

MATEMATIKA

Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie

Část IV (Co jsme s Cabri objevili, dokážeme užitím trilineárních souřadnic)

MILAN KOMAN – RUDOLF FRITSCH

Pedagogická fakulta UK, Praha – Ludwig-Maximilians-Universität, Mathematisches
Institut, München, SRN

Co jsme objevili, a co budeme dokazovat

V druhé části našeho seriálu „*Posviťme si s Cabri . . .*“ (viz [1]) jsme se zabývali řešením následující úlohy. Jak vyplývá z jejího řešení, můžeme ji nazvat úlohou o třech Apolloniových kružnicích

Úloha

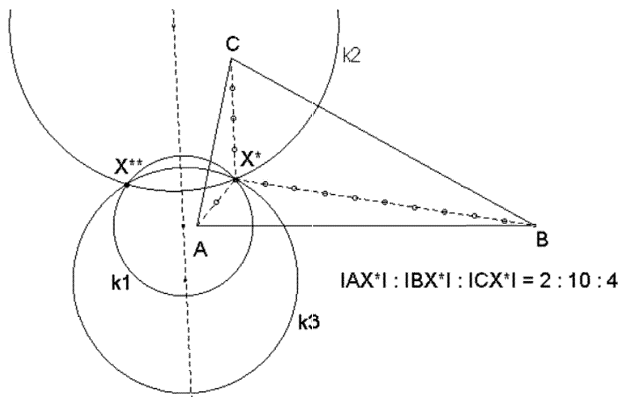
Je dán trojúhelník ABC a tři kladná reálná čísla a, b, c . Úkolem bylo sestrojit všechny body X , pro něž platí

$$|AX| : |BX| : |CX| = a : b : c. \quad (1)$$

Hledané body jsme sestrojovali jako společné body tří Apolloniových kružnic. První kružnice k_1 byla množinou bodů, které mají od vrcholů A, B poměr vzdáleností $|AX| : |BX| = a : b$. Další dvě kružnice k_2 a k_3 byly množinami bodů, pro které platilo:

$$|BX| : |CX| = b : c \quad \text{a} \quad |CX| : |AX| = c : a.$$

Na obrázku 1 je znázorněno řešení pro daný trojúhelník ABC a pro čísla $a = 2, b = 10, c = 4$. Úloha má v tomto případě dvě řešení, bod X^* a X^{**} . Zjistili jsme také, že kružnice k_1, k_2 a k_3 patří jednomu svazku kružnic, který jsme označovali $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$. Dali jsme mu i jméno, *Apolloniův svazek kružnic*.



Obr. 1

Všechny kružnice Apolloniova svazku mají společnou chordálu h . Zjistili jsme, že všechny chordály h , nezávisle na hodnotách čísel a, b, c , procházejí jediným bodem a patří tak svazku přímek. Trochu nás potrápilo určení polohy středu svazku těchto chordál. Nakonec jsme zjistili, že středem tohoto svazku je střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Pak jsme se začali zabývat klasickou otázkou, kterou si zpravidla klademe při řešení konstrukčních úloh: Kdy má naše úloha řešení a kolik má řešení? Jinými slovy, kdy existují dva, kdy jeden nebo kdy žádný bod X vyhovující podmínce (1). Tuto otázku můžeme formulovat také takto:

Otázka:

Kdy je Apolloniův svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$ eliptický (tj. kružnice k_1, k_2 a k_3 mají dva společné body), kdy parabolický (tj. kružnice k_1, k_2 a k_3 mají jediný společný bod) a kdy hyperbolický (tj. kružnice k_1, k_2 a k_3 nemají žádný společný bod).

Odpověď na tuto otázku jsme hledali ve třetí části našeho seriálu (viz [2]) pomocí Cabri geometrie. Získali jsme tři překvapující odpovědi. Klíčem

k prvnímu objevu byl poznatek **P** a zobrazení **L**⁽¹⁾. Obměnou zobrazení **L**⁽¹⁾ jsme pak došli ještě ke dvěma dalším objevům, ke kterým přejdeme později.

P : Věděli jsme, že když mají kružnice k_1 , k_2 a k_3 jediný společný bod X , leží tento bod na kružnici k opsané trojúhelníku ABC . (Jinak řečeno: body A , B , C a bod X jsou vrcholy tětívového čtyřúhelníku.) Když mají kružnice k_1 , k_2 a k_3 dva společné body X_1 a X_2 , jsou to body, které si odpovídají v kruhové inverzi s řídicí kružnicí k .

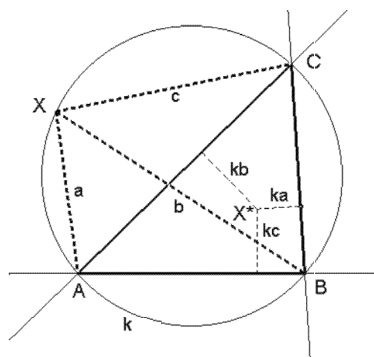
L⁽¹⁾: Použili jsme zobrazení, které bodům X kružnice k opsané trojúhelníku ABC přiřazovalo tři nové pomocné body X^* . Ty jsme sestrojili takto: Zjistili jsme vzdálenosti bodu X od vrcholů trojúhelníku ABC

$$a = |AX|, \quad b = |BX|, \quad c = |CX| \quad (2)$$

a pak jsme sestrojili body X^* tak, aby měly od přímek BC , CA , AB po řadě stejný poměr vzdáleností jako bod X od vrcholů A , B , C .

