

MATEMATIKA

O některých geometrickách úlohách vedoucích na geometrickou řadu

PAVEL TROJOVSKÝ

Pedagogická fakulta UHK, Hradec Králové

Ze srovnání učiva věnovaného číselným řadám ve středoškolských učebnicích od roku 1862 až do současnosti, o kterém pojednával příspěvek [10] je zřejmé, že se každá ze sledovaných učebnic zabývá jistým způsobem geometrickou řadou a jejím součtem. V nich uváděné úlohy na geometrickou řadu jsou v podstatě jen dvou typů:

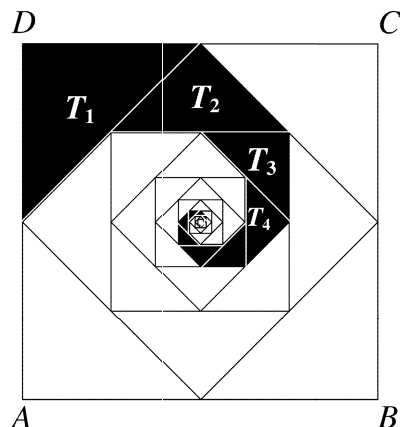
- ve všech diskutovaných učebnicích se užívají k vyjádření reálného čísla s periodickým desetinným rozvojem ve tvaru zlomku,
- ve většině z těchto učebnic se pak objevují úlohy s geometrickou tematikou. Jde však v zásadě jen o pět úloh, které se neustále opakují.

V tomto příspěvku se proto zaměříme na některé další úlohy s geometrickou problematikou, které jsou podle našeho názoru zajímavější a tedy více motivují studenty. Některé z nich jsou převzatou nebo upravenou verzí úloh, které lze nalézt v článcích [1], [2], [3], [7] z časopisu *Mathematics Teacher*. Uvedeme vždy u každé úlohy její zadání a přidáme i stručné řešení.

Soubor úloh na geometrickou řadu

Příklad 1

Do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ o velikosti strany $a_1 = 1$ je vepsán čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tak, že jeho vrcholy A_2, B_2, C_2, D_2 jsou postupně středy stran $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$; obdobně vepíšeme čtverec $A_3B_3C_3D_3$ do čtverce $A_2B_2C_2D_2$ atd. Určete obsah spirály, která vzniká z posloupnosti rovnoramenných trojúhelníků $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ (délka ramen těchto trojúhelníků je vždy rovna polovině délky strany nejmenšího ze čtverců, v jehož vnitřku



Obr. 1

se nacházejí). Její vznik je naznačen na obr. 1. Uvažujte, že úvodní čtverec $A_1B_1C_1D_1$ má délku strany $a_1 = 1$.

Řešení:

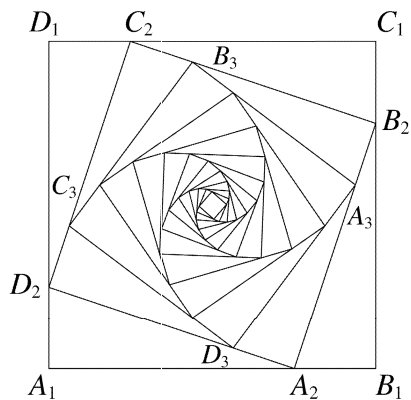
Pro obsah čtverce $A_1B_1C_1D_1$ platí $P(C) = 1$. Pro obsah trojúhelníka T_1 , resp. T_2 , snadno získáváme $P(T_1) = \frac{1}{8}$, resp. $P(T_2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}$. Uvažujme-li pro libovolné přirozené číslo n dva následující trojúhelníky T_n a T_{n+1} z této posloupnosti trojúhelníků, pak vzhledem k jejich podobnosti s koeficientem podobnosti $\frac{\sqrt{2}}{2}$ platí $P(T_{n+1}) = \frac{1}{2}P(T_n)$. Tedy pro každé přirozené číslo n mají trojúhelníky T_n obsah $P(T_n) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Pro obsah uvažované nekonečné spirály dostáváme

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Příklad 2

Do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ o velikosti strany $a_1 = a$ je vepsán další čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tak, že jeho vrcholy A_2, B_2, C_2, D_2 dělí postupně strany $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ v poměru $q : 1$ (q je libovolné kladné reálné číslo); obdobně vepíšeme čtverec $A_3B_3C_3D_3$ do čtverce $A_2B_2C_2D_2$ a tento způsob vepisování čtverců nestále opakujeme, viz obr. 2. Vypočtete součet obvodů všech těchto čtverců.



