

# MATEMATIKA

## O jedné metodě důkazu dělitelnosti

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Při procvičování dělitelnosti (a někdy i v matematické olympiádě) se setkáváme s příklady tohoto typu: Je dán polynom  $V(n)$  s celočíselnými koeficienty. Dokažte, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  je výraz  $V(n)$  dělitelný daným číslem  $m \in \mathbb{N}$ .

### Příklad 1

Dokažte, že výraz  $V(n) = n(n^2 + 1)(4n^2 - 9)$  je pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  dělitelný pěti.

*Řešení:*

Univerzální algoritmus říká: dosadte za  $n$  postupně čísla  $5k$ ,  $5k + 1$ ,  $5k + 2$ ,  $5k + 3$ ,  $5k + 4$  a pokud se vám ve všech případech podaří upravit výraz na tvar  $5L$ , je důkaz proveden.

Někdy nahrazujeme dosazování úvahami o zbytcích v jednotlivých případech, které lze zobrazit v této tabulce (místo  $4n^2 - 9$  bereme pro pohodlnější počítání  $4n^2 + 1$ , které je o 10 větší, takže při dělení pěti dává též zbytek – je v téže třídě podle modulu 5 jako  $4n^2 - 9$ ):

| zbytek | $n$ | $n^2$ | $4n^2$ | $n^2 + 1$ | $4n^2 + 1$ | $V(n)$ |
|--------|-----|-------|--------|-----------|------------|--------|
|        | 0   | 0     | 0      | 1         | 1          | 0      |
|        | 1   | 1     | 4      | 2         | 0          | 0      |
|        | 2   | 4     | 1      | 0         | 2          | 0      |
|        | 3   | 4     | 1      | 0         | 2          | 0      |
|        | 4   | 1     | 4      | 2         | 0          | 0      |

Myšlenku, že při důkazu dělitelnosti číslem  $m$  můžeme k  $V(n)$  přidávat libovolné výrazy, které jsou násobkem  $m$ , lze využít ještě i k jinému postupu důkazu. Víme totiž, že pro všechna  $n$  přirozená je součin  $m$  po sobě jdoucích přirozených čísel vždy dělitelný číslem  $m$ . V našem případě je standardní výraz  $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$  pro všechna  $n$  dělitelný pěti a my se můžeme pokusit převést výraz  $V(n)$  na násobek uvedeného standardního výrazu. Například takto:

$$\begin{aligned} 5 \mid n(n^2 + 1)(4n^2 - 9) &\Leftrightarrow 5 \mid n(n^2 + 5n + 6)(4n^2 + 20n + 16) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 \mid 4n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \end{aligned}$$

a toto platí, takže platí i výchozí  $5 \mid V(n)$ .

Není to tak nesnadné, jak by se mohlo na první pohled zdát, protože víme, k čemu chceme dospět a možností je jen několik. Jestliže by ovšem výraz  $V(n)$  nebyl dělitelný pěti, pak by samozřejmě takový rozklad nebylo možno provést.

## Příklad 2

Dokažte, že výraz  $V(n) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$  je pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  dělitelný třiceti.

*Řešení:*

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , dokážeme tedy dělitelnost dvěma, třemi a pěti. Začneme pětkou:

$$\begin{aligned} 5 \mid n(n^2 - 1)(n^2 + 1) &\Leftrightarrow 5 \mid n(n-1)(n+1)(n^2 + 5n + 6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 \mid (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

a toto platí, takže  $5 \mid V(n)$ .

(samozřejmě bychom mohli nahradit činitele  $n-1$  činitelem  $n-1+5 = n+4$ ).

Z posledního výrazu nelze usuzovat na dělitelnost dvěma a třemi, protože byl upravován s ohledem na dělitelnost pěti. Platí však přímo rovnost

$$n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 5n + 6)$$

z níž je vidět dělitelnost dvěma (obsahuje součin dvou po sobě jdoucích čísel) i dělitelnost třemi (obsahuje součet tří po sobě jdoucích čísel). Takže  $30 \mid V(n)$ .

### Příklad 3

Dokažte, že výraz  $V(n) = n(2n^2 + 3)(4n^2 - 1)$  je dělitelný patnácti.

*Řešení:*

$$\begin{aligned} 3 \mid n(2n^2 + 3)(4n^2 - 1) &\Leftrightarrow 3n(2n^2 + 3)(4n^2 - 4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \mid 4(n-1)n(n+1)(2n^2 + 3) \text{ a toto platí, takže } 3 \mid V(n). \\ 5 \mid n(2n^2 + 3)(4n^2 - 1) &\Leftrightarrow 5 \mid n(2n^2 - 2)(4n^2 - 16) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 \mid 8(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \text{ a toto platí, takže } 5 \mid V(n) \end{aligned}$$

a tedy  $15 \mid V(n)$ .

### Příklad 4

Dokažte, že výraz  $V(n) = (n^3 + 10n)(2n^2 + 3n + 1)(3n^2 - n + 5)$  je pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  dělitelný sedmi.

*Řešení:*

$$\begin{aligned} 7 \mid (n^3 + 10n)(2n^2 + 3n + 1)(3n^2 - n + 5) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \mid n(n^2 + 7n + 10)(2n^2 + 10n + 8)(3n^2 + 27n + 54) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \mid n(n+2)(n+5) \cdot 2 \cdot (n+1)(n+4) \cdot 3 \cdot (n+3)(n+6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \mid 6n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) \end{aligned}$$

Poslední vztah platí, takže platí i výchozí  $7 \mid V(n)$ .