$$|X^*, BC| : |X^*, CA| : |X^*, AB| = a : b : c. \quad (3)$$

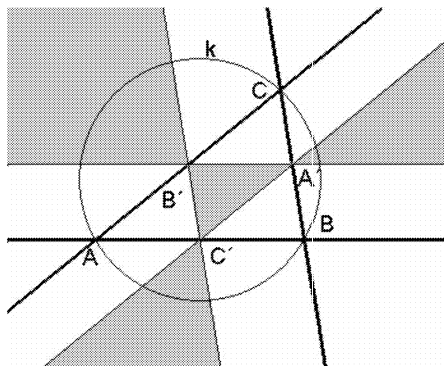
Vzdálenosti bodu X^* od přímek BC , CA , AB se tak rovnaly k -násobkům čísel (2). Na obr. 2 je znázorněn jeden z bodů X^* , ten který leží uvnitř trojúhelníku ABC . Další na obrázku neznázorněné body leží v oblastech, ve kterých leží středy kružnic připsaných trojúhelníku ABC .



Obr. 2

Jak probíhalo experimentování? Nejdříve jsme sestrojili v zobrazení **L**⁽¹⁾ obrazy X^* bodů X . Pak jsme zkoumali, po kterých drahách se pohybují

tyto body, když bod X probíhá po kružnici k opsané trojúhelníku ABC . Výsledkem byly hranice čtyř vyznačených oblastí na obr. 3. Jednou oblastí je trojúhelník $A'B'C'$ tvořený středními příčkami daného trojúhelníku ABC . Další tři oblasti jsou vrcholové úhly k vnitřním úhlům trojúhelníku $A'B'C'$.



Obr. 3

Na obr. 3 můžeme odpověď na shora uvedenou otázku zjistit pomocí následující věty:

Věta 14

Apolloniův svazek $\mathcal{A}$ (A, B, C, a, b, c) je eliptický (parabolický), právě když čísla a, b, c jsou vzdálenosti některého bodu X náležejícího vnitřku (hranici) jedné ze šedě vyznačených oblastí na obr. 3 od přímek BC , CA a AB , tj. právě když

$$a = |X, BC|, b = |X, CA|, c = |X, AB|. \quad (4)$$

To byl první překvapující výsledek, ke kterému jsme došli ve třetí části našeho seriálu, viz [2]. Tento výsledek (i ostatní dva překvapující výsledky) mají však jeden „malý“ nedostatek. Jsou odvozeny jen na základě experimentování s Cabri geometrií. Nespornou předností takového experimentování je jeho objevitelský přínos. V tom je jeho didaktický přínos. Z matematického hlediska je však žádoucí doplnit ještě důkaz tohoto tvrzení opírající se o některou matematickou metodu. To bude předmětem tohoto příspěvku.

Ptolemaiova věta a trilineární souřadnice – klíče k matematickému řešení

Abychom dokázali všechny tři výsledky získané v článku [2], potřebujeme takový aparát, který umožní „přeložit“ poznatek **P** a zobrazení **L**⁽¹⁾ do jazyka algebry. V případě poznatku **P** je to následující věta

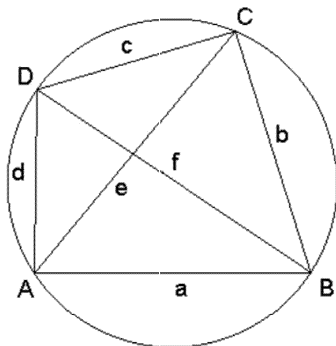
Věta 15 (zobecněná Ptolemaiova*) věta)

Nechť $ABCD$ je libovolný čtyřúhelník. Potom pro jeho strany $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ a úhlopříčky $e = |AC|$, $f = |BD|$ platí

$$ac + bd \geq ef. \quad (5)$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, je-li čtyřúhelník $ABCD$ tětíivový (obr. 4).

S důkazem zobecněné Ptolemaiovy věty se mohou čtenáři seznámit např. v práci [3], která vyšla v minulém čísle našeho časopisu. V této práci lze nalézt odkazy na další publikace věnované Ptolemaiově větě.



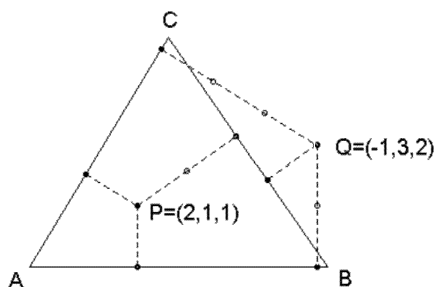
Obr. 4

Pro využití zobrazení **L**⁽¹⁾ je vhodným početním aparátem **soustava trilineárních souřadnic (STL)**

*) Klaudios Ptolemaios byl řeckým matematikem žijícím asi od roku 100 do roku 160 po Kristu

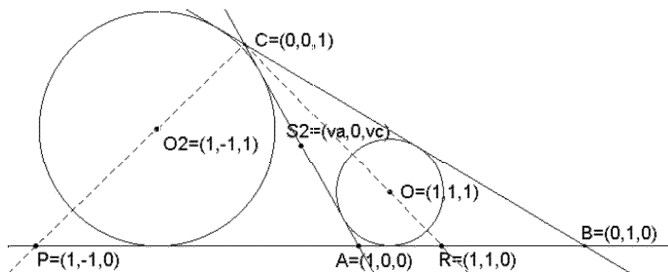
STL: *Soustava trilineárních souřadnic v rovině je určena třemi body A, B, C neležícími v přímce a přímkami BC, CA a AB . Trilineární souřadnice libovolného bodu P jsou takové uspořádané trojice reálných čísel (kx, ky, kz) , kde k je libovolné nenulové reálné číslo a x, y, z jsou orientované vzdálenosti bodu P po řadě od přímek BC, CA, AB . Přitom orientovaná vzdálenost např. bodu P od přímky BC je kladné (záporné) číslo, právě když tato přímka body A, P neodděluje (odděluje).*

Ukázka určení trilineárních souřadnic bodů P a Q je na obr. 5.