Obr. 2

Řešení:

Pro každé přirozené číslo n označíme a_n velikost strany čtverce $A_n B_n C_n D_n$ a tedy

$$|A_n A_{n+1}| = |B_n B_{n+1}| = |C_n C_{n+1}| = |D_n D_{n+1}| = \frac{q}{1+q} a_n$$

a

$$|A_{n+1} B_n| = |B_{n+1} C_n| = |C_{n+1} D_n| = |D_{n+1} A_n| = \frac{1}{1+q} a_n .$$

Užitím pravoúhlého trojúhelníka $A_{n+1} B_n B_{n+1}$ získáváme, že pro velikost strany čtverce $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ platí

$$a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{1+q}\right)^2 + \left(\frac{q}{1+q}\right)^2} a_n = \frac{\sqrt{1+q^2}}{1+q} a_n$$

a tedy je pro každé přirozené číslo n

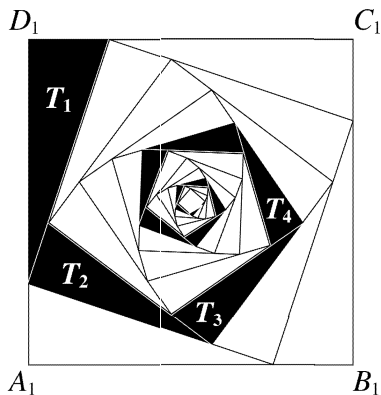
$$a_n = a \left(\frac{\sqrt{1+q^2}}{1+q} \right)^{n-1} .$$

Pro součet obvodů všech čtverců $A_n B_n C_n D_n$ ($n=1, 2, \dots$) pak platí

$$\begin{aligned} o &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n = 4a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1+q^2}}{1+q} \right)^{n-1} = 4a \frac{1}{1 - (1+q)^{-1} \sqrt{1+q^2}} \\ &= 4a \frac{1+q}{1+q - \sqrt{1+q^2}} = \frac{2a(1+q)}{q} (1+q + \sqrt{1+q^2}) . \end{aligned}$$

Příklad 3

Uvažujte posloupnost vepsaných čtverců z předchozího příkladu. Určete obsah spirály, která vzniká z na sebe navazující posloupnosti pravoúhlých trojúhelníků $(T_n)_{n=1}^\infty$. Její vznik je naznačen na obr. 3.



Obr. 3

Řešení:

Pro obsah čtverce $A_1B_1C_1D_1$ platí $P(C) = a^2$. V předchozí úloze jsme zjistili, že pro délky stran posloupnosti vepsaných čtverců pro libovolné přirozené číslo n platí

$$a_n = a \left(\frac{\sqrt{1+q^2}}{1+q} \right)^{n-1}.$$

Tedy pro každé přirozené číslo n je obsah trojúhelníka T_n

$$\begin{aligned} P(T_n) &= \frac{1}{2} \left(\frac{q}{1+q} a_n \right) \left(\frac{1}{1+q} a_n \right) = \frac{q}{2(1+q)^2} a_n^2 \\ &= \frac{q}{2(1+q)^2} \left(\left(\frac{\sqrt{1+q^2}}{1+q} \right)^2 \right)^{n-1} a^2 = \frac{qa^2}{2(1+q)^2} \left(\frac{1+q^2}{(1+q)^2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

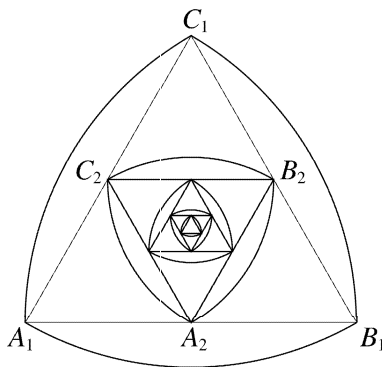
a proto obsah uvažované nekonečné spirály je

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n) = \frac{qa^2}{2(1+q)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^2}{(1+q)^2} \right)^{n-1} \\
 &= \frac{qa^2}{2(1+q)^2} \cdot \frac{1}{1 - (1+q^2)(1+q)^{-2}} = \frac{qa^2}{2(1+q)^2} \cdot \frac{(1+q)^2}{2q} = \frac{a^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Prohlédněte si nyní ještě jednou a podrobněji obr. 1 a obr. 2. Všimli jste si, že obsahy vypočítané v příkladech 1 a 3 jsou z nich zřejmé?

