján Mazák

C–I–5

Zjistěte, pro které přirozené číslo n je podíl

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) co největší, b) co nejmenší přirozené číslo.

Eva Řídká

C–I–6

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , v němž D je pata výšky z vrcholu C a V průsečík výšek. Dokažte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$, právě když $|CD| = |AB|$.

Jaroslav Zhouf

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2006 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc.

Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 129

V oboru přirozených čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}D(x, y) &= D(x + 3, y + 3), \\n(x + 3, y + 3) &= 2 \cdot n(x, y),\end{aligned}$$

kde $D(x, y)$, $n(x, y)$ značí největšího společného dělitele, resp. nejmenší společný násobek přirozených čísel x a y .

Jaroslav Švrček

Úloha 130

Nechť C je vnitřní bod úsečky AB . Určete množinu všech bodů D takových, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku CBD je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ACD .

Jaroslav Zhouf