## Test funkčního myšlení žáků a studentů

PETR EISENMANN

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

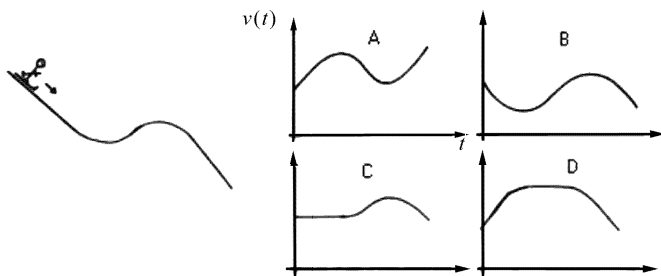
### Úvod

Tento článek popisuje výsledky experimentu, jehož cílem bylo zachytit jeden aspekt funkčního myšlení, a to schopnost vytvářet a popisovat

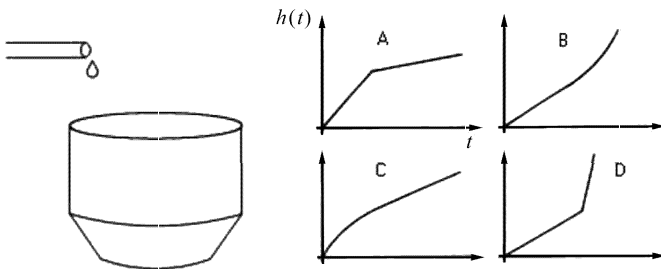
grafy funkčních závislostí. Dotazník uvedený na následující stránce vyplnilo v roce 2004 celkem 302 žáků základních škol (7., 8. a 9. třída), 296 studentů různých typů středních škol s maturitou (3. a 4. ročník) a 204 vysokoškolských studentů učitelství matematiky (všechny ročníky). Základní a střední školy se nacházejí v severočeském regionu, vysokými školami jsou míněny pedagogické fakulty v České a Slovenské republice. Respondenti vyplňovali dotazníky samostatně, anonymně, udávali pouze věk, pohlaví a školu. Poskytnutý čas byl maximálně 20 minut. Po vyplnění dotazníku následovala téměř vždy živá diskuse s žáky či studenty o výsledcích testu a správných odpovědích.

### Dotazník

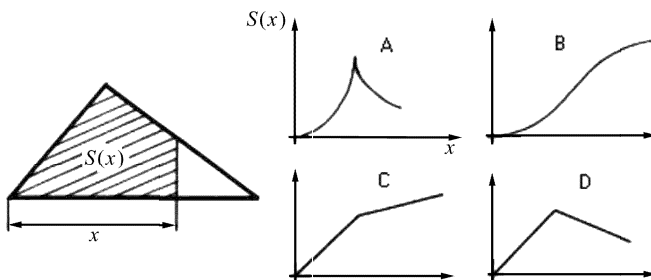
- 1) Grafy vpravo vyjadřují závislost rychlosti lyžaře  $v(t)$  na čase  $t$ . Jen jeden z nich odpovídá situaci zachycené na obrázku vlevo. Zaškrtněte jej.



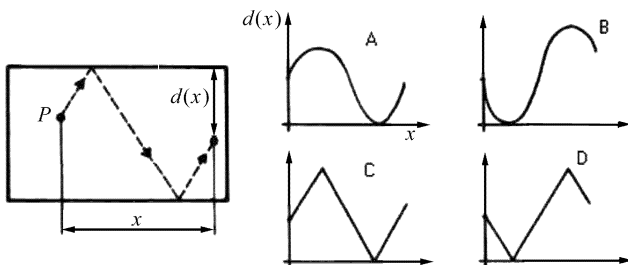
- 2) Nádoba se v čase  $t = 0$  začne naplňovat stálým přítokem vody. Grafy vpravo vyjadřují závislost výšky hladiny  $h(t)$  na čase  $t$ . Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



- 3) Grafy vpravo vyjadřují závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku  $S(x)$  na vzdálenosti  $x$ . Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



- 4) Kulečnicková koule je odpálena z bodu  $P$  ve směru čárkované čáry. Grafy vpravo vyjadřují závislost vzdálenosti  $d(x)$  koule od horní hrany stolu na vzdálenosti  $x$ . Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



Správné odpovědi jsou 1A, 2C, 3B a 4D.

## Výsledky

### Základní škola

|   | A  | B  | C  | D  | Neodpovědělo |
|---|----|----|----|----|--------------|
| 1 | 29 | 59 | 6  | 6  | 0            |
| 2 | 12 | 30 | 16 | 40 | 2            |
| 3 | 4  | 10 | 11 | 73 | 2            |
| 4 | 8  | 3  | 76 | 13 | 0            |

První tabulka ukazuje souhrnné výsledky žáků základních škol. Čísla vyjadřují četnost odpovědí v procentech. Je zřejmé, že žáci základních škol volili nejčastěji ty grafy, ve kterých křivka vyjadřující závislost odpovídá příslušnému obrázku znázorňujícímu danou situaci (markantní je to především u položek číslo 1, 3 a 4). To je pochopitelné. Na základní škole se žáci s interpretací závislostí z praxe, vyjádřených grafem, setkávají spíše vzácně. Většina žáků ještě graf číst neumí a tak volí odpověď podle podobnosti grafu funkce s obrázkem příslušné situace. Tento jev se objevil i u podobně koncipovaných úloh v tzv. PISA – studii (rozsáhlý výzkum matematických znalostí a dovedností žáků v mnoha zemích světa), viz [1].

Lepší výsledky zaznamenali respondenti tohoto věku pouze u položky číslo 1, kde správnou odpověď A volila téměř třetina žáků. Situace znázorněná v této položce je totiž pro respondenty obecně nejsnáze představitelná, nejvíce odpovídá jejich zkušenostem (viz výsledky dalších věkových kategorií).

Vývoj četnosti úspěšných odpovědí žáků základních škol v závislosti na věku (7., 8., 9. třída) je relevantní pouze u položky číslo 1, kde je tato závislost rostoucí (8, 33, 43 procent správných odpovědí), u ostatních tří položek se četnost správných odpovědí monotónně nezvyšuje a kolísá okolo 15 procent.