Příklad 4

Určete součet obsahů nekonečné posloupnosti Reuleauxových trojúhelníků, které mají základ v posloupnosti rovnostranných trojúhelníků $(A_n B_n C_n)_{n=1}^{\infty}$, když pro každé přirozené číslo n platí, že A_{n+1} je střed strany $A_n B_n$, B_{n+1} je střed strany $B_n C_n$ a C_{n+1} je střed strany $C_n A_n$, viz obr. 4. Termínem Reuleauxův*) trojúhelník rozumíme konvexní útvar, který vznikne jako průnik tří kruhů, majících postupně středy ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka a jejich poloměry jsou rovny velikosti jeho strany. Uvažujte, že úvodní trojúhelník $A_1 B_1 C_1$ má délku strany $a_1 = a$.



Obr. 4

*) Získal svůj název na počest *Franze Reuleauxe*, který se zabýval jeho vlastnostmi, viz [6]. Připomeňme si, že např. píst Wankelova motoru má tvar Reuleauxova trojúhelníka.

Řešení:

Obsah Reuleauxova trojúhelníka opsaného rovnostrannému trojúhelníku $A_n B_n C_n$ o straně délky a_n lze získat jako součet tří kruhových výsečí s úhlem 60° a poloměrem a_n bez dvojnásobku obsahu trojúhelníka $A_n B_n C_n$, tedy

$$P_n = 3 \left(\frac{1}{6} \pi a_n^2 \right) - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} a_n}{2} a_n \right) = \frac{(\pi - \sqrt{3})}{2} a_n^2.$$

Jelikož pro délky stran trojúhelníků $A_n B_n C_n$ a $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ platí $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$, má Reuleauxův trojúhelník opsaný trojúhelníku $A_n B_n C_n$ obsah

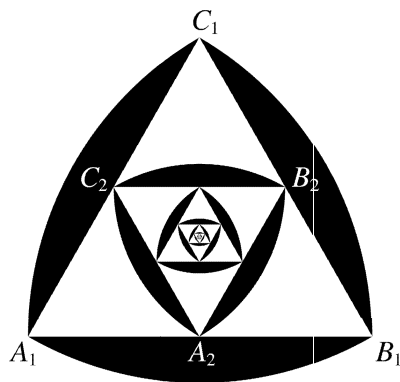
$$P_n = \frac{(\pi - \sqrt{3})}{2} \cdot a_n^2 = \frac{(\pi - \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{a^2}{4^{n-1}}.$$

Pro součet obsahů všech Reuleauxových trojúhelníků pak platí

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi - \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{a^2}{4^{n-1}} = \frac{(\pi - \sqrt{3})}{2} \cdot a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ &= \frac{(\pi - \sqrt{3})}{2} a^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2(\pi - \sqrt{3})}{3} a^2. \end{aligned}$$

Příklad 5

Určete součet obsahů posloupnosti „Reuleauxových měsíčků“, jejíž členy vždy vznikají jako rozdíl Reuleauxova trojúhelníka a rovnostranného trojúhelníka, kterému je opsán (viz předchozí příklad). Několik prvních členů této posloupnosti je na obr. 5:



Obr. 5

Řešení:

Postupujeme obdobně jako v příkladu 4, tedy pro obsah tří „měsíčků“ opsaných trojúhelníku $A_n B_n C_n$ platí

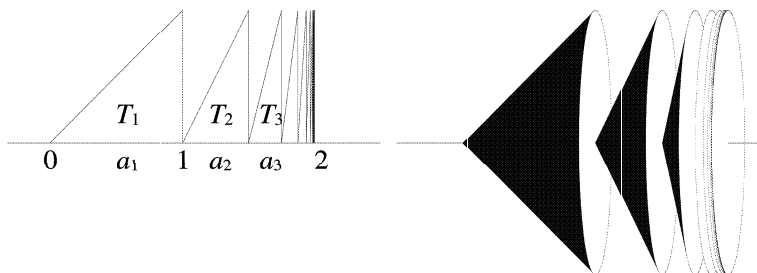
$$\begin{aligned} P_n &= 3 \left(\frac{\pi a_n^2}{6} - \frac{1}{2} a_n \frac{\sqrt{3}}{2} a_n \right) = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})}{4} a_n^2 \\ &= \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})}{4} \cdot \frac{a^2}{4^{n-1}} = (2\pi - 3\sqrt{3}) a^2 \left(\frac{1}{4} \right)^n \end{aligned}$$

