

Ptolemaiova nerovnost

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V článku [5] jsme se seznámili s Ptolemaiovou větou, podle níž je v tětiovém čtyřúhelníku součet součinů délek jeho protilehlých stran roven součinu délek jeho úhlopříček. Ve stejném příspěvku byla dokázána i obrácená věta k větě Ptolemaiově. Obě implikace je možno spojit v jediné tvrzení, které je uvedeno v závěru příspěvku [5] (věta 3 – Ptolemaiovo kritérium tětiového čtyřúhelníku). Jeho znění zde připomínáme:

Konvexní čtyřúhelník je tětiový, právě když součet součinů délek jeho protilehlých stran je roven součinu délek jeho úhlopříček.

Toto kritérium je zvláštním případem následující, později objevené věty:

Věta 1 (Ptolemaiova nerovnost)

Pro libovolné čtyři body A, B, C a D v rovině platí

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|. \quad (1)$$

Rovnost přitom nastane, právě když tyto čtyři body leží v abecedním uspořádání na kružnici nebo na přímce.

Poznámka. Na kružnici může být uspořádání bodů A, B, C, D buď v kladném, nebo v záporném smyslu otáčení. Na přímce můžeme nahlížet jako na kružnici o nekonečně velkém poloměru. Rovnost v případě kolineárních bodů tedy nastane pro čtveřice (A, B, C, D) , (D, C, B, A) a pro dalších šest čtveřic, které z těchto dvou vzniknou cyklickou záměnou.

Vztah (1) platí i tehdy, je-li vzdálenost některých dvou bodů nulová. Potom však body A, B, C, D leží vždy na kružnici nebo přímce a rovnost nastává, právě když aspoň dvě písmena, která označují totožné body, jsou sousední v některé z výše popsaných osmi čtveřic.

Větu 1 lze dokázat pomocí kruhové inverze (viz např. [8]). Zde uvedeme dva jiné důkazy, které jsou přístupnější středoškolským studentům. V obou se omezíme jen na čtveřice navzájem různých bodů A, B, C, D . Situace, kdy některé dva z daných bodů jsou totožné, přenecháme k ověření čtenáři.

1. důkaz (užitím komplexních čísel). Nechť polohy bodů A, B, C, D v Gaussově rovině jsou po řadě dány komplexními čísly z_1, z_2, z_3, z_4 . Zřejmě platí

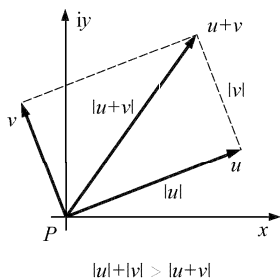
$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_3 - z_1)(z_4 - z_2),$$

a tedy i

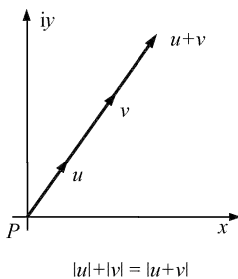
$$|(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)| = |(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)|.$$

Levou stranu poslední rovnosti dále odhadneme pomocí trojúhelníkové nerovnosti $|u| + |v| \geq |u + v|$, viz obrázky 1a, 1b a 1c. Získaný vztah pak upravíme pomocí identity $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$ na tvar

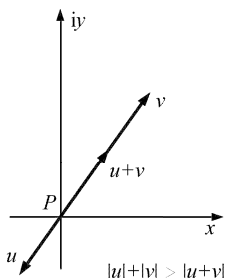
$$|z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + |z_3 - z_2| \cdot |z_4 - z_1| \geq |z_3 - z_1| \cdot |z_4 - z_2|.$$



Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c

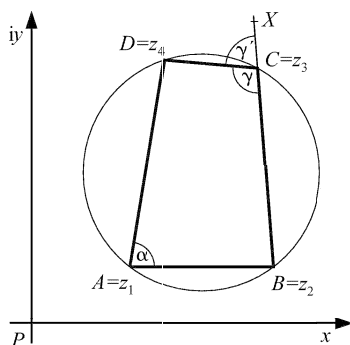
Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel je rovna vzdálenosti jejich obrazů v Gaussově rovině. Platí tedy

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Rovnost zde nastane, právě když obě komplexní čísla $u = (z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$ a $v = (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ mají též argument (obr. 1b), tj. právě když podíl

$$\frac{u}{v} = \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2}$$

je kladné reálné číslo.¹ Označíme-li α a γ' argumenty obou zlomků na pravé straně poslední rovnosti, nastane ve vztahu (1) rovnost právě tehdy, když $\alpha + \gamma' = 0$.²



Obr. 2

Tuto podmínku můžeme přepsat do tvaru $|\angle BAD| + |\angle BCD| = \pi$, což pro $\alpha \neq 0$ představuje kritérium tětiového čtyřúhelníku. Je-li $\alpha = \gamma' = 0$, jsou body kolineární a uspořádané v souladu s poznámkou za větou 1.

2. důkaz (syntetický). Předpokládejme nejprve, že body A, B, C, D jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku (obr. 3). Pomocí vhodných otočení se středem v bodě A přemístíme trojúhelníky ABC a ADC do poloh $AB'C'$ a $AD''C''$ tak, aby (A, B, C'') , (A, B', D'') a (A, D, C') byly trojicemi kolineárních bodů (obr. 4). Stejnolehlost se středem A a koeficientem $\frac{d}{e}$ zobrazí trojúhelník $AB'C'$ na trojúhelník AKD a stejnolehlost se středem A a koeficientem $\frac{a}{e}$ zobrazí trojúhelník $AD''C''$ na trojúhelník ALB . Body K a L jsou totožné, neboť oba leží na polopřímce AB' a platí $|AK| = \frac{ad}{e} =$

¹Zřejmě je $u \neq 0$ i $v \neq 0$.