Obr. 5

Na obr. 6 si mohou čtenáři ověřit souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC , středu O kružnice vepsané trojúhelníku ABC , středu O_2 kružnice připsané k trojúhelníku ABC ke straně AC , průsečíků R, P os vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C se stranou (přímkou) AB a konečně středu S_2 strany AC , kde v_a, v_c jsou výšky trojúhelníku ABC .

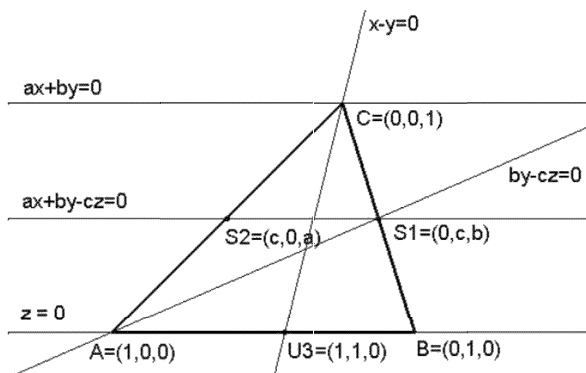


Obr. 6

Stojí za povšimnutí, že na rozdíl od kartézských souřadnic nejsou trilineární souřadnice určeny jednoznačně. Jednoznačně je určen jen poměr čísel $kx : ky : kz = x : y : z$. Tak střed O vepsané kružnice má nejen souřadnice $(1, 1, 1)$, ale také například souřadnice $(-1, -1, -1)$ nebo $(\varrho, \varrho, \varrho)$, kde ϱ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

Podobně střed S_2 strany AC má vedle souřadnic $(v_a, 0, v_c)$ například souřadnice $(c, 0, a)$, kde a, c jsou délky stran trojúhelníku ABC . Z rovnosti $\frac{1}{2}a \cdot v_a = \frac{1}{2}c \cdot v_c$ totiž plyne $v_a : v_c = c : a$. Těm, kteří znají projektivní geometrii mohou trilineární souřadnice připomínat projektivní souřadnice.

V trilineárních souřadnicích mají **přímky rovnice** tvaru $px + qy + rz = 0$, kde alespoň jeden z koeficientů p, q, r je různý od nuly. Podobně jako v kartézských souřadnicích i zde platí: Bod leží na přímce, právě když jeho souřadnice vyhovují rovnici přímky. To si můžete ověřit pro některé přímky na obr. 7, například pro střední příčku S_1S_2 . Ta má rovnici $ax + by - cz = 0$, kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC . Leží na ní i nevlastní bod $U_\infty = (b, -a, 0)$, který je společný všem rovnoběžným přímkám s přímkou AB . Podobně lze ověřit správnost rovnice osy vnitřního úhlu při vrcholu C nebo rovnici těžnice z vrcholu A , které jsou uvedeny na obr. 7.



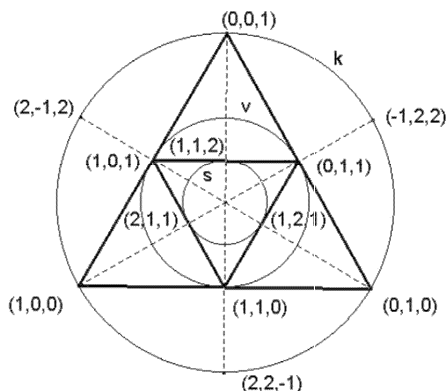
Obr. 7

Rovnice kružnic jsou komplikovanější. Uvedeme tři ukázky. Rovnice kružnice k opsané a kružnice v vepsané rovnostrannému trojúhelníku. A jako třetí rovnici tzv. *Spiekerovy kružnice* s , to je kružnice vepsané trojúhelníku ze středních příček. Rovnice těchto kružnic jsou uvedeny na obr. 8. Doporučujeme čtenáři, aby si jejich správnost ověřil dosazením souřadnic bodů, které na těchto kružnicích leží.

$$k \equiv xy + xz + yz = 0$$

$$v \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

$$s \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{5}xy - \frac{3}{5}xz - \frac{3}{5}yz = 0$$



Obr. 8

Důkazy vět z článku [2]

Nejdříve dokážeme větu 14 z úvodní části tohoto příspěvku.