a pro součet obsahů posloupnosti všech těchto „měsíčků“ získáváme

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi - 3\sqrt{3}) a^2 \left(\frac{1}{4} \right)^n = (2\pi - 3\sqrt{3}) a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ &= (2\pi - 3\sqrt{3}) a^2 \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})}{3} a^2 . \end{aligned}$$

Příklad 6

Uvažujme těleso, které vznikne rotací nekonečné posloupnosti pravoúhlých trojúhelníků $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ okolo osy o (viz obr. 6).



Obr. 6

Jaký je objem a povrch tohoto tělesa, jestliže každý z trojúhelníků T_n , pro $n \in \mathbb{N}$, má výšku o velikosti 1 a pro velikost jejich odvěsny, ležící na ose o , postupně platí $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$?

Řešení:

Toto těleso je tedy tvořeno posloupností kuželů $(K_n)_{n=1}^{\infty}$, přičemž pro každé přirozené číslo n je povrch kužele K_n

$$S(K_n) = \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{1 + a_n^2} = \pi(1 + \sqrt{1 + 1/2^{2n-2}})$$

a jeho objem

$$V(K_n) = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot a_n = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pro vzniklé těleso získáváme, že povrch*) je

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \pi(1 + 1) = +\infty$$

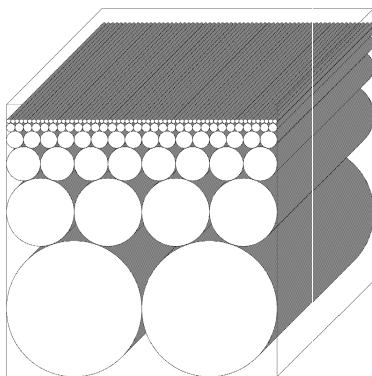
a objem

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi.$$

Jde tedy o těleso s konečným objemem a nekonečným povrchem.

Příklad 7

Těleso na obr. 7 je složeno z nekonečné posloupnosti vrstev válců, které mají vesměs výšku o velikosti 1 a pro jejich poloměry v n -té vrstvě odspodu platí $r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.



Obr. 7

*) Vzniklá řada však není geometrickou řadou, tedy jsme nuceni ukázat její divergenci srovnáním s aritmetickou řadou.

Určete objem a povrch vzniklého tělesa.

Řešení:

Je zřejmé, že pro počet válců v n -té vrstvě platí $p_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pro objem libovolného z válců v n -té vrstvě platí

$$V_n = \pi r_n^2 \cdot 1 = \pi \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

a pro jeho povrch

$$S_n = 2\pi r_n^2 + 2\pi r_n \cdot 1 = 2\pi \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pro objem celého tělesa získáváme

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^n = \pi \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi$$

a pro povrch*)

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\pi \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) 2^n \\ &= 2\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 1 \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Závěr

Uvedli jsme si skupinu geometrických úloh, jejichž řešení vedlo na geometrickou řadu. Podobně bychom mohli uvažovat o úlohách s různorodou jinou tematikou. Velké možnosti nám nabízí např. teorie pravděpodobnosti (viz např. úloha v [4], str. 282, jejíž různá zobecnění jsme formulovali např. v článcích [8] a [9]), problémy přírodovědného charakteru, ale i tematika splácení půjček, viz [5]. Mezi úlohy, které však lze podle mého názoru považovat za „nejkouzelnější“ a tedy je nemohu nezmínit, patří dvě následující.

*) Opět se nám zde objevuje divergentní aritmetická řada.

Příklad 8

Hajný se vrací z hospody domů rychlostí 2 km/h a jeho pes, který neustále běhá mezi ním a hájovnou, rychlostí 4 km/h. Jakou vzdálenost pes naběhá, než hajný dorazí domů?