²Uvažte, že argument podílu $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1}$ je dán velikostí orientovaného úhlu BAD a argument podílu $\frac{z_4 - z_3}{z_3 - z_2}$ představuje na obr. 2 velikost orientovaného úhlu DCX , kde X je vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce CB .

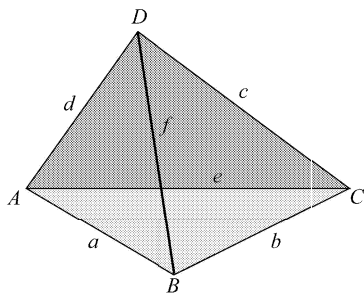
$= |AL|$. Navíc je $|DL| = \frac{bd}{e}$ a $|BL| = \frac{ac}{e}$. Dosazením vypočtených délek do trojúhelníkových nerovností

$$||BL| - |LD|| \leq |BD| \leq |BL| + |LD|$$

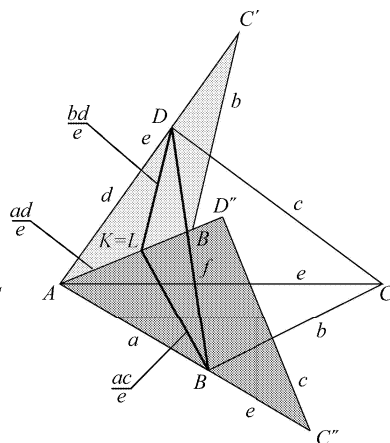
snadno zjistíme, že platí

$$|ac - bd| \leq ef \leq ac + bd. \quad (2)$$

Platí tedy (1) jako část vztahů (2). Vzhledem k tomu, že bod L leží na polopřímce AB' , která protíná úsečku BD , nastane v (1) rovnost jen tehdy, když $|\angle ALB| + |\angle ALD| = \pi$. Pak bude ovšem čtyřúhelník $ABCD$ tětíkový, neboť první z úhlů v posledním vztahu je shodný s úhlem ADC a druhý je shodný s úhlem ABC .



Obr. 3



Obr. 4

Má-li jeden vnitřní úhel útvaru $ABCD$ v obloukové míře velikost větší nebo rovnu π (útvár je pak trojúhelník nebo nekonvexní čtyřúhelník), lze důkaz provést stejným způsobem. Střed obou otáčení a stejnolehlostí je však nutno zvolit ve vrcholu protilehlém k vrcholu takového úhlu.

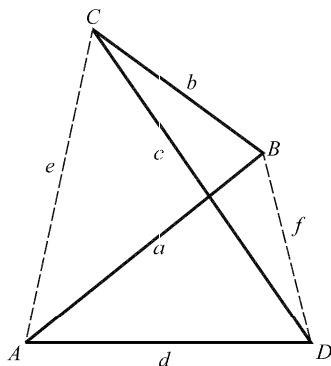
Pro tzv. *zkřížený čtyřúhelník* $ABCD$ (obr. 5) můžeme postupovat analogicky, když si jej představíme jako konvexní čtyřúhelník $ACBD$. Ponecháme-li předchozí označení délek, má vztah (2) pro tuto situaci tvar

$$|ef - bd| \leq ac \leq ef + bd.$$

Odtud snadno dokážeme (1), neboť

$$ef - bd \leq |ef - bd| \leq ac \quad \Rightarrow \quad ef \leq ac + bd.$$

Důkaz pro situace, kdy body A, B, C, D leží na přímce přenecháme čtenáři. (Návod je naznačen v úloze 1.)



Obr. 5

Poznámka. Aplikací kosinové věty na trojúhelník BDL obdržíme tzv. Bretschneiderovu kosinovou větu pro čtyřúhelník $ABCD$:

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos(\beta + \delta). \quad (3)$$

Doporučujeme čtenáři, aby porovnal tento důkaz s podobným, ale méně názorným postupem v [6] nebo [7] (úloha 236/II). Názornost ještě více vynikne, když transformaci čtyřúhelníku $ABCD$ na čtyřúhelník $ABLD$ „zviditelníme“ pomocí dynamického modelu sestrojeného v Cabri geometrii.

Tvrzení věty 1 lze dále zobecnit vzhledem k dimenzi uvažovaného prostoru (viz např. [1] nebo [4]), a to následujícím způsobem:

Věta 2

Nechť $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ jsou body n -rozměrného eukleidovského prostoru a $d_{ij} = |A_i A_j|$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n+2\}$. Pak platí

$$\Delta = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1n+2}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & \cdots & d_{2n+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n+21}^2 & d_{n+22}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad (4)$$

přičemž rovnost nastane, právě když dané body leží na téže sféře (kulové ploše v uvažovaném n -rozměrném eukleidovském prostoru) nebo v téže nadrovině.

Je-li $n = 2$, plyne z věty 2 pro body A, B, C, D při označení jejich vzdáleností podle obr. 1 podmínka

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & a^2 & e^2 & d^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & f^2 \\ e^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ d^2 & f^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = ((ac + bd)^2 - (ef)^2) ((ef)^2 - (ac - bd)^2) \geq 0,$$

která je ekvivalentní se vztahem (2).

Podobně pro pět bodů A, B, C, D, E v n -rozměrném eukleidovském prostoru dostáváme podmínku

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & |AB|^2 & |AC|^2 & |AD|^2 & |AE|^2 \\ |AB|^2 & 0 & |BC|^2 & |BD|^2 & |BE|^2 \\ |AC|^2 & |BC|^2 & 0 & |CD|^2 & |CE|^2 \\ |AD|^2 & |BD|^2 & |CD|^2 & 0 & |DE|^2 \\ |AE|^2 & |BE|^2 & |CE|^2 & |DE|^2 & 0 \end{vmatrix} \geq 0, \quad (5)$$

přičemž rovnost zde nastane, právě když jsou dané body komplanární (leží v téže rovině) nebo leží na téže kulové ploše.