### Střední škola

|   | A  | B  | C  | D  |
|---|----|----|----|----|
| 1 | 84 | 6  | 3  | 7  |
| 2 | 26 | 31 | 40 | 3  |
| 3 | 4  | 16 | 30 | 50 |
| 4 | 10 | 6  | 34 | 50 |

U položek č. 1, 2 a 4 již správné odpovědi volilo vždy nejvíce respondentů této kategorie. Markantní je to především u první situace. Alarmující jsou podle mého soudu výsledky středoškoláků u položky č. 3, kde stále ještě značná část respondentů – plná polovina – volí nesmyslnou odpověď D (obsah zvětšující se části trojúhelníku zde podle tohoto grafu ubývá). Odpověď C v této položce (druhá nejčastější – 30 %) není z tohoto hlediska

tedy fatálně chybná. Že se jedná o závislost kvadratickou, a nikoli lineární, bylo nejčastější chybou i u následující kategorie vysokoškoláků.

### Vysoká škola

|   | A  | B  | C  | D  |
|---|----|----|----|----|
| 1 | 81 | 16 | 2  | 1  |
| 2 | 38 | 19 | 41 | 2  |
| 3 | 4  | 31 | 41 | 24 |
| 4 | 7  | 10 | 22 | 61 |

K výraznějšímu posunu u četnosti správných odpovědí dochází u respondentů této kategorie pouze u položky č. 3, maximum ohlasů (41 %) však zde má po částech lineární graf z odpovědi C.

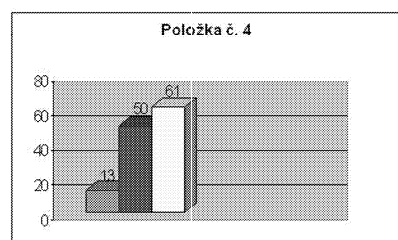
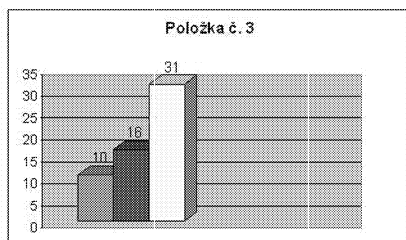
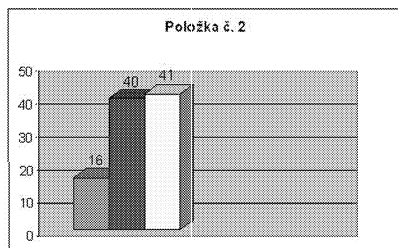
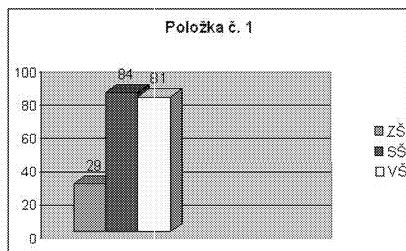
K dokreslení uvedených postřehů uveďme ještě následující diagramy ilustrující vývoj procentuální četnosti správných odpovědí u jednotlivých položek.

Za pozornost jistě stojí lepší výsledky středoškoláků oproti studentům učitelství matematiky u položky č. 1. Výrazný nárůst správných odpovědí mezi těmito dvěma kategoriemi respondentů není ani u druhé situace – naplňování nádoby.

Z hlediska vývoje je nejzajímavější položka č. 3. K výraznému nárůstu správných odpovědí zde došlo až u vysokoškoláků. Na základní i střední škole respondenti označovali nejčastěji odpověď D (73 % na základní a 50 % na střední škole), kde je graf funkce podobný obrázku příslušné situace.

Na závěr ještě zmíním jeden zajímavý výsledek. Porovnání četnosti správných odpovědí u chlapců a dívek vyznívá bez výjimky u každé položky a v každé věkové kategorii ve prospěch chlapců. Rozdíly to ale nejsou nikde velké. Na základní škole se jedná průměrně o 6 %, na střední škole o 10 % a na vysoké škole o 14 %.

Učitelé, kteří by chtěli uvedený dotazník vyzkoušet se svými žáky, jej najdou ke stažení na webové adrese [http://katmatupv.ujepurkyne.com/materialy/KMA\\_eisenmann\\_TFMZS.pdf](http://katmatupv.ujepurkyne.com/materialy/KMA_eisenmann_TFMZS.pdf).



## Literatura

- [1] *Leuders, T., Prediger, S.*: Funktioniert's? – Denken in Funktionen, Praxis der Mathematik in der Schule, 2005, č. 2, Köln/Leipzig, 1 – 7.

# Teória grafov a cestovanie

*RENÁTA KOTOROVÁ – INGRID SEMANIŠINOVÁ*

Gymnázium P. Horova, Michalovce – Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice,  
SLOVENSKO

## Úvod

Určite ste už niekedy vo svojom živote videli mapu metra, prípadne mapu MHD, na ktorej jednotlivé trasy nie sú krivoľaké čiary ale rovné úsečky a ani vzdialenosti medzi jednotlivými zastávkami celkom nezodpovedajú skutočnosti. Ak by ste takúto mapu priložili na geografickú mapu,

zistili by ste veľké rozdiely. Napriek tomu sa v týchto mapách vieme rýchlo a veľmi ľahko orientovať. Rozmýšľali ste o tom, prečo je to tak? Aké informácie pre cestujúceho takáto mapa zdôrazní a aké zanedbá? Prvá takáto mapa bola navrhnutá pre londýnske metro (pozri [3]). Vytvoril ju v roku 1931 *Henry C. Beck*. Dva roky sa takmer nepretržite snažil presvedčiť svojich nadriadených, aby aspoň na skúšku vydali dnes už všeobecne známy plán siete jednotlivých trás. Obávali sa totiž, že mapa je nepresná a väčšina cestujúcich jej nebude rozumieť. Mýlili sa. Každý cestujúci sa v tejto „nepresnej“ mape rýchlo zorientuje bez návodu a vysvetliviek a navyše si väčšina ľudí rýchlo uvedomí prednosti takéhoto spracovania pred klasickou mapou. Cestujúci v metre a tak isto v MHD totiž zvyčajne nehľadá vyhladkovú cestu, ale sa chce dozvedieť, ako sa dostať na určené miesto. Preto potrebuje rýchlo zistiť, kde má prestúpiť a na akú trasu, prípadne na aké číslo autobusu, trolejbusu, resp. električky. A práve tieto informácie takáto mapa zdôrazňuje.