Řešení:

Označme počáteční vzdálenost hajného od hájovny s . Pes běží dvakrát rychleji než hajný, proto se ke svému pánovi prvně vrátí po uběhnutí vzdálenosti $\frac{4}{3}s$ (hajný urazil $\frac{2}{3}s$), podruhé po uběhnutí $\frac{4}{3}s + \frac{4}{3}s \cdot \frac{1}{3}$ atd. Pes celkově uběhne vzdálenost

$$\frac{4}{3}s + \frac{4}{3}s \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3}s \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots = \frac{4}{3}s \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2s.$$

Řešení však lze získat i naprosto elementárně. Pes běží dvakrát rychleji než hajný, tedy musí urazit dvakrát delší vzdálenost než hajný a tedy $2s$.

Příklad 9

Kérékjártó*) jako dítě rád jedl čokoládu, srv. [11], a kupoval si ji u jedné firmy, která do každého balíčku čokolády přidávala takový kupón, že při donesení jejich deseti kusů se získal zdarma jeden balíček této čokolády. Jakou část čokolády tak při zakoupení jednoho balíčku čokolády Kérékjártó vlastně získal?

Řešení:

Zakoupením jednoho balíčku čokolády tedy získáváme díky přiloženému kupónu i jednu desetinu dalšího balíčku čokolády, v něm přiložený kupón však dává další setinu balíčku čokolády atd. Při zakoupení jednoho balíčku čokolády se prakticky získává toto množství čokolády:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Bylo však možno úlohu řešit i bez užití nekonečné řady takto. Při zakoupení devíti balíčků získáváme i devět kupónů. Přidáme-li k nim kupón z desáté čokolády, pak je tato tímto zaplacená. Za cenu devíti balíčků tak získáváme deset tabulek čokolády (a žádný kupón nezbyl), neboli při koupi jednoho balíčku čokolády se získává $\frac{10}{9}$ tabulky čokolády.

*) Jde o historiku o matematikovi *Belovi von Kérékjártó* (1898 – 1946).

Literatura

- [1] *Egsgard, J. C.*: An interesting introduction to sequences and series, *Mathematics Teacher* 81 (no. 2) (1988), s. 108 – 111.
- [2] *Choppin, J. M.*: Spiral through Recursion *Mathematics Teacher* 87 (no. 7) (1994), s. 504 – 508.
- [3] *Love, W. P.*: Supersolids: solids having finite volume and infinite surfaces *Mathematics Teacher* 82 (no. 1) (1989), s. 60 – 65.
- [4] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky SPN Praha, 1972.
- [5] *Pražák, P.*: Splácení půjčky *Rozhl. matematicko-fyzikální* 77 (2000), s. 212 – 216.
- [6] *Reuleaux, F.*: The Kinematics of Machinery: Outlines of a Theory of Machines, Macmillan Co., London, 1876.
- [7] *Smart, J. R.*: Problem Solving in Geometry—a Sequence of Reuleaux Triangles *Mathematics Teacher* 79 (no. 1) (1986), s. 11 – 14.
- [8] *Trojovský, P.*: Patří aritmeticko-geometrická řada na SŠ? *Matematika – Fyzika – Informatika* 8 (1999), JČMF, s. 582 – 588.
- [9] *Trojovský, P.*: Pravděpodobnost a řady obsahující Fibonacciova čísla (1999), GAUDEAMUS Hradec Králové, s. 59 – 76.
- [10] *Trojovský, P.*: Učivo o číselných řadách v českých středoškolských učebnic od roku 1862 až do současnosti *Účitel matematiky* (v recenzním řízení).
- [11] *Veselý, J.*: O některých důležitých řadách (1996), Prometheus, Praha, s. 137 – 154.

Písemkové příklady na SŠ 27

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pokračujeme dalšími příklady, které jsou inspirací i praktickou pomůckou pro učitele matematiky. Úvodní komentář nalezne čtenář v [1], poslední pokračování v [2]. Příklady z jednotlivých tématických celků (TC) jsou vybírány nahodile co do zaměření i co do obtížnosti. U každého příkladu jsou uvedeny dvě rovnocenné verze A, B a dále ještě verze C, D na další použití (náhradní písemka, písemka v paralelce, předchozí procvičení či domácí úloha). Je volen stručný text vhodný i k zápisu na tabuli, využívající si ovšem může text upravit a přizpůsobit podle podmínek ve třídě a v souladu s používanou terminologií a symbolikou.

Chce-li se i některý čtenář podělit o své zkušenosti se svými kolegy a nabídnout jim zadání některých svých osvědčených příkladů pro písemné zkoušení, necht' se s touto nabídkou obrátí na náš časopis.