Na závěr zdůrazníme, že Ptolemaiova nerovnost je jistou analogií trojúhelníkové nerovnosti. Pomáhá nám objevovat nové matematické poznatky a také řešit extrémální i jiné planimetrické problémy. Její další aplikace uvedeme v některém navazujícím příspěvku.

Úlohy

1. Ověřte nerovnost (1) pro body A, B, C, D , které leží na téže přímce (viz poznámku za větou 1).

Návod. Existuje celkem 24 permutací těchto bodů, vzhledem k symetrii stačí prověřit jen dvanáct z nich. Pro čtveřici A, B, D, C lze postupovat například takto: Označíme

$$L - P = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| - |AC| \cdot |BD|,$$

$$|AB| = x, \quad |BD| = y \quad \text{a} \quad |DC| = z.$$

Pak $L - P = xz + (y + z)(x + y) - (x + y + z)y = 2xz > 0$, a proto ve vztahu (1) platí pro tuto situaci ostrá nerovnost.

- Uvažujme jednotkovou krychli $ABCDEFGH$. Ověřte vztah (5) pro následující pětice bodů

$$(A, B, C, D, E), (A, B, C, F, H), (A, B, C, E, G), (A, B, C, G, H).$$

- Na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC libovolně zvolme bod M . Dokažte, že jedna ze tří vzdáleností bodu M od vrcholů trojúhelníku je rovna součtu zbývajících dvou.
- Na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC libovolně zvolíme bod M . Dokažte, že hodnota výrazu $|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2$ nezávisí na poloze zvoleného bodu.
- Na kratším oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$ je dán bod M . Dokažte, že platí

$$\frac{|AM| + |CM|}{|BM| + |DM|} = \frac{|DM|}{|AM|}.$$

- Uvažujme kratší oblouk BC kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ a na něm libovolně zvolený bod M . Dokažte, že pak platí

$$|AM| + |DM| = |BM| + |CM| + |EM|.$$

- Na kratším oblouku BC kružnice opsané pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$ je dán bod M . Dokažte, že platí

$$|EM| + |FM| = |AM| + |BM| + |CM| + |DM|.$$

Literatura

- [1] *Berger, M.*: Geometry I. Springer-Verlag, Berlin 1994.
- [2] *Engel, A.*: Problem-solving strategies. Springer-Verlag, New York 1998.
- [3] *Eukleides*: Základy. JČMF, Praha 1907.
- [4] *Fritz, R. – Koman, M.*: Von Apollonius aus dynamisch Mathematik entdecken-Leuchten wir mit Cabri in wenig bekannte und unbekannte stille Winkel der Geometrie. Festkolloquium aus Anlass des 80. Geburtstages von Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. Herbert Zeitler, Bayeruth, October 2003.
- [5] *Leischner, P.*: Ptolemaiova věta. MFI, roč. 15 (2005/06), č. 3, s. 129-135.
- [6] *Pech, P.*: Ptolemaiova nerovnost. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 71 (1993/1994), č. 4, str. 166-168.
- [7] *Sarygin, I. F.*: Zadači po geometrii. Nauka, Moskva 1986.
- [8] *Sekanina, M. – Boček, L. – Kočandrle, M. – Šedivý, J.*: Geometrie II. SPN, Praha 1988.
- [9] *Škljarskij, D. O. – Čencov, N. N. – Jaglom, I. M.*: Izbrannye zadači i teoremy elementarnoj matematiky, časť 2 – geometrija (planimetrija). GITTL, Moskva 1952.

K realizaci Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání v matematice

JAN HOUSKA

Výzkumný ústav pedagogický, Praha

Motto:

„Proč je kolem Rámcového vzdělávacího programu (RVP) takový rozruch?“

„Protože směřuje k řízené změně role učitele, od dominanty hamletovského monologu na kamenném divadle k průvodci dětí na cestě ke vzdělání. Žáci budou nejen objektem pedagogického působení, ale stále víc se budou proměňovat v jeho aktivní účastníky. Budou hledat, bádát, objevovat, osvojovat si, komunikovat, spolupracovat s ostatními. Tohle si všichni učitelé ještě neuvědomují.“ (Učitelské noviny, č. 1, 6. ledna 2004, str. 11)

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV) jako východisko pro tvorbu jednotlivých školních vzdělávacích programů vy-

tváří prostor pro větší pedagogickou autonomii škol a učitelů. Z toho vyplývá také větší důraz na specifiku metodických přístupů a metod práce. Pokusím se jako motivaci pro čtenáře předložit několik konkrétních námětů a myšlenek v tomto směru, nejde o nic nového nebo originálního, domnívám se však, že mnohé dobré podněty a nápady se přes jejich všeobecnou známost šířeji v pedagogické praxi nepoužívají a že realizace RVP ZV je k tomu dobrou příležitostí. Většina těchto myšlenek bude podrobněji rozpracována na portálu VÚP v Praze (<http://www.rvp.cz>).