Důkaz: Věta 14 říká, že eliptickým svazkům Apolloniových kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$ odpovídají body náležející vnitřkům šedě vyznačených oblastí na obrázku 3. Hranice těchto oblastí odpovídají parabolickým svazkům. Náš důkaz omezíme na trojúhelníkovou oblast $A'B'C'$ (obr. 9). Vrcholy trojúhelníku $A'B'C'$ mají trilineární souřadnice

$$A' = (0, |AB|, |CA|), \quad B' = (|AB|, 0, |BC|), \quad C' = (|CA|, |BC|, 0).$$

Strany tohoto trojúhelníku mají rovnice:

$$A'B' \equiv |BC| \cdot x + |CA| \cdot y - |AB| \cdot z = 0,$$

$$A'C' \equiv |BC| \cdot x - |CA| \cdot y + |AB| \cdot z = 0,$$

$$B'C' \equiv -|BC| \cdot x + |CA| \cdot y + |AB| \cdot z = 0.$$

Pro souřadnice vnitřních bodů trojúhelníku $A'B'C'$ platí^{*)}

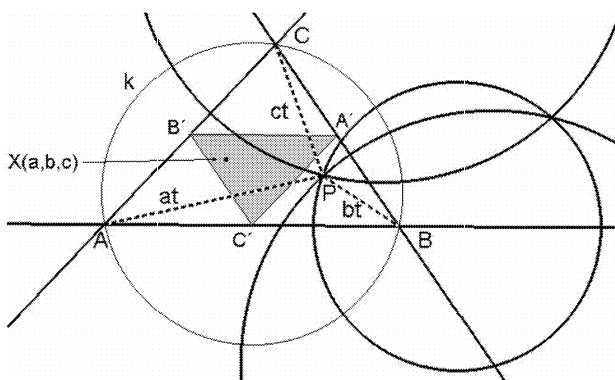
$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} |BC| \cdot x + |CA| \cdot y &> |AB| \cdot z, \\ |BC| \cdot x + |AB| \cdot z &> |CA| \cdot y, \\ |CA| \cdot y + |AB| \cdot z &> |BC| \cdot x, \end{aligned} \quad (7)$$

kde nerovnosti (7) popisují poloroviny $A'B'C'$, $C'A'B'$ a $B'C'A'$,

Vezměme nyní eliptický svazek $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$ a odpovídající Apolloniův bod P , který leží ve vnitřní oblasti kružnice k opsané trojúhelníku ABC , (obr. 9). Potom je

$$a : b : c = |PA| : |PB| : |PC|.$$



Obr. 9

To znamená, že existuje takové kladné číslo t , že platí

$$|PA| = at, \quad |PB| = bt, \quad |PC| = ct. \quad (8)$$

^{*)} Podobně jako v kartézských souřadnicích jsou vnitřky opačných polorovin určených např. přímkou $A'B' \equiv |BC| \cdot x + |CA| \cdot y + |AB| \cdot z = 0$ popsány nerovnicemi $|BC| \cdot x + |CA| \cdot y - |AB| \cdot z > 0$ a $|BC| \cdot x + |CA| \cdot y - |AB| \cdot z < 0$. Pro polorovinu obsahující bod C' (obr. 9) platí první nerovnice, pro opačnou polorovinu druhá nerovnice.

Uvažujme čtyřúhelník $ACBP$. Protože není tětiový, dostaneme podle Ptolemaiovy věty ostrou nerovnost

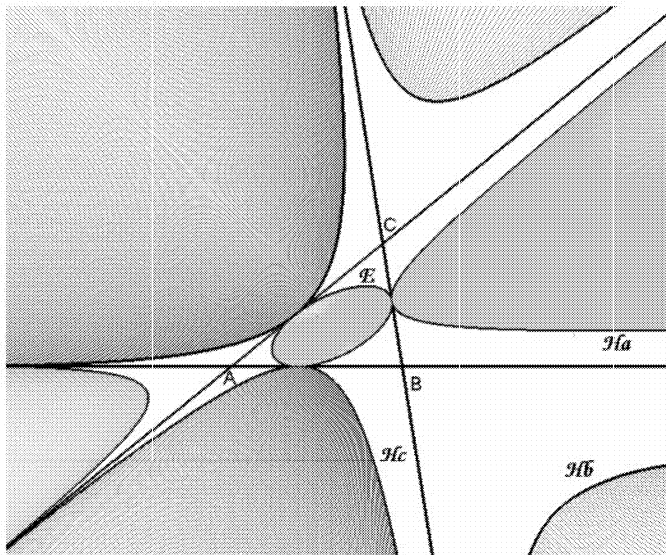
$$|BC| \cdot |PA| + |CA| \cdot |PB| > |AB| \cdot |PC|.$$

Dosadíme-li do ní za $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$ podle (8) a vydělíme ji současně koeficientem t , dostaneme

$$|BC| \cdot a + |CA| \cdot b > |AB| \cdot c. \quad (9a)$$

Podobně ze čtyřúhelníků $APCB$ a $ACPD$ dostaneme pomocí Ptolemaiovy věty nerovnosti

$$|BC| \cdot a + |AB| \cdot c > |CA| \cdot b, \quad |CA| \cdot b + |AB| \cdot c > |BC| \cdot a. \quad (9b)$$



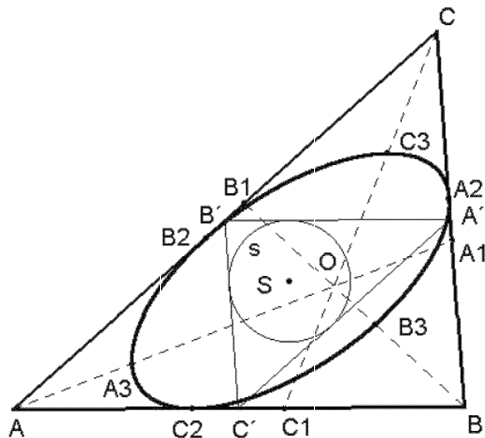
Obr. 10

Nerovnosti (9a) a (9b) ukazují, že trilineární souřadnice bodu $X(a, b, c)$ vyhovují nerovnostem (7). Bod $X(a, b, c)$ tedy náleží trojúhelníku $A'B'C'$. Celý postup lze obrátit. Tím je věta 1 dokázána pro vnitřek trojúhelníku