TC: Základní poznatky z matematiky

1. A [B] Reklamní štítky mají tvar rovnoramenného trojúhelníku o výšce 9,0 cm [5,0 cm], úhel proti základně je 30 [120]. Vypočtete, kolik m² papíru se spotřebuje na výrobu 25 000 těchto štítků, počítá-li se s 8 % [3 %] odpadu.

Obsah: Řešení pravoúhlého trojúhelníku (výpočet protilehlé odvěsny, je-li dán úhel a přilehlá odvěsna), obsah trojúhelníku, výpočet části celku, je-li dán počet procent, práce na kalkulačce s funkcí tangens (u C, D s funkcemi sinus a kosinus) a základními početními operacemi.

Výsledky:

A: Základna trojúhelníku je $2 \cdot 9 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$, spotřebuje se asi 58,6 m² papíru.

B: Základna trojúhelníku je $2 \cdot 5 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$, spotřebuje se asi 111,5 m² papíru.

Verze C [D]: Reklamní štítky mají tvar kosočtverce o straně 5,0 cm [4,0 cm], jeden vnitřní úhel je 45 [75]. Vypočtete, kolik m² papíru se spotřebuje na výrobu 15 000 těchto štítků, počítá-li se s 6 % [7 %] odpadu.

Výsledky:

C: Úhlopříčky kosočtverce jsou $u_1 = 2 \cdot 5 \cdot \sin 22,5^\circ$, $u_2 = 2 \cdot 5 \cdot \cos 22,5^\circ$, výška $v = 5 \cdot \sin 45^\circ$; spotřebuje se asi 28,1 m² papíru.

D: Úhlopříčky kosočtverce jsou $u_1 = 2 \cdot 4 \cdot \sin 37,5^\circ$, $u_2 = 2 \cdot 4 \cdot \cos 37,5^\circ$, výška $v = 4 \cdot \sin 75^\circ$; spotřebuje se asi 24,8 m² papíru.

TC: Funkce

2. A|B Zjednodušte výraz

$$V = \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha \sin \beta} \quad \Bigg| \quad V = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta (\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha)}$$

a uveďte, pro které hodnoty úhlů α , β je výraz definován.

Obsah: Užití součtových vzorců a vzorců pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu, nulové body sinu a kosinu, resp. tangens (v C a D).

Výsledky:

$$\text{A: } V = \frac{-2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta} = -\frac{1}{\cos \alpha}; \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{R};$$

$$\text{B: } V = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}; \alpha \neq (2k+1), \beta \neq k\pi, k \in \mathbb{R}.$$

*Verze C[**D**]:* Pro která α $[\beta]$ je definován výraz

$$V = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \Bigg| \quad V = \frac{\sin^3 \beta + \cos^2 \beta}{\cos \beta + \sin \beta} + \frac{1}{2} \sin 2\beta;$$

zjednodušte jej.

Výsledky:

$$\text{C: } V = -1, \alpha \neq (4k+1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{R};$$

$$\text{D: } V = 1, \beta \neq (4k+3)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{R}.$$

TC: Analytická geometrie

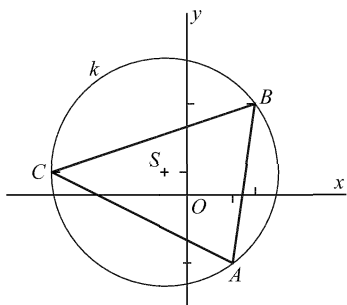
3. A{B} Jsou dány body $A[1; -1, 5]$, $B[1, 5; 2]$, $C[-3; 0, 5]$ $\{A[-1, 5; -2]$, $B[2; -2, 5]$, $C[0, 5; 2]\}$. Napište rovnici kružnice opsané tomuto trojúhelníku a trojúhelník i kružnici graficky znázorněte (jednotkou je 1 cm).

Obsah: Úlohu lze řešit více způsoby, zejména: Najít středy a osy dvou stran (např. užitím vektorů), průsečík os je hledaný střed S kružnice, vzdálenost S od kteréhokoli z bodů A , B , C je poloměr. Jiný postup: Napišeme rovnici kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, dosadíme do ní souřadnice vrcholů trojúhelníku a dostaneme soustavu tří algebraických rovnic o třech neznámých m , n , r .