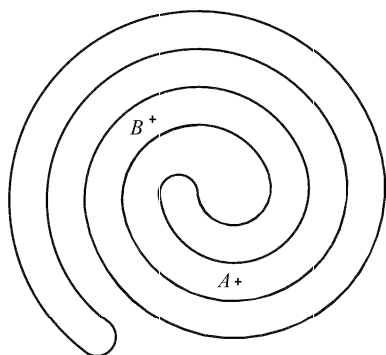
V učebních osnovách vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace RVP ZV dochází k jistému oslabení jednoho z cílů matematického vzdělávání na ZŠ, kterým je ovládnutí matematického aparátu potřebného pro studium na střední škole (z povinného učiva byly vypuštěny operace s lomenými výrazy, goniometrické funkce ostrého úhlu, učivo o mocninách s libovolným přirozeným exponentem, kvadratická funkce). Zdůrazňuji, že se v RVP ZV jedná o povinný základ pro všechny žáky ZŠ, pro ty, kteří směřují na střední školu, je žádoucí do ŠVP zařadit nějakou formu diferencované výuky (např. volitelný předmět v 9. ročníku), která uchazeče o středoškolské studium důkladněji připraví, i když na druhé straně při přijímacím řízení na střední školy se bude vycházet pouze z RVP ZV. Tímto uvolněním učebních osnov vzniká jistý prostor pro netradiční náměty a čas pro větší metodické propracování učiva.

Ve výuce matematiky na 1. stupni je takovým netradičním tématem geometrie polohy a tvaru. Patří sem úlohy na vyhledávání cesty bludištěm, kreslení obrázku jedním tahem neboli *traverzabilita* (známý Eulerův problém královeckých mostů) [1] nebo určování vnitřku a vnějšku složitější jednoduché uzavřené (Jordanovy) křivky (křivky topologicky ekvivalentní s kružnicí).

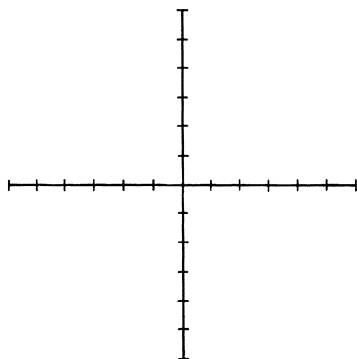
Příklad 1

- Určete, zda body A , B jsou uvnitř nebo vně dané uzavřené křivky (obr. 1a).
- Pokuste se vyšetřit, co platí o počtu průsečíků úsečky, která spojuje dva body ležící oba vně (uvnitř) dané uzavřené křivky nebo pro dva body, z nichž jeden leží vně a druhý uvnitř této křivky. (V prvním případě je počet průsečíků sudé číslo, ve druhém liché.)

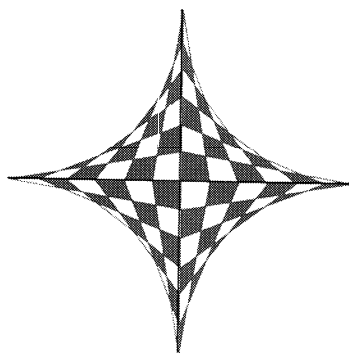
Jiným příkladem vhodným pro 1. stupeň ZŠ je *rýsování vzorů* (obr. 1b, 1c), např. tzv. karty *M. Booleové* (manželky známého matematika *G. Boo-*



Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c

lea), které vedou mimo jiné k propedeutice pojmu soustavy souřadnic, vzor vznikl rýsováním úseček.

Zejména na 2. stupni ZŠ je třeba vyzdvihnout *řešení úloh více způsoby*, přitom může jít z hlediska učitele o triviální modifikaci, ne tak už z pohledu žáka [2].

Příklad 2

Turista ušel dopoledne $\frac{2}{5}$ své celodenní trasy odpoledne pak $\frac{1}{3}$ této trasy a do cíle mu ještě zbývalo 9 km. Kolik ušel turista za celý den?

Řešení pomocí rovnice: Označíme-li x délku celodenní trasy v km, platí rovnici

$$\frac{2x}{5} + \frac{x}{3} + 9 = x,$$
$$x = 33,75.$$

Jiný způsob řešení – úvaha pomocí zlomků: Zjistíme, že trasy odpovídají délce 9 km, odkud opět vypočítáme délku celodenní trasy. (Řešení rovnice napovídá postup při úsudku.)

Provedeme ještě zkoušku výpočtem, kolik turista ušel dopoledne a odpoledne.

Obvyklé *úlohy o pohybu* můžeme řešit třemi způsoby: rovnicí, úsudkem (vydělením „náskoku“ rozdílem rychlostí) a třetí způsob je grafický. Podobně lze řešit více způsobů *úlohy o společné práci*. Vedle tradiční rovnice pro dva pracovníky

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \quad \text{nebo} \quad \frac{P}{a} + \frac{P}{b} = \frac{P}{x}.$$

(To už je možno pokládat za dva způsoby, kde zajímavé je, že kořen x nezávisí na práci P .) můžeme postupovat úvahou o zlomcích vykonané práce za časovou jednotku. Domnívám se, že pedagogicky je hodnotnější vypočítat demonstračně méně úloh více způsoby než více úloh (mechanicky) způsobem jedním.

Dalším typem jsou *důkazové úlohy*. Myslím tím především jednoduché důkazy na úrovni ZŠ hlavně v geometrii. Příkladem mohou být různé definice rovnoběžníku, jejichž logická ekvivalence se dokazuje pomocí vět o shodných trojúhelnících. Ještě přirozeněji se jeví důkazy vzorců pro obsah rovnoběžníku, trojúhelníku a zvláště (mnoha způsoby realizovatelný) důkaz pro obsah lichoběžníku, známe-li vzorec pro obsah obdélníku. Tato zdůvodnění by měl každý (jen trochu) úspěšný žák „zažít“, aby „se mu zmíněné vzorečky dostaly pod kůži“. Sem patří i náročnější důkazové úlohy na obsahy (včetně důkazu Pythagorovy věty) nebo paradoxy nad zdánlivou změnou obsahu při rozložení a opětném složení obrazce, viz [3], [4]. Dostali jsme se do blízkosti infinitezimálních úvah o obsahu kruhu (objemu koule), které mají jistě také pedagogickou cenu, i když se svým charakterem výše zmíněným důkazům vymykají.

Vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* na ZŠ obsahuje vedle tradičních tematických okruhů *Číslo a početní operace* (na 1. stupni ZŠ) nebo

Číslo a proměnná (na 2. stupni ZŠ) a *Geometrie v rovině a v prostoru* tematický celek *Závislosti, vztahy a práce s daty*. Nepochybně již na ZŠ lze vhodně využít (ve spojení školy se životem) sledování výsledků náhodného pokusu nebo provádět simulace náhodných pokusů (házením hrací kostkou, taháním žetonů ze sáčku nebo pomocí počítače) včetně sběru dat a výpočtu relativní četnosti určitého náhodného jevu (případně dospět intuitivně k pojmu pravděpodobnosti). Zcela netradičním tematickým celkem jsou *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na školské matematice, ale je při něm nutné uplatnit logické a kombinační myšlení. Uvedu několik příkladů.

Příklad 3 (Dopravní problém), viz [5], [6]

Ve dvou výrobních střediscích V_1 a V_2 jsou na skladě stejné výrobky v počtu 100 kusů ve V_1 a 200 kusů ve V_2 , které se mají dopravit do tří středisek S_1 , S_2 a S_3 tak, aby se přepravovalo vždy 50 kusů najednou. Přitom do S_1 se má dopravit 150 kusů, do S_2 100 kusů a do S_3 50 kusů. Dopravní náklady na jeden výrobek činí: 120 Kč z V_1 do S_1 , 80 Kč z V_1 do S_2 , 60 Kč z V_1 do S_3 , 40 Kč z V_2 do S_1 , 160 Kč z V_2 do S_2 , 100 Kč z V_2 do S_3 . Navrhněte plán přepravy s nejmenšími náklady.

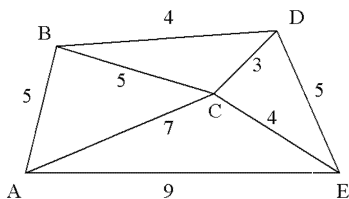
Řešení úlohy vyžaduje situační náčrt, výčet a vyhodnocení všech možností přepravy (je jich pět). Optimální způsob přepravy stojí 19 000 Kč a je určen tabulkou:

	S_1 (150)	S_2 (100)	S_3 (50)
V_1 (100)	–	100	–
V_2 (200)	150	–	50

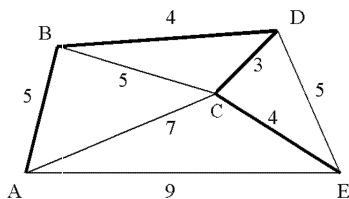
Jiným obdobným námětem je tzv. *knihařský problém*, viz [7]. Další příklad se týká problému *ohodnocených grafů*. Jedná se o optimalizaci nákladů rozvodné sítě.

Příklad 4

Na obr. 2a jsou znázorněny obce A , B , C , D , E s uvedenými náklady na možné spoje elektrického vedení mezi dvěma obcemi. (Hodnoty jsou uvedeny v jistých jednotkách měny.) Všech pět obcí má být spojeno jedním



Obr. 2a



Obr. 2b

elektrickým vedením (rozvodnou sítí) tak, aby náklady na výstavbu sítě byly co nejmenší. Navrhněte plán tohoto vedení.

Řešení se snadno najde experimentálně (je jím lomená čára $ABDCE$ s celkovými náklady 16). Je však možno postupovat systematicky, např. se ptát na počet všech čtveřic spojů (70) a počet všech čtveřic spojů, které tvoří rozvodnou síť (45).

Podobnou úlohou je problém obchodního cestujícího nebo poštovního doručovatele (s návratem nebo bez návratu do výchozího místa), viz [6], opět odkazují na portál VÚP v Praze.

Dalším námětem jsou *diofantovské úlohy* motivované reálnou (nebo pseudoreálnou) situací, tj. úlohy řešené v oboru přirozených (případně celých) čísel. Takové úlohy poskytují žákům nový a cenný pohled na známé učivo (dělitelnost, pojem proměnné, výraz s jiným definičním oborem a oborem hodnot, rovnice), přitom je v těchto případech vždy můžeme řešit konečným počtem zkoušek. Jednodušší úlohy tohoto typu lze dobře aplikovat již ve 2. období 1. stupně ZŠ.

Příklad 5

Žáci jedné školy si mohli zakoupit dva druhy vstupenek na divadelní představení, levnější po 50 Kč a dražší po 75 Kč. Celkem bylo za vstupenky utraceno 1 300 Kč. Přitom levnějších vstupenek bylo zakoupeno více než 10 a dražších více než 5. Kolik kterých vstupenek žáci koupili?

Řešení úlohy vede k rovnici $50x + 75y = 1\,300$, kde x a y značí (v celých nezáporných číslech) počty po řadě levnějších a dražších vstupenek. Tuto rovnici upravíme na jednodušší tvar

$$2x + 3y = 52.$$

Snadno najdeme řešení rovnice pro $x = 2$ a dále můžeme sestavit následující tabulku všech řešení:

x	2	5	8	11	14	17	20	23
y	16	14	12	10	8	6	4	2

Vzhledem k podmínkám úlohy existují tři řešení, a to: 11 levnějších a 10 dražších vstupenek, nebo 14 levnějších a 8 dražších vstupenek, nebo 17 levnějších a 6 dražších vstupenek.

Další diofantovská úloha vede na nelineární problém. Také tuto úlohu lze vyřešit prošetřením konečného počtu možných případů. Uvádíme však řešení elegantnější, avšak stále v možnostech výuky matematiky na ZŠ.

Příklad 6

Provoz na jisté trati byl zajištěn tak, že z každé výchozí stanice do každé cílové stanice existovala jedna varianta jízdenek. Po úpravě trati několik stanic přibýlo, takže počet všech variant jízdenek se zvýšil o 46. Kolik stanic měla trať původně a kolik jich po úpravě přibýlo?