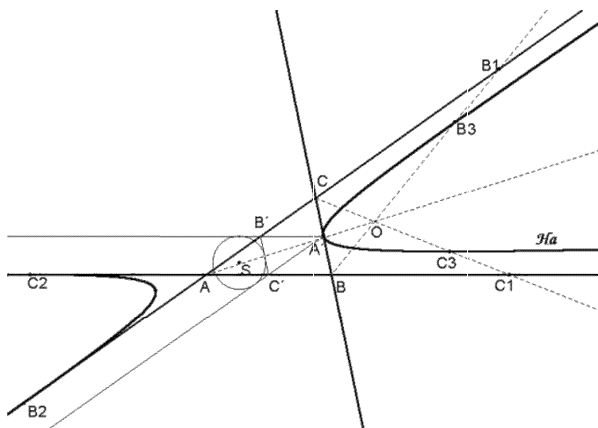
$A'B'C'$. Důkaz pro ostatní šedě vyznačené oblasti na obr. 3 je obdobný, jen musíme zohlednit znaménka souřadnic. Také pro parabolický svazek $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$ je důkaz obdobný, místo s nerovnicemi (7) se pracuje s odpovídajícími rovnostmi.

Přejděme k druhému překvapivému výsledku z článku [2]. Podstatou roli v něm hrají šedě vyznačené oblasti na obrázku 10. Jejich hranice tvoří elipsa $\mathcal{E}$ vepsaná trojúhelníku ABC a tři hyperboly $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b, \mathcal{H}_c$ připsané trojúhelníku ABC , tj. hyperboly dotýkající se vždy jedné strany a prodloužení zbylých dvou stran trojúhelníku ABC . Nejdříve popíšeme konstrukci těchto kuželoseček a pak uvedeme jejich význam (viz dále uvedená věta 16).

Konstrukce elipsy $\mathcal{E}$. V trojúhelníku ABC sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ ze středních příček a střed S kružnice vepsané tomuto trojúhelníku (obr. 11). Bod S je již středem hledané elipsy $\mathcal{E}$. Dále sestrojíme osy vnitřních úhlů AA_1, BB_1 a CC_1 trojúhelníku ABC . Najdeme po řadě obrazy A_2, B_2 a C_2 bodů A_1, B_1 a C_1 v souměrnostech podle středů A', B' a C' . To jsou body dotyku hledané elipsy $\mathcal{E}$ se stranami trojúhelníku ABC . Konečně sestrojíme body A_3, B_3 a C_3 a to jako obrazy bodů A_2, B_2 a C_2 ve středové souměrnosti se středem S . Sami můžete zjistit, že $|AA_3| = |A_1O|$, $|BB_3| = |B_1O|$ a $|CC_3| = |C_1O|$, kde O je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Elipsu $\mathcal{E}$ můžeme nyní sestrojit z některých pěti ze šesti bodů $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ pomocí Cabri geometrie (stačí v tomto programu otevřít roletu se záhlavím konstrukce kružnice).



Obr. 11



Obr. 12

Konstrukce hyperboly $\mathcal{H}_a$ připsané ke straně BC trojúhelníku ABC (obr. 12). Konstrukce je jednoduchou obměnou konstrukce elipsy $\mathcal{E}$. Sestrojíme opět trojúhelník $A'B'C'$ ze středních příček trojúhelníku ABC . Středem hyperboly $\mathcal{H}_a$ je střed S kružnice připsané trojúhelníku $A'B'C'$ ke straně $B'C'$. V trojúhelníku ABC sestrojíme osu vnitřního úhlu při vrcholu A a osy vnějších úhlů při vrcholech B, C . Jejich průsečíky s protějšími stranami jsou body A_1, B_1 a C_1 . Najdeme jejich obrazy A_2, B_2 a C_2 po řadě ve středových souměrnostech se středy A', B' a C' . Tím dostaneme body dotyku hyperboly $\mathcal{H}_a$ s přímkami BC, CA a AB . Zbývá sestrojit body A_3, B_3 a C_3 podobně jako v případě elipsy $\mathcal{E}$.

Význam sestrojených kuželoseček udává věta 16.

Věta 16

Apolloniův svazek kružnic $A(A, B, C, a, b, c)$ je eliptický (parabolický), právě když čísla a, b, c jsou druhé odmocniny vzdáleností některého bodu X náležejícího vnitřku (hranici) jedné ze šedě vyznačených oblastí na obrázku 10 od přímek BC, CA a AB , tj. právě když

$$a = \sqrt{|X', BC|}, \quad b = \sqrt{|X', CA|}, \quad c = \sqrt{|X', AB|}. \quad (10)$$

Poznámka. Rovnosti (10) můžeme vyjádřit pomocí trilineárních souřadnic bodu X . Bod X má trilineární souřadnice (a^2, b^2, c^2) nebo $(-a^2, b^2, c^2)$

nebo $(a^2, -b^2, c^2)$ nebo $(a^2, b^2, -c^2)$ v závislosti na tom, v které oblasti vymezené přímkami BC , CA a AB leží.