Mapy, o ktorých sme písali, sú matematickými modelmi reálneho sveta. Takýto matematický model nazývame graf. Graf (väčšina populácie si tento pojem stotožní s grafom funkcie, pretože to je jediný graf, s ktorým sa počas štandardných kurzov matematiky stretli) je v podstate jednoduchá a prirodzená štruktúra, ktorú si môžeme názorne reprezentovať ako množinu bodov v rovine (vrcholy grafu) a množinu čiar, spájajúcich tieto body (hrany grafu). Okrem máp, ktoré znázorňujú trasy metra, električiek, či vlakov, sa grafy používajú na rozvrhovanie športových turnajov, v technickej, či v spotrebnej elektrotechnike, pri znázorňovaní elektronických obvodov a pod. Grafy už dlho predstavujú matematický model, ktorý sa využíva pri optimalizácii rozvozu tovaru k zákazníkovi, modelovaní tokov v inžinierskych sieťach, navrhovaní umiestnenia systémov rýchlej reakcie a pod. Pomocou grafov sa modelujú aj rôzne sociálne siete (v istom zmysle je jednou z takýchto sietí i Internet), skúma sa a predikuje správanie jednotlivých prvkov systému. Grafy teda nachádzajú uplatnenie všade tam, kde vystupujú nejaké objekty sveta, ktorý nás obklopuje a spolu s nimi sú pre nás dôležité i ich vzájomné relácie. Umožňujú nám abstrahovať od toho, či ide o stanice metra, miesta rozvozov alebo komunitu ľudí, či vzájomné väzby objektov vyjadrujú medziludské vzťahy, dopravné spojenie alebo elektromagnetické pôsobenie.

V školskej matematike sa vyskytujú v prevažnej miere úlohy, pri ktorých vytvorenie matematického modelu spočíva v zostavení rovnice, sústavy rovníc, alebo dosadení do už známeho vzorca. Využitie grafu pri mode-

lovaní ukáže žiakom nové matematické nástroje k riešeniu konkrétnych úloh, môžu si tiež uvedomiť ich vzťah k už známym pojmom a metódam. V článku budeme prezentovať úlohy, ktoré súvisia s modelovaním dopravných trás. Tieto úlohy sú propedeutickými úlohami [1] k pojmu *graf* a k ďalším pojmom teórie grafov (*hrana*, *stupeň vrcholu*, *cesta*, *kompletný graf*). Pri riešení väčšiny úloh môžu žiaci aplikovať poznatky, ktoré nadobudli pri štúdiu tematického celku Kombinatorika. Prezentované úlohy sú vhodné pre žiakov 6. – 9. ročníka ZŠ.

Navrhujeme, aby žiaci pri riešení úloh pracovali v dvoj – trojčlenných skupinách, najlepšie heterogénnych. Na začiatku riešenia úlohy, by sa mal každý žiak pokúsiť riešiť úlohu samostatne, nasleduje spoločné riešenie úlohy v rámci skupiny. Nakoniec sa prezentujú a porovnávajú riešenia skupín, zhodnotia sa, prípadne sa zovšeobecnia niektoré pozorovania. Táto spoločná analýza riešenia nemusí nasledovať po každej úlohe.

### Úloha 1 (graf)\*)

- a) Prezrite si mapu, na ktorej je zakreslená sieť železníc Slovenskej republiky (nájdete ju na [www stránke http://umv.science.upjs.sk/semanisinova/grafy/](http://umv.science.upjs.sk/semanisinova/grafy/)). Aké informácie z nej viete vyčítať?
- b) Čo (podľa vás) reprezentujú čiary a čo priesečníky čiar?

### Úloha 2 (cesta v grafe)

Na mape železničnej siete SR nájdite aspoň 5 dvojíc miest, medzi ktorými je možné cestovať priamo (bez prestupovania).

### Úloha 3 (graf)

Na [www stránke http://umv.science.upjs.sk/semanisinova/grafy/](http://umv.science.upjs.sk/semanisinova/grafy/) nájdete mapu pražskej hromadnej dopravy a mapu bratislavskej hromadnej dopravy. Porovnajte tieto mapy. Z ktorej mapy viete lepšie vyčítať informácie o doprave. Pokúste sa vysvetliť prečo.

V prvých troch úlohách sa žiaci stretávajú so separovanými modelmi pojmu graf. Cieľom je, aby žiaci zistili, že pri matematickom modelovaní situácie grafom (konkrétne ide o mapu dopravy) sa niektoré informácie zanedbajú (napr. geografická poloha, vzdialenosť) a niektoré zdôraznia (prestupné stanice, ľahko vieme zistiť počet staníc a ich názvy na nejakom úseku, linky idúce jedným smerom). So žiakmi potom môžeme diskutovať o tom, z akého dôvodu je to užitočné.

---

\*) Za číslom úlohy je vždy uvedený pojem, ku ktorému je úloha propedeutická.

**Úloha 4** (graf, vrchol grafu, hrana grafu)

Vytvorte podobnú mapu pre autobusovú dopravu v Košickom kraji. Na mape budú vyznačené všetky okresné mestá v Košickom kraji a priame autobusové linky medzi týmito mestami. Informácie o priamych autobusových linkách môžete získať z www stránky <http://www.cp.sk>.

**Úloha 5** (cesta v grafe)

Na základe mapy vytvorenej v úlohe 4 nájdite aspoň 2 rôzne spôsoby, ktorými sa môžeme dostať z Rožňavy do Trebišova a z Gelnice do Sobrance (do žiadneho mesta nepôjdeme viac ako raz).