Řešení: Označme s počet starých stanic a n počet nových stanic. Počet nových variant jízdenek je součtem počtu jízdenek ze všech nových stanic do všech starých stanic, který je dán výrazem $s \cdot n$ a počtu všech jízdenek ze všech stanic do všech nových. Jejich počet je dán výrazem $(s + n - 1)n$. (Je vhodné provést úvahu na sestavení výrazu pro počet variant jízdenek také jiným způsobem.)

Nyní sestavíme rovnici $sn + (s + n - 1)n = 46$, kterou řešíme v oboru přirozených čísel. Po úpravě pak máme:

$$n(2s + n - 1) = 46 = 1 \cdot 46 = 2 \cdot 23$$

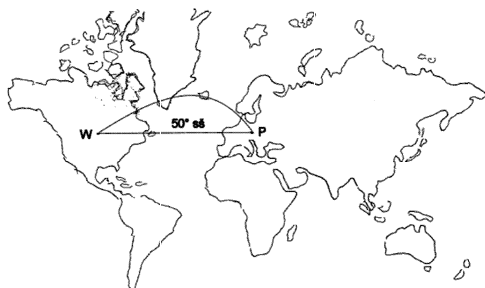
Pro přirozená čísla n a $(2s + n - 1)$ máme tak pouze dvě možnosti rozkladu čísla 46 na součin dvou přirozených čísel, a to $n = 1$ a $2s + n - 1 = 46$, nebo $n = 2$ a $2s + n - 1 = 23$, neboť číslo n je menší než $2s + n - 1$. Odtud dostaneme dvě řešení $n = 1$, $s = 23$ nebo $n = 2$, $s = 11$.

Na trati bylo 23 starých stanic a přibýla 1 nová, nebo na ní bylo 11 starých stanic a přibýly 2 nové.

Dalším námětem jsou *logické úlohy* s využitím stromu všech logických možností nebo Vennových diagramů. Zajímavý příklad jiných způsobů řešení (s menšími úpravami využitelný na ZŠ) lze nalézt v nedávno publikovaném článku [9].

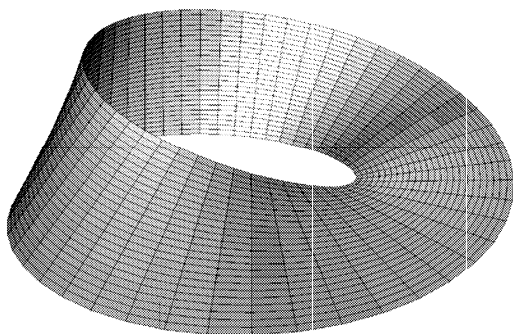
Za vhodný didaktický moment lze pokládat žakovská *objevování matematických zákonitostí*. Je jisté důležité občas žákům ukázat, že za jejich obzorem existují (např. v geometrii) jisté matematické vztahy, které mohou sami poznávat, experimentálně nalézat a ověřovat (ne již pro obecnou situaci dokázat) a které bezprostředně nesouvisejí se školskou matematikou. Dobrým příkladem je úloha z příkladu 1b) tohoto článku nebo výše zmíněný problém obrázků kreslených jedním tahem (podmínkou pro tuto možnost je existence nejvýše dvou uzlů lichého stupně) nebo Eulerova věta o počtu vrcholů, stěn a hran konvexního mnohostěnu [6]. Jiným příkladem je *Pickův vzorec* pro obsah S mnohoúhelníku s vrcholy v uzlech čtvercové sítě: Platí $S = v + \frac{1}{2}h - 1$, kde v je počet vnitřních a h počet hraničních bodů uvažovaného mnohoúhelníku. (*G. Pick*, po němž se tento vzorec nazývá, byl pražským matematickým kolegou Alberta Einsteina, zemřel v Terezíně jako oběť holocaustu.)

Důležitým upozorněním je skutečnost, že pokud pracujeme na *kulové ploše*, pak na ní klasická eukleidovská geometrie neplatí, např. [10]. Považujeme-li hlavní kružnice na zeměkouli za přímky, pak neexistují rovnoběžky a trojúhelníky (sférické) mají součet vnitřních úhlů větší než 180° . Ještě názorněji se ukazuje tato problematika v tom, že zobrazení zemského povrchu do rovinné mapy je zkreslené. Nejkratší spojnice dvou vzdálených míst na mapě (v Mercatorově projekci tvoří poledníky a rovnoběžky systém navzájem kolmých rovnoběžných úseček) neodpovídá nejkratší trase ve skutečnosti. (Např. Winnipeg a Praha leží na téže rovnoběžce, na mapě se jeví jako nekratší trasa úsečka (část rovnoběžky), kdežto ve skutečnosti je to oblouk hlavní kružnice zeměkoule. To lze demonstrovat na globu, obr. 3.) Dostali jsme se opět ke geometrii. V zahraničních učebních



Obr. 3

textech lze nalézt mnoho pěkných příkladů na intuitivní aplikaci shodných zobrazení v rovině a jejich skládání (shodné zobrazení jako pohyb), které pěstuje geometrickou představivost, takové příklady budou uvedeny na zmíněném portálu VÚP v Praze. Dlužno zmínit ještě jeden kuriózní geometrický námět, oblíbený v zahraničních materiálech, tím je Möbiův list – plocha, která nemá líc a rub, viz obr. 4. To lze ukázat souvislou uzavřenou čarou na této ploše. Co dostaneme, když rozstříhneme Möbiův list podél této čáry?