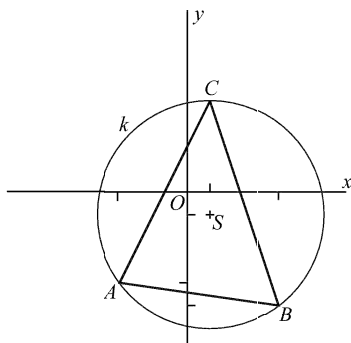
Výsledky:

A: Směrový vektor strany AB je $(1, 7)$, normálový vektor $(7, -1)$, střed strany $[1,25; 0,25]$, směrový vektor strany BC je $(3, 1)$, normálový vektor $(1, -3)$, střed strany $[-0,75; 1,25]$, směrový vektor strany CA je $(2, -1)$, normálový vektor $(1, 2)$, střed strany $[-1; -0,5]$, $S[-0,5; 0,5]$, $r = 2,5$, rovnice $(x+0,5)^2 + (y-0,5)^2 = 2,52$, viz obr. 1a.

B: Směrový vektor strany AB je $(7, -1)$, normálový vektor $(1, 7)$, střed strany $[0,25; -2,25]$, směrový vektor strany BC je $(-1, 3)$, normálový vektor $(3, 1)$, střed strany, $[1,25; -0,25]$, směrový vektor strany CA je $(1, 2)$, normálový vektor $(2, -1)$, střed strany $[-0,5; 0]$, $S[0,5; -0,5]$, $r = 2,5$, rovnice kružnice opsané je $(x-0,5)^2 + (y+0,5)^2 = 2,52$, viz obr. 1b.



Obr. 1a



Obr. 1b

Verze C [D]: Strany trojúhelníku leží na přímkách $p: x + 2 = 0$, $q: x + 5y + 7 = 0$, $r: x + y - 1 = 0$ $\{p: x + 2 = 0, q: x - 3y + 11 = 0, r: x - y + 1 = 0\}$. Napište rovnici kružnice opsané tomuto trojúhelníku.

Výsledky:

C: $A \in p \cap q$, $A[-2; -1]$, $B \in q \cap r$, $B[3; -2]$, $C \in r \cap p$, $C[-2; 3]$, směrový vektor strany AB je $(5, -1)$, normálový vektor $(1, 5)$, střed strany $[0,5; -1,5]$,

směrový vektor strany BC je $(1, -1)$, normálový vektor $(1, 1)$, střed strany $[0,5; 0,5]$,

směrový vektor strany CA je $(0, 1)$, normálový vektor $(1, 0)$, střed strany $[-2; 1]$;

$S[1; 1]$, $r = \sqrt{13}$, rovnice kružnice opsané je $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$, viz obr. 1c.

D: $A \in p \cap q$, $A[-2; -1]$, $B \in q \cap r$, $B[4; 5]$, $C \in r \cap p$, $C[-2; 3]$,

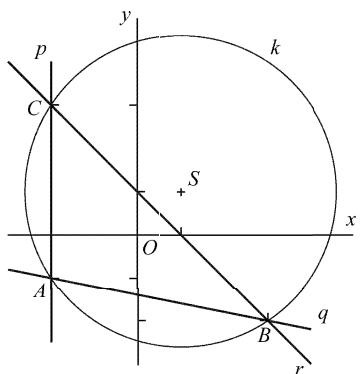
směrový vektor strany AB je $(1, 1)$, normálový vektor $(1, -1)$, střed strany $[1; 2]$,

směrový vektor strany BC je $(3, 1)$, normálový vektor $(1, -3)$, střed strany, $[1; 4]$,

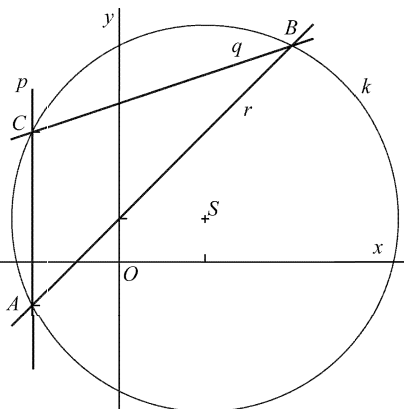
směrový vektor strany CA je $(0, 1)$, normálový vektor $(1, 0)$, střed strany $[-2; 1]$;

$S[2; 1]$, $r = 2\sqrt{5}$, rovnice kružnice opsané je $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$, viz obr. 1d.