**Úloha 6** (stupeň vrcholu grafu)

Na základe mapy vytvorenej v úlohe 4 doplňte do nasledujúcej tabuľky počty liniek, ktoré odchádzajú z jednotlivých miest.

| Mesto | Počet liniek |
|-------|--------------|
|       |              |
|       |              |
|       |              |
|       |              |
|       |              |
|       |              |
|       |              |
|       |              |
|       |              |

Úlohy 4 – 6 sú zamerané na vytváranie grafu (Košický kraj má 7 okresných miest, t.j. žiaci vytvárajú graf so 7 vrcholmi) a na čítanie informácií z vytvoreného grafu. Graf dopravných trás môže mať na prvý pohľad každá skupina žiakov iný. (Niektoré skupiny si totiž môžu uvedomiť, že geografická poloha mesta nie je až taká dôležitá a pri kreslení ju zanedbajú.). Môžeme potom diskutovať o tom, či tieto rozdiely sú z hľadiska získavania potrebných informácií podstatné.

**Úloha 7** (stupeň vrcholu grafu)

Čo reprezentuje súčet čísel v pravom stĺpci tabuľky z úlohy 6? Jana tvrdí, že ak by tabuľku, podobne ako v úlohe 6, urobila po zrušení niek-

torých liniek medzi mestami, tak súčet čísel v pravom stĺpci bude vždy párne číslo. Má pravdu?

Žiaci by si mali uvedomiť, že každá linka je v pravom stĺpci tabuľky zarátaná dvakrát, pretože v niektorom meste začína a v niektorom meste končí. Jana má teda pravdu. Môžeme skúsiť tvrdenie ďalej zovšeobecňovať, napr. ak 4. úlohu vyriešime pre Prešovský kraj bude platiť, že súčet čísel v pravom stĺpci bude vždy párne číslo?

### Úloha 8 (stromový graf)

Stali ste sa novým riaditeľom leteckej spoločnosti Transfer, ktorá prevádzkuje lety medzi hlavnými mestami štátov Európskej únie. V prvej fáze svojej existencie spoločnosť požaduje nasledovné:

1. Lety sa nezavádzajú do štátov prijatých do EÚ v roku 2004.
2. Počet priamych letov má byť čo najmenší.
3. Viem sa letecky dostať (s prestupom alebo bez prestupu) do každého hlavného mesta členského štátu EÚ (prijatého do EÚ pred rokom 2004).

Nakreslite vami navrhovanú letovú mapu. Koľko priamych letov je na mape?

### Úloha 9 (počet hrán v strome)

Koľko priamych letov bude na mape, ak spoločnosť zavedie lety do všetkých členských štátov Európskej únie a počet priamych letov má byť opäť čo najmenší? Viete to určiť aj bez zakreslenia letovej mapy?

V úlohe 8 žiaci vytvárajú stromový graf s 15 vrcholmi. Riešenia žiakov sa môžu líšiť. Druhá podmienka (počet priamych letov má byť čo najmenší) však zaručuje, že každá skupina, ktorá správne vyrieši úlohu dostane graf so 14 hranami – 14 priamych letov. Mala by nasledovať diskusia o tom, čo majú spoločné letové mapy jednotlivých skupín žiakov. Úloha 9 by mala žiakov navádzať k zovšeobecneniu – stromový graf s  $n$  vrcholmi má  $n - 1$  hrán.

### Úloha 10 (kompletný graf)

Vedenie leteckej spoločnosti sa rozhodlo, že ak bude spoločnosť najbližších 5 rokov vykazovať primeraný zisk, zavedie priame lety medzi hlavnými mestami štátov Európskej únie (prijatých do EÚ pred rokom 2004). Dokreslite do obrázku všetky chýbajúce lety. Koľko priamych letov je na vytvorenej letovej mape?

Koľko priamych letov by bolo na mape, ak by sa zaviedli priame lety medzi všetkými hlavnými mestami štátov EÚ?

Žiaci vytvárajú kompletný graf s 15 a s 25 vrcholmi. Po vyriešení úlohy by mali vedieť zovšeobecniť svoje riešenie pre kompletný graf s  $n$  vrcholmi, ktorý má  $n(n-1)/2$  hrán.

## Úloha 11

Na území Slovenskej republiky vzniká nová letecká spoločnosť LetAir, ktorej majiteľ vypísal súťaž pre návrh letového plánu. Ste členom jednej zo skupín, ktorá sa rozhodla zapojiť do tvorby projektu. Navrhňte pre túto spoločnosť letový poriadok, ak sú naň kladené tieto požiadavky:

- Lety sú v rámci krajín: Slovensko, Česko, Maďarsko a Poľsko.
- Linky budú premávať do miest, v ktorých už letiská existujú. V prípade, že sa vám zdá, že by bolo vhodné vybudovať v niektorom meste letisko, zahrňte ho do svojho plánu s odôvodnením.
- Do každého z vybraných miest sa dá dostať letecky (nemusí to byť priamo).
- Každá priama linka znázornená v letovej mape predstavuje jeden let denne tam aj späť.
- Denne sa v spoločnosti nemôže nalietat viac ako 15 000 km kvôli tomu, že by to bolo nevýhodné.

Nakreslite letovú mapu, zvážte, ktoré linky je vhodné zaviesť a prečo. Overte, že ste neprekročili limit.

Vyriešenie všetkých úloh vyžaduje tri až štyri vyučovacie hodiny. Je vhodné, aby pri riešení úloh žiaci mali k dispozícii počítač. Ak počítač nie je možné zabezpečiť, učiteľ môže potrebné informácie žiakom poskytnúť, alebo môže žiakom navrhnúť, aby si ich pripravili v rámci domácej prípravy na hodinu matematiky, resp. geografie.

## Záver

Za posledných sto rokov prešlo matematické modelovanie mnohými zmenami. Tieto zmeny vyplývajú jednak z nových typov situácií, ktoré potrebujeme modelovať, ale aj z nových metód modelovania. Jedným zo silných nástrojov matematického modelovania je diskretný matematický model – graf. Úlohy prezentované v článku umožňujú žiakom sprístupniť nové aplikácie matematiky, ktoré obohacujú ich životné skúsenosti. Úlohy nevyžadujú špecifické vstupné vedomosti a môžeme ich riešiť so žiakmi viacerých vekových kategórií. Pri riešení úloh žiaci nemusia používať ustálené

odborné výrazy a symboliku a na to, aby zapísali riešenie úlohy vystačia so slovným zápisom, ktorý je doplnený vhodným obrázkom. Tento fakt ponúka učiteľovi možnosť zapojiť do riešenia úloh vo výraznejšej miere žiakov, ktorí majú s „klasickou“ matematikou problémy.