Obr. 4

Motto v úvodu tohoto článku je možná nadsazeno, dobře však vystihuje podtext celé reformy, který spočívá v důrazu na *zvýšení metodicko-didaktické úrovně* a metod práce učitele s žáky. Tato úvaha je zaměřena na metodické a didaktické prvky, co se týče metod práce pokládám za nejdůležitější využít vyučovací hodinu *vzhledem k práci žáků*. Důraz je na práci žáků – frontální, individuální nebo skupinové, je známo, že nejméně efektivní část vyučovací hodiny bývá delší výklad učitele. V matematice ho je málo třeba, kromě toho se ukazuje, že poučení žáci lépe přijímají od svého spolužáka než od dospělého. Takže tzv. výklad může zprostředkovat schopnější žák za odborného dozoru učitele. Nabízím staronový nápad k počáteční matematické mobilizaci žáků ve vyučovací hodině (dnes snadněji realizovatelný technicky než dříve) – *matematické rozcvičky* – k upevnění, rutinnímu zautomatizování nebo připomenutí určitých elementárních početně technických obrátů, matematickým rozcvičkám je věnována na portálu VÚP zvláštní pozornost.

Nakonec ještě ukázka, jak lze obohatit, motivovat a pedagogicky dramatizovat řešení známé úlohy velmi jednoduchým způsobem.

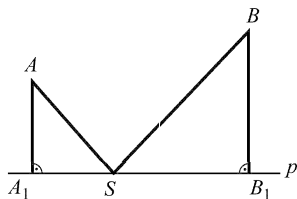
Příklad 7 (Problém čerpací stanice)

Na jedné straně přímé dálnice (přímka p) leží dvě obce (body A , B), $|Ap| = 2$ km, $|Bp| = 3$ km, $|A_1B_1| = 4$ km, body A_1 , B_1 jsou po řadě paty kolmic vedených z bodů A , B k přímce p (obr. 5a).

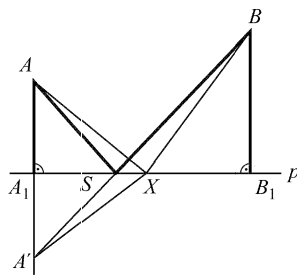
Určete místo na dálnici (bod S), kde má být postavena čerpací stanice pohonných hmot tak, aby vzdálenost byla co nejkratší.

a) Úlohu řešte experimentálně dělením úsečky A_1B_1 po 0,5 km.

b) Zvolte vhodné měřítko a řešte úlohu geometrickou konstrukcí a výpočtem.



Obr. 5a



Obr. 5b

Řešení:

a) Experimentálně (v km)

$ A_1S $	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$ B_1S $	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0

Výpočtem pomocí Pythagorovy věty dostaneme (zaokrouhleno na 0,01 km)

$ AS + BS $	7,00	6,67	6,48	6,40	6,42	6,55	6,76	7,07	7,47
---------------	------	------	------	-------------	------	------	------	------	------

Minimální vzdálenost $|AS| + |BS|$ tak dostaneme pro $|A_1S| = 1,5$ km.

b) Řešení geometrickou konstrukcí spočívá v sestrojení (obr. 5b) průsečíku S úsečky $A'B$ s přímkou p , kde bod A je bod souměrně sdružený s bodem A podle přímky p . Bod S je řešením úlohy. Pedagogicky působný

je průhledný důkaz konstrukce, který využívá trojúhelníkovou nerovnost. Zvolíme-li na p jiný bod X než S , platí $|AX| + |BX| = |A'X| + |BX| > > |A'B| = |AS| + |BS|$. Pomocí úměrnosti stran v podobných trojúhelnících pak vypočítáme, že přesná hodnota je $|A_1S| = 1,6$ km.

Pokládám tento nástin za výzvu, která může sloužit jako motivace čtenářů ve směru dalších (určitě aktuálnějších a modernějších) metodických nápadů a podnětů, které přispějí ke zvýšení pedagogické úrovně vyučování matematiky na základní škole nebo na nižším gymnáziu.

Literatura

- [1] *Perelman, J.*: Zajímavá geometrie. Mladá fronta, Praha 1954.
- [2] *Houska, J.*: Pravý úhel a osa úsečky. MFI, roč. 9, 2000/01, č. 6.
- [3] *Houska, J.*: Úlohy na útvary se stejným obsahem. MFI, roč. 10, 2001/02, č. 6.
- [4] *Houska, J.*: Dvě záhady o čtverci a několik dalších úloh. MFI, roč. 11, 2002/03, č. 6.
- [5] *Procházka, J.*: Dopravní problém v úlohách na ZDŠ. Matematika a fyzika ve škole, roč. 5, č. 1.
- [6] *Houska, J.*: Cvičení z matematiky pro I. a II. ročník gymnázií, SPN, Praha 1975.
- [7] *Procházka, J.*: Knihařský problém na ZDŠ. Matematika a fyzika ve škole, roč. 5, č. 2.
- [8] *Novoveský, Š. – Křižalkovič, K. – Lečko, I.*: Zábavná matematika, SPN, Praha 1974.
- [9] *Uhlířová, M.*: Logické úlohy známé-neznámé. MFI, roč. 14, 2004/05, č. 2.
- [10] *Kelly, B. – Atkinson, P. – Alexander, B. – Warnica, E.*: Mathematics 9, Addison-Wesley 1981, Canada.