Důkaz: Uvažujme, podobně jako při důkazu věty 1, eliptický svazek $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$. Nechť P je Apolloniův bod tohoto svazku, který leží ve vnitřní oblasti kružnice k opsané trojúhelníku ABC . (Jde o podobnou situaci jako na obrázku 9.) Potom pro čísla a, b, c platí nerovnosti (9a) a (9b). Odtud vynásobením těchto nerovností dostaneme

$$(|BC| \cdot a + |CA| \cdot b - |AB| \cdot c)(|BC| \cdot a + |AB| \cdot c - |CA| \cdot b)(|CA| \cdot b + |AB| \cdot c - |BC| \cdot a) > 0.$$

Po vynásobení kladným výrazem $(|BC| \cdot a + |CA| \cdot b + |AB| \cdot c)$ dostaneme nerovnost

$$(|BC| \cdot a + |CA| \cdot b + |AB| \cdot c) \cdot (|BC| \cdot a + |CA| \cdot b - |AB| \cdot c) \cdot (|BC| \cdot a + |AB| \cdot c - |CA| \cdot b) \cdot (|CA| \cdot b + |AB| \cdot c - |BC| \cdot a) > 0.$$

Odtud po roznásobení dostaneme

$$2(|AB|^2 \cdot |BC|^2 \cdot a^2 \cdot c^2 + |AB|^2 \cdot |CA|^2 \cdot b^2 \cdot c^2 + |BC|^2 \cdot |CA|^2 \cdot a^2 \cdot b^2) - |BC|^4 \cdot a^4 - |CA|^4 \cdot b^4 - |AB|^4 \cdot c^4 > 0.$$

To však znamená, že souřadnice bodu (a^2, b^2, c^2) vyhovují nerovnici

$$2(|AB|^2 \cdot |BC|^2 \cdot x \cdot z + |AB|^2 \cdot |CA|^2 \cdot y \cdot z + |BC|^2 \cdot |CA|^2 \cdot x \cdot y) - |BC|^4 \cdot x^2 - |CA|^4 \cdot y^2 - |AB|^4 \cdot z^2 > 0. \quad (11)$$

A to je nerovnice vnitřní oblasti elipsy, kterou jsme označili jako $\mathcal{E}$. Rovnici elipsy $\mathcal{E}$ dostaneme tak, že v (11) zaměníme znaménko nerovnosti „>“ znaménkem rovnosti. Společné body této elipsy s přímkou AB dostaneme tak, že v rovnici dosadíme $z = 0$. Dostaneme po úpravě rovnici

$$-(|BC|^2 \cdot x - |CA|^2 \cdot y)^2 = 0. \quad (12)$$

Odtud je vidět, že elipsa má s přímkou AB společný dvojnásobný bod se souřadnicemi

$$(|CA|^2, |BC|^2, 0), \quad (13)$$

které dostaneme řešením rovnice (12). Tento bod je proto bodem dotyku elipsy $\mathcal{E}$ s přímkou AB .

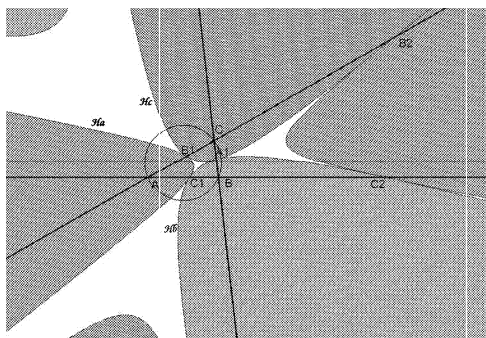
Poměrně jednoduchým výpočtem se lze přesvědčit, že je to skutečně bod C_2 z obrázku 11. Důkaz, že středem elipsy $\mathcal{E}$ je střed S kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ lze nalézt v práci [4].

Nakonec přejdeme ke třetímu překvapivému výsledku z práce [2], který upřesňuje věta 17.

Věta 17

Apolloniův svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$ je eliptický (parabolický), právě když čísla a, b, c jsou druhé mocniny vzdáleností některého bodu X náležejícího vnitřku (hranici) jedné z bílých oblastí na obrázku 13 od přímek BC, CA a AB , tj. právě když

$$a = |X, BC|^2, \quad b = |X, CA|^2, \quad c = |X, AB|^2. \quad (14)$$



Obr. 13

Poznámka. Rovnosti (14) můžeme vyjádřit pomocí trilineárních souřadnic bodu X . Bod X má trilineární souřadnice

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} \right) \quad \text{nebo} \quad \left(-\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} \right) \quad \text{nebo} \\ & \left(\sqrt{a}, -\sqrt{b}, \sqrt{c} \right) \quad \text{nebo} \quad \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, -\sqrt{c} \right) \end{aligned}$$

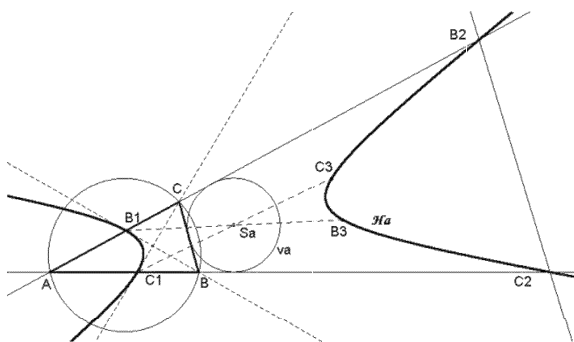
v závislosti na tom, ve které oblasti vymezené přímkami BC, CA a AB leží.