V uvedených úlohách sa zatiaľ nezavádza abstraktný pojem graf. Žiaci pracujú len so separovaným modelom grafu – mapou dopravných trás. Myslíme si, že pred zavedením abstraktného pojmu je vhodné prezentovať ďalšie separované modely pojmu graf z iných oblastí života (napr. rozvrhové problémy, niektoré optimalizačné úlohy a pod.).

## Literatúra

- [1] *Devlin, K.*: Jazyk matematiky Jak zviditeľnit neviditelné. Dokořán/Argo, 2002.
- [2] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990.
- [3] *Šveda, D.*: Tvorba systémov úloh v matematike. Metodické centrum, Prešov 1992.
- [4] <http://umv.science.upjs.sk/semanisinova/grafy/>

# Skalární součin vektorů

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Ve středoškolských učebnicích analytické geometrie je pojem skalárního součinu využíván převážně k určování úhlu dvou vektorů daných svými souřadnicemi a ke zjišťování odchylky přímek nebo rovin daných svými rovnicemi. Použití skalárního součinu „bez souřadnic“ se většinou omezuje na jeden nebo dva důkazy některých vlastností trojúhelníku.

V tomto článku vyřešíme několik snadných příkladů, jejichž cílem je ukázat studentům, že s vektory se dá pracovat i „bez souřadnic“ a že vzorec

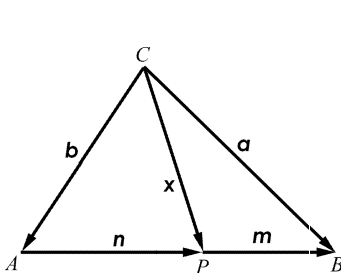
$$uv = |u| \cdot |v| \cos \varphi,$$

pro skalární součin nenulových vektorů  $u$ ,  $v$  má použití i v souvislostech jiných než jsou výše uvedené.

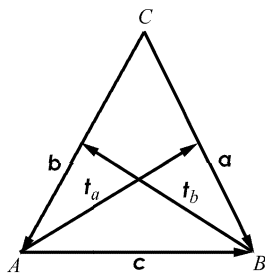
### Příklad 1

V trojúhelníku  $ABC$  na obr. 1 je  $P$  libovolný vnitřní bod strany  $AB$ . Dokažte, že pro vektory  $\mathbf{x} = P - C$ ,  $\mathbf{b} = A - C$ ,  $\mathbf{a} = B - C$  a čísla  $n = |AP|$ ,  $m = |BP|$  platí

$$(m + n)\mathbf{x} = m\mathbf{b} + n\mathbf{a}.$$



Obr. 1



Obr. 2

Podle obr. 1 pro vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{m} = B - P$ ,  $\mathbf{n} = P - A$  máme

$$\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{n} \quad \mathbf{a} - \mathbf{x} = \mathbf{m},$$

odkud dostaneme

$$m(\mathbf{x} - \mathbf{b}) = mn, \quad n(\mathbf{a} - \mathbf{x}) = nm$$

a po odečtení

$$m(\mathbf{x} - \mathbf{b}) - n(\mathbf{a} - \mathbf{x}) = mn - nm.$$

Protože však je

$$\mathbf{m} = k\mathbf{n}, \text{ kde } k > 0 \quad \text{a} \quad m = |\mathbf{m}| = |k\mathbf{n}| = k|\mathbf{n}| = kn,$$

platí

$$nm = n(kn) = (kn)n = mn, \text{ takže } mn - nm = 0.$$

Dostáváme tak

$$m(\mathbf{x} - \mathbf{b}) - n(\mathbf{a} - \mathbf{x}) = 0,$$

neboli

$$(m + n)\mathbf{x} = m\mathbf{b} + n\mathbf{a}.$$

## Příklad 2

Užitím tohoto výsledku určíme v trojúhelníku  $ABC$  délky jeho těžnic.

V trojúhelníku  $ABC$  na obr. 1 zvolíme bod  $P$  tak, aby byl středem strany  $AB$ , takže  $t_c = |\mathbf{x}|$ ,  $m = n = \frac{1}{2}c$ . Podle výše uvedeného vzorce platí

$$\begin{aligned}c\mathbf{x} &= \frac{1}{2}c\mathbf{b} + \frac{1}{2}c\mathbf{a}, \\ \mathbf{x} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\end{aligned}$$

Pro délku těžnice  $t_c$  máme postupně:

$$t_c^2 = |\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\mathbf{x} = \frac{1}{4}(a^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + b^2) = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab \cos \gamma + b^2).$$

Když pak z kosinové věty vyjádříme

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

a dosadíme do výrazu pro  $t_c^2$ , dostaneme po odmocnění

$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Délky těžnic  $t_a$ ,  $t_b$  získáme cyklickou záměnou.

## Příklad 3

Podobným způsobem určíme v trojúhelníku  $ABC$  délky os jeho vnitřních úhlů.

V trojúhelníku  $ABC$  na obr. 1 bude bod  $P$  průsečíkem strany  $AB$  a osy  $o_c$  vnitřního úhlu při vrcholu  $C$ . Jak známo, platí v tomto případě

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b},$$

odkud užitím vztahu  $m + n = c$  vypočteme

$$n = \frac{bc}{a+b}, \quad m = \frac{ac}{a+b}.$$

Dosazením za  $m$  a  $n$  do rovnosti odvozené výše dostaneme po zkrácení číslem  $c$

$$\mathbf{x} = \mathbf{o}_c = \frac{a}{a+b}\mathbf{b} + \frac{b}{a+b}\mathbf{a},$$

takže pro délku  $o_c$  osy úhlu máme

$$\begin{aligned} o_c^2 &= |\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\mathbf{x} = \frac{1}{(a+b)^2}(a^2b^2 + 2ab \cdot \mathbf{ab} + b^2a^2) = \\ &= \frac{1}{(a+b)^2}(2a^2b^2 + 2a^2b^2 \cos \gamma). \end{aligned}$$

Z kosinové věty určíme

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

a po dosazení a odmocnění dojdeme k výsledku

$$o_c = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab(a+b)^2 - c^2}.$$

Délky  $o_a$ ,  $o_b$  získáme cyklickou záměnou.