Procento prvočísel

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na počátku stál dotaz: *Jaká je pravděpodobnost toho, že když zvolím náhodně přirozené číslo, bude to prvočíslo?*

Dotaz a představa, že na něj existuje pozitivní odpověď, zřejmě vychází z této analogie: *Zvolím-li náhodně přirozené číslo n , pak je toto číslo sudé s pravděpodobností 0,5.* Ve skutečnosti ovšem nevolíme toto číslo n

náhodně, ale z nějaké konečné množiny $M_N = \{1, 2, \dots, N\}$, ať už si to uvědomujeme nebo ne, kde N je horní mez, po kterou jsme ochotni nebo schopni toto číslo n volit. Je-li N sudé, je pravděpodobnost sudosti čísla n přesně 0,5, je-li N liché a dosti velké, liší se pravděpodobnost sudosti čísla n od 0,5 jen nepatrně a v rámci zaokrouhlení ji lze považovat též za 0,5. Toto platí pro každé (dosti velké) N a vede to k názoru, že se tato vlastnost dá rozšířit na celou množinu $\mathbb{N}$ a že tvrzení (uvedené v tomto odstavci shora kurzivou) platí. S tím lze částečně souhlasit, pokud si však uvědomíme, že volíme náhodně čísla z nějakého M_N a nikoli z celé množiny $\mathbb{N}$.

Jestliže se zamyslíme nad tím, jak by bylo možno zvolit náhodně přirozené číslo, zjistíme, že to vlastně nejde, neexistuje metoda, jak to provést. Nápad, že napíšeme všechna přirozená čísla na papírky, vložíme je do osudí a pak jeden papírek náhodně vytáhneme, je samozřejmě zcela nereálný vzhledem k tomu, že přirozených čísel je nekonečně mnoho. Podívejme se na to z hlediska statistiky. Předpokládejme, že by bylo možné provést náhodnou volbu přirozeného čísla. Potom by existovala pravděpodobnost velikosti $p \in \langle 0; 1 \rangle$ (stejná pro každé přirozené číslo n_0) toho, že při náhodné volbě přirozeného čísla bude zvoleno právě číslo n_0 . Součet všech pravděpodobností pro $n_0 = 1, 2, \dots$ by pak musel být 1 (neboť je jisté, že některé přirozené číslo bude vytaženo), takže by platilo

$$p + p + p + \dots = 1.$$

Avšak pro $p > 0$ je součet řady na levé straně $+\infty \neq 1$, a pro $p = 0$ je tento součet $0 \neq 1$, takže v žádném případě nedostaneme součet 1. Náhodnou volbu přirozeného čísla tedy provést nelze.

Zbývá zodpovědět otázku, zda by u prvočísel bylo možno postupovat podobně jako při zkoumání sudosti přirozeného čísla n ; že totiž pravděpodobnost stanovenou pro množiny M_N určitým způsobem vztáhneme na celou množinu $\mathbb{N}$.

Označme $P(M_N)$ pravděpodobnost jevu, že při náhodné volbě čísla $n \in M_N$ je n prvočíslo. Pak lze zjistit, že s rostoucím N se pravděpodobnost $P(M_N)$ zmenšuje; uveďme ji v procentech (se zaokrouhlením na 2 desetinná místa).

N	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$P(M_N)$ %	40	25	16,80	12,29	9,59	7,85	6,65	5,76	5,08	4,55

Abychom si uvědomili tuto klesající tendenci nejen na množinách M_N , uveďme namátkou ještě tabulku pravděpodobnosti P_k , že prvočíslem je zvolené n z k -tého milionu čísel, tj. od $(k-1) \cdot 10^6$ do $k \cdot 10^6$, pro $k = 1, \dots, 10$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(k)$ %	7,85	7,04	6,79	6,63	6,54	6,43	6,38	6,31	6,27	6,21

Ukážeme, že $P(M_N) \rightarrow 0$ pro $N \rightarrow +\infty$. Označme $\pi(N)$ počet prvočísel z množiny M_N ; pak $P(M_N) = \frac{\pi(N)}{N}$, takže podle první tabulky shora je $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1229$, atd. (další údaje v tabulce jsou zaokrouhleny). Již v 19. století ukázali francouzští matematici *Hadamard* a *Vallée-Poussin* (viz [1]), že platí

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1,$$

tedy v našem označení $\lim_{N \rightarrow +\infty} P(M_N) \ln N = 1$ (kde $\ln$ značí přirozený logaritmus), z čehož

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(M_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln N} = 0.$$

Z toho, co bylo výše uvedeno, tedy plyne: Úvodní otázka není korektní, protože nelze náhodně zvolit přirozené číslo. Při náhodné volbě přirozeného čísla z množiny M_N závisí hledaná pravděpodobnost na N a s rostoucím N klesá k nule.

Literatura

- [1] *Sierpinski, W.*: Co wiemy, a czego nie wiemy o liczbach pierwszych. PZWS, Warszawa 1961.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 5. 2006 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc.

Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 127

Nechť K , L , M jsou středy a D , E , F libovolné vnitřní body po řadě stran BC , CA , AB trojúhelníku ABC . Označme K' , L' , M' středy úseček AD , BE a CF . Přímký AD , BE a CF se protínají v jednom bodě, právě když se v jednom bodě protínají přímký KK' , LL' a MM' . Dokažte.

Jaroslav Švrček

Úloha 128

Kolika způsoby můžeme rozřezat obdélník 10×2 na obdélníky 2×1 a čtverce 1×1 ?

(Dvě rozřezání obdélníku považujeme za různá, pokud se liší počtem získaných útvarů nebo polohou alespoň jednoho řezu.)

Pavel Calábek

O jedné staré úloze

Slyšeli jste někdy o „kozí úloze“? Je to stará matematická úloha. Plocha trávníku má tvar kruhu o poloměru r . V bodě O na obvodu kruhu je upevněno lano délky s , na němž je uvázána koza. Máme určit délku lana s tak, aby koza spásala polovinu obsahu plochy trávníku. Na první pohled se zdá, že jde o jednoduchou úlohu, ale skutečnost je jiná. Jedno řešení této úlohy, jehož autorem je *RNDr. Josef Pastorčák*, najdete na internetové adrese www.ssppedagog.cz. Úloha je určena pro vyučující středních škol, vyšších odborných škol a další zájemce o matematiku.