Popíšeme si nejdříve konstrukci hyperbol, které ohraničují bílé oblasti na obr. 13. Stačí popsat jednu z nich.

Konstrukce hyperboly $\mathcal{H}_a$ (obr. 14). Sestrojíme na přímkách AC a AB po řadě body B_1, C_1 se souřadnicemi

$$B_1 \left(\sqrt{BC}, 0\sqrt{BA} \right) \text{ a } C_1 \left(\sqrt{CA}, 0\sqrt{BC} \right).$$

Porovnejte souřadnice těchto bodů se souřadnicemi bodu C_2 z obrázku 11, tj. s rovností (11).



Obr. 14

V bodech B_1 a C_1 se hyperbola $\mathcal{H}_a$ dotýká přímek BB_1 a CC_1 . Pak sestrojíme B_1 a B_2 tak, aby čtveřice bodů ACB_1B_2 a AB_1C_2 tvořily harmonickou čtveřici. Body B_2 a C_2 hyperbola $\mathcal{H}_a$ také prochází. Navíc se v bodě B_2 dotýká hyperboly $\mathcal{H}_c$ a v bodě C_2 hyperboly $\mathcal{H}_b$ (viz obr. 13). Středem hyperboly $\mathcal{H}_a$ je střed S_a kružnice připsané trojúhelníku ABC podél strany BC . Můžeme tak sestrojit například další dva body B_3 a C_3 hyperboly $\mathcal{H}_a$. Ze sestrojených šesti bodů hyperbolu snadno sestrojíme.

Důkaz věty 17 je obdobný s důkazem věty 16 a nebudeme ho provádět, lze se s ním seznámit v práci [4].

Na závěr

Naše dosavadní „Cabri výlety“ do apolloniiovské problematiky se pomalu blíží ke konci. V tomto příspěvku jsme přidali ke Cabri geometrii nového vydatného pomocníka, a to trilineární souřadnice. Zvídavého čtenáře

může za této situace napadnout, zda lze položit podobné apolloniiovské úlohy i v trojrozměrném prostoru. Samozřejmě ano. Je jednoduché položit si analogické otázky i v prostoru. A analogie rovinných Cabri výsledků může pak naznačit, jaké výsledky lze očekávat v prostoru. Cabri geometrie může být tedy užitečná i na začátku zkoumání analogických situací v prostoru. To bude předmětem poslední části naší série příspěvků.

L i t e r a t u r a

- [1] *Koman, M. – Fritsch, R.*: Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie. Část II (O trojúhelníku a třech Apolloniiových kružnicích). MFI, roč. 14, 2003/04, č. 2.
- [2] *Koman, M. – Fritsch, R.*: Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie. Část III (Analýza úlohy o třech Apolloniiových kružnicích se třemi překvapeními). MFI, roč. 15, 2005/06, č. 2.
- [3] *Leischner, P.*: Ptolemaiova nerovnost. MFI, roč. 15, 2005/06, č. 7.
- [4] *Fritsch, R. – Koman, M.*: Von Apollonios aus dynamisch Mathematik entdecken – Leuchten wir mit Cabri in wenig bekannte und unbekannte stille Winkel der Geometrie. In: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 25, München, 2004, SAWK, Forschungsbeiträge der Naturwissenschaften Klasse, s. 45-70. ISBN 3-936284-03-2.
Viz též <http://www.mathematik.uni-muenche.n.de/~fritsch/Apollonios.pdf>

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 123 a 124, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (15.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 123

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s obvodem 180, jejichž délky stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

Filip Švrček

Řešení:

Označme a , b délky odvěsen a c délku přepony hledaného trojúhelníku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a \leq b < c$. Podle zadání jsou a , b a c přirozená čísla a z trojúhelníkové nerovnosti platí $a + b > c$. Jelikož podle

zadání platí $a + b + c = 180$, odtud plyne $a + b > 90$, tedy $a \leq b < c < 90$.
Dle Pythagorovy věty dále platí

$$a^2 + b^2 = c^2 = (180 - a - b)^2 = 180^2 + a^2 + b^2 - 360a - 360b + 2ab.$$

Po úpravě dostaneme

$$(180 - a)(180 - b) = 180 \cdot 90. \quad (1)$$

Čísla $180 - a$ a $180 - b$ jsou přirozená a platí $180 - a \geq 180 - b > 90$.
Existují právě tři rozklady čísla $180 \cdot 90$ na součin přirozených čísel větších než 90, a to

$$180 \cdot 90 = 162 \cdot 100 = 150 \cdot 108 = 135 \cdot 120.$$

Všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, které řeší rovnici (1) jsou tedy $(18, 80)$, $(30, 72)$, $(45, 60)$. Těmto dvojicím odpovídají po řadě čísla c 82, 78, 75.

Existují tři pravoúhlé trojúhelníky vyhovující podmínkám úlohy. Jsou to trojúhelníky se stranami délek 18, 80, 82, dále 30, 72, 78 a 45, 60, 75.