#### Příklad 4

Dokažte tvrzení: Jestliže pro délky stran  $a$ ,  $b$ ,  $c$  trojúhelníku  $ABC$  platí rovnost  $a^2 + b^2 = 5c^2$ , jsou jeho těžnice  $\mathbf{t}_a$ ,  $\mathbf{t}_b$  navzájem kolmé.

V trojúhelníku  $ABC$  na obr. 2 pro vektory  $\mathbf{t}_a$ ,  $\mathbf{t}_b$  platí

$$\mathbf{t}_a = -\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a}, \quad \mathbf{t}_b = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

takže

$$\mathbf{t}_a \mathbf{t}_b = \mathbf{ab} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{4} = \frac{5ab}{4} - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{5ab}{4} - \frac{5c^2}{2}.$$

Pro skalární součin  $\mathbf{cc}$  vektoru  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  máme

$$\mathbf{cc} = \mathbf{c}^2 = c^2 = a^2 - 2\mathbf{ab} + b^2$$

odkud

$$2\mathbf{ab} = a^2 + b^2 - c^2 = 5c^2 - c^2 = 4c^2.$$

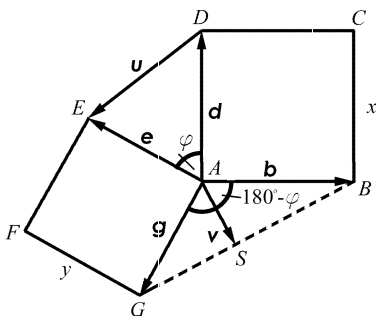
Dosazením do výrazu pro  $t_a t_b$  dostaneme

$$t_a t_b = 5 \frac{2c^2}{4} - 5 \frac{c^2}{2} = 0,$$

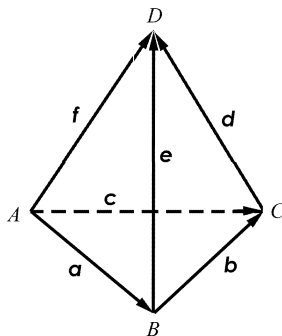
což znamená, že těžnice  $t_a$ ,  $t_b$  jsou navzájem kolmé.

### Příklad 5

Na obr. 3 jsou dány čtverce  $ABCD$  a  $AEFG$  se společným vrcholem  $A$  a stranami  $x$ ,  $y$ . Dokažte, že platí  $2|AS| = |ED|$ , kde  $S$  je střed úsečky  $BG$ .



Obr. 3



Obr. 4

Nejprve podle obr. 3 zvolíme vektory

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} - \mathbf{A}, \mathbf{d} = \mathbf{D} - \mathbf{A}, \mathbf{e} = \mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{g} = \mathbf{G} - \mathbf{A}, \mathbf{u} = \mathbf{E} - \mathbf{D}, \mathbf{v} = \mathbf{S} - \mathbf{A},$$

jejichž velikosti jsou

$$|\mathbf{b}| = |\mathbf{d}| = b = d = x, |\mathbf{e}| = |\mathbf{g}| = e = g = y, \mathbf{u} = |\mathbf{ED}| = u, \mathbf{v} = |\mathbf{AS}| = v.$$

Ze skalárního součinu  $\mathbf{uu}$  vektoru  $\mathbf{u} = \mathbf{e} - \mathbf{d}$  postupně určíme:

$$u^2 = e^2 - 2ed + d^2$$

$$u^2 = e^2 - 2ed \cos \varphi + d^2$$

$$2ed \cos \varphi = e^2 + d^2 - u^2$$

Ze skalárního součinu  $\mathbf{v}\mathbf{v}$  vektoru  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{g}}{2}$  dostáváme

$$4\mathbf{v}^2 = \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{g} + \mathbf{g}^2,$$

$$4v^2 = b^2 + 2bg \cos(180^\circ - \varphi) + g^2 = d^2 - 2de \cos \varphi + e^2.$$

Dosadíme za  $2de \cos \varphi$  a máme

$$4v^2 = d^2 - (e^2 + d^2 - u^2) + e^2 = u^2$$

neboli

$$2|AS| = |ED|.$$

### Příklad 6

Dokažte, že v pravidelném čtyřtěnu jsou každé dvě protější hrany navzájem kolmé.

V pravidelném čtyřtěnu  $ABCD$  na obr. 4 zvolíme vektory  $\mathbf{a} = B - A$ ,  $\mathbf{b} = C - B$ ,  $\mathbf{c} = C - A$ ,  $\mathbf{d} = D - C$ ,  $\mathbf{e} = D - B$ ,  $\mathbf{f} = D - A$ , a protože jde o čtyřtěn pravidelný, jejich velikosti se rovnají

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = |\mathbf{e}| = |\mathbf{f}|.$$

Máme dokázat, že je

$$\mathbf{ad} = \mathbf{bf} = \mathbf{ce} = 0.$$

Pro následující vektory platí:

|                                                             |                                                             |                                                             |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{f}$            | $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$            | $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$            |
| $\mathbf{f} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$         | $\mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{e} - \mathbf{d}$         | $\mathbf{e} - \mathbf{b} = \mathbf{f} - \mathbf{c}$         |
| $\mathbf{f} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{d}$         | $\mathbf{c} - \mathbf{e} = \mathbf{a} - \mathbf{d}$         | $\mathbf{c} + \mathbf{e} = \mathbf{b} + \mathbf{f}$         |
| $(\mathbf{f} - \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{d})^2$ | $(\mathbf{c} - \mathbf{e})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{d})^2$ | $(\mathbf{c} + \mathbf{e})^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{f})^2$ |
| $-\mathbf{bf} = \mathbf{ad}$                                | $\mathbf{ce} = \mathbf{ad}$                                 | $\mathbf{ce} = \mathbf{bf}$                                 |

Odtud plyne  $\mathbf{bf} = -\mathbf{bf}$ , takže  $\mathbf{bf} = 0$ , a tedy také  $\mathbf{ad} = 0$ ,  $\mathbf{ce} = 0$ , což jsme chtěli dokázat.

# Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 121 a 122, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (15.) ročníku našeho časopisu.

## Úloha 121

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} &= \frac{2}{y^2}, \\ y + \frac{1}{y} &= \frac{2}{z^2}, \\ z + \frac{1}{z} &= \frac{2}{x^2}.\end{aligned}$$

*Jaroslav Švrček*

*Řešení:*

Ze zadání plyne  $xyz \neq 0$ . Vzhledem k tomu, že pravé strany všech tří daných rovnic jsou kladná čísla, je  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ . Pro každé kladné reálné číslo  $a$  platí  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ . Ze třetí rovnice zadané soustavy plyne

$$\frac{2}{x^2} = z + \frac{1}{z} \geq 2,$$

proto  $x^2 \leq 1$  a tedy  $x \in (0, 1]$ . Podobně ze zbývajících rovnic dané soustavy dostaneme  $y \in (0, 1]$ ,  $z \in (0, 1]$ . Pro  $x, y \in (0, 1]$  z první rovnice zadané soustavy platí

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq x + \frac{1}{x} = \frac{2}{y^2},$$

tedy  $y^2 \geq x$ . Podobně ze zbývajících rovnic plyne  $z^2 \geq y$  a  $x^2 \geq z$ . Odtud dále platí

$$x^8 = (x^2)^4 \geq z^4 = (z^2)^2 \geq y^2 \geq x.$$

Nerovnost  $x^8 \geq x$  má v intervalu  $(0, 1]$  právě jedno řešení  $x = 1$  a tudíž  $y = z = 1$ .

Trojice  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  je jediným řešením dané soustavy rovnic.

*Jiné řešení:*

Stejně jako v předchozím řešení ukážeme, že  $x, y, z \in (0, 1)$ . Sečteme pravé a levé strany všech rovnic dané soustavy a po úpravě dostaneme

$$x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + y + \frac{1}{y} - \frac{2}{y^2} + z + \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} = 0. \quad (1)$$

Protože

$$x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^3 + x - 2}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x^2},$$

je rovnice (1) ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x^2} + \frac{(y-1)(y^2 + y + 2)}{y^2} + \frac{(z-1)(z^2 + z + 2)}{z^2} = 0,$$

která má v množině  $(0, 1)$  jediné řešení  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ . Zkouškou se přesvědčíme, že tato trojice je jediným řešením dané soustavy.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Lukáš Bednařík* z SG v Olomouci, *Jaroslav Hančl* a *Miroslav Klimoš*, oba z GMK v Bílovci, *Lucie Fabriková*, *Zbyněk Konečný*, *Martin Křivánek*, *Jakub Opršal*, *Alexandr Pícha* a *Jan Uhlík*, všichni z G Brno, tč. Kpt. Jaroše, *Anežka Faltýnková* z GJŠ v Přerově, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť, *Marek Scholle* z G Pardubice, Dašická, *Lukáš Vítovec* z G Karlovy Vary, Kladenská, a *Radek Žlebčík* z G Praha 5, Zborovská.

Neúplné řešení zaslali: *Vít Orava* z GMK v Bílovci a *Tomáš Jedlička* z G Třebíč.

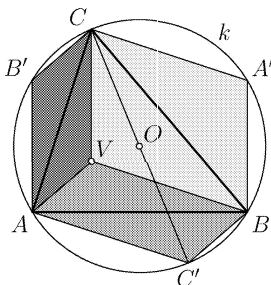
## Úloha 122

Nechť  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  jsou průsečíky vnitřků polopřímek  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  s kružnicí  $k(O; r)$  opsanou ostroúhlému trojúhelníku  $ABC$ . Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků  $ABC'$ ,  $BCA'$  a  $CAB'$  je roven obsahu trojúhelníku  $ABC$ .

*Pavel Leischner*

*Řešení:*

Označme  $V$  průsečík výšek trojúhelníku  $ABC$ , protože trojúhelník je ostroúhlý, je bod  $V$  jeho vnitřním bodem.



Úsečka  $CC'$  je průměrem kružnice  $k$ , z vlastností Thaletovy kružnice vidíme, že úsečka  $C'B$  je kolmá na  $CB$ , tedy rovnoběžná s  $AV$ . Podobně  $C'A \parallel BV$ , odtud plyne že  $AC'BV$  je rovnoběžník, úsečka  $AB$  je jeho úhlopříčka a tedy obsahy trojúhelníků  $ABV$  a  $ABC'$  jsou shodné. Stejně ukážeme, že jsou shodné i obsahy trojúhelníků  $BCV$  a  $BCA'$ , resp.  $CAV$  a  $CAB'$ . Proto je součet obsahů trojúhelníků  $ABC', BCA'$  a  $CAB'$  roven obsahu trojúhelníku  $ABC$ .

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Monika Pospíšilová* z Prahy, *Mária Vasilová* z Michalovců, *Lukáš Bednařík* z SG v Olomouci, *Eva Černohorská* z 1. českého G v Karlových Varech, *Martin Golan* z GJK v Praze 1, *Jaroslav Haněl*, *Miroslav Klimoš* a *Michael Kučera*, všichni z GMK v Bílovci, *Tomáš Hejda* a *Radek Žlebčík* oba z G Praha 5, Zbořovská, *Lucie Fabriková*, *Zbyněk Konečný*, *Martin Křivánek*, *Jakub Opršal*, *Alexandr Pícha* a *Jan Uhlík*, všichni z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Anežka Faltýnková* z GJŠ v Přerově, *Tomáš Jedlička* z G Třebíč, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť, *Marek Scholle* z G Pardubice, Dašická a *Pavel Šalom* z G Rožnov p. R.

Neúplné řešení zaslal: *Adam Kubetta* z GMK v Bílovci.