Jiné řešení:

Označme a a b délky odvěsen a c délku přepony hledaného trojúhelníku. Z teorie pythagorejských čísel plyne, že existují přirozená čísla d , u , v ($u > v$, u a v nesoudělná, $u + v$ je liché číslo) tak, že bez újmy na obecnosti platí

$$a = 2duv, \quad b = d(u^2 - v^2), \quad c = d(u^2 + v^2).$$

Jelikož obvod trojúhelníku se rovná 180, plyne odtud

$$180 = 2duv + d(u^2 - v^2) + d(u^2 + v^2) = 2du(u + v),$$

tedy

$$90 = du(u + v). \quad (2)$$

Podle předpokladů je $u + v$ liché číslo větší než 1. Může proto nabýt pouze některou z hodnot 3, 5, 9, 15 a 45. Dále z předpokladů pro čísla u a v platí $u < u + v < 2u$. Rozlišíme dále několik případů.

- Pokud $u + v = 3$, potom rovnice (2) má tvar $30 = du$. Vzhledem k podmínce $u < 3 < 2u$ platí nutně $u = 2$. Odtud plyne, že $v = 1$ a $d = 15$. Tedy $a = 60$, $b = 45$ a $c = 75$.

- Pokud $u + v = 5$, potom rovnice (2) má tvar $18 = du$. Vzhledem k podmínce $u < 5 < 2u$ platí nutně $u = 3$. Odtud plyne, že $v = 2$ a $d = 6$. Tedy $a = 72$, $b = 30$ a $c = 78$.
- Pokud $u + v = 9$, potom rovnice (2) má tvar $10 = du$. Vzhledem k podmínce $u < 9 < 2u$ platí nutně $u = 5$. Odtud plyne, že $v = 4$ a $d = 2$. Tedy $a = 80$, $b = 18$ a $c = 82$.
- Pokud $u + v = 15$, potom rovnice (2) má tvar $6 = du$. Odtud plyne, že neexistuje přirozené číslo u , které by vyhovovalo navíc podmínce $u < 15 < 2u$.
- Pokud $u + v = 45$, potom rovnice (2) má tvar $2 = du$. Odtud plyne, že neexistuje přirozené číslo u , které by vyhovovalo navíc podmínce $u < 45 < 2u$.

Stejně jako v předcházejícím řešení jsme dospěli ke stejnému závěru.

Správné řešení zaslali: *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *František Jáchim* z Volyně, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Lukáš Bednařík* z SG v Olomouci, *Lucie Fabriková*, *Zbyněk Konečný* a *Jan Uhlík*, všichni z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Jaroslav Hančl* a *Josef Žabenský*, oba z GMK v Bílovci, *Tomáš Hejda* a *Radek Žlebčík*, oba z G Praha 5, Zbořovská. *Tomáš Jedlička* z G Třebíč, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť a *Marek Scholle* z G Pardubice, Dašická.

Neúplné řešení zaslali: *Anton Hnát* z Moravan, *Anežka Faltýnková* z GJŠ v Přerově a *Vendula Uchytlová* z GJKT Hradec Králové.

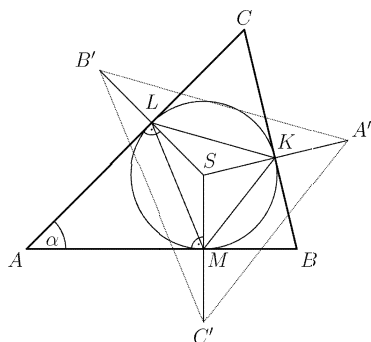
Úloha 124

Nechť S značí střed kružnice vepsané danému ostroúhlému trojúhelníku ABC . Označme dále A' , B' , C' obrazy bodu S v osových souměrnostech po řadě podle přímk BC , CA , AB . Dokažte, že trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Označme K , L , M po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami BC , CA a AB trojúhelníku ABC . Nechť α , β a γ jsou po řadě velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech A , B a C (viz obr.). Jelikož K , L a M jsou středy po řadě úseček SA' , SB' a SC' , jsou trojúhelníky KLM a $A'B'C'$ stejnohlé se středem stejnohllosti S a koeficientem 2. Proto mají i stejné vnitřní úhly u odpovídajících vrcholů. Jelikož úhly SLA



a SMA jsou pravé, je velikost úhlu LSM rovna $180^\circ - \alpha$. Podle věty o obvodovém úhlu je tedy velikost úhlu MKL rovna $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Cyklickou záměnou dostaneme, že velikost úhlu KLM je $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ a velikost úhlu LMK je $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, platí $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tedy i KLM je rovnostranný trojúhelník a trojúhelníky ABC , KLM a $A'B'C'$ jsou podobné. Jestliže naopak jsou trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ podobné, platí

$$\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha, \quad \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta, \quad \gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma,$$

odtud $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ a trojúhelník ABC je rovnostranný.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnát* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Lucie Fabriková*, *Zbyněk Konečný*, *Jakub Opršal*, *Alexandr Pícha* a *Jan Uhlík*, všichni z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Anežka Faltýnková* z GJS v Přerově, *Miroslav Klimoš*, *Adam Kubetta*, *Michael Kučera* a *Josef Žabenský*, všichni z GMK v Bílovci, *Tereza Klimošová* z G Lanškroun, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť a *Vendula Uchytlová* z GJKT Hradec Králové.

Neúplné řešení zaslali: *Lukáš Bednařík* z SG v Olomouci, *Eva Černohorská* z 1. českého G v Karlových Varech, *Jaroslav Hančl* z GMK v Bílovci, *Martin Křivánek* z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Tomáš Hejda* a *Radek Žlebčík*, oba z G Praha 5, Zborovská, *Marek Scholle* z G Pardubice, Dašická a *Pavel Šalom* z G Rožnov p. R.