Komentář: Jestliže ve verzích A, B vynecháme požadavek grafického znázornění a souřadnice všech bodů zdvojnásobíme, ubude počítání s desetinnými čísly; střed kružnice má pak dvojnásobné souřadnice a poloměr je dvojnásobný, tj. $r = 5$.



Obr. 1c



Obr. 1d

TC: Shrnutí a opakování učiva

4. A|B Řešte soustavu rovnic

$$\begin{cases} |x-1| + |y| = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| + |y+1| = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

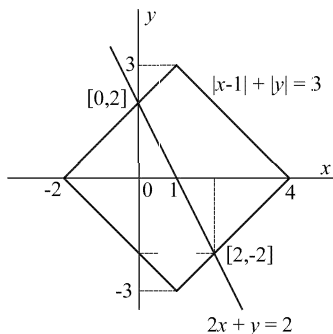
a obě relace graficky znázorněte.

Obsah: Relace s absolutní hodnotou, řešení soustav lineárních rovnic, grafické znázornění.

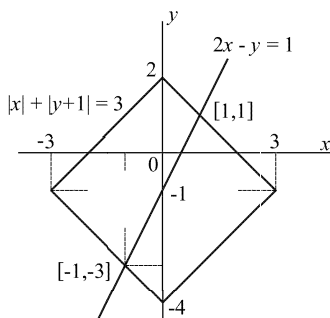
Výsledky:

A: Dvě řešení: $[0; 2]$, $[2; -2]$, viz obr. 2a;

B: Dvě řešení: $[-1; -3]$, $[1; 1]$, viz obr. 2b.



Obr. 2a



Obr. 2b

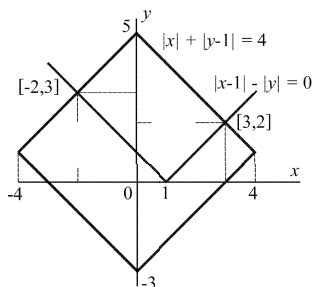
Verze **C**[[**D**]: Týž text, soustavy:

$$\begin{array}{l|l} |x| + |y - 1| = 4 & |x + 1| + |y| = 4 \\ |x - 1| - |y| = 0 & |x| + |y| = 1 \end{array}$$

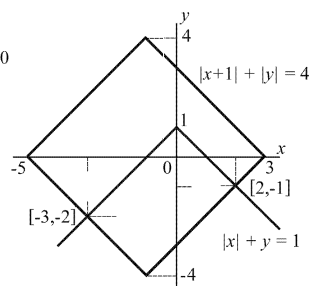
Výsledky:

C: Dvě řešení: $[3; 2]$, $[-2; 3]$, viz obr. 2c;

D: Dvě řešení: $[2; -1]$, $[-3; -2]$, viz obr. 2d.



Obr. 2c



Obr. 2d

Literatura

- [1] Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 1. MFI, roč. 3 (1993 – 94), č. 2.
- [2] Trávníček, S.: Písemkové příklady na SŠ 26. MFI, roč. 14 (2004 – 05), č. 6.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 3. 2006 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc.

Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ových verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 125

Najděte všechny čtveřice navzájem různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze čtyř sčítaných čísel, přičemž příslušné podíly tvoří stejnou čtveřici jako původní čísla.

Jaromír Šimša

Úloha 126

Nechť AA_1 , BB_1 a CC_1 jsou osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . Velikosti jeho vnitřních úhlů po řadě při vrcholech A , B , C jsou v poměru $4 : 2 : 1$. Dokažte, že platí $|A_1B_1| = |A_1C_1|$.

27. turnaj měst, říjen 2005

Dále uvádíme bilanci za uplynulý (12.) ročník této rubriky, který je zároveň druhým ročníkem dalšího cyklu dlouhodobé soutěže. Redakce obdržela celkem 117 úplných nebo částečných řešení od 41 jednotlivců. Za každou úplně vyřešenou úlohu řešitel obdržel 6 bodů, za částečně vyřešenou 3 body; k -násobným laureátem této rubriky se stane řešitel, který získá od 11. ročníku alespoň k -násobek čísla 93 (rubrika byla založena v roce 1993).

Pořadí nejlepších řešitelů po druhém ročníku druhého cyklu dlouhodobé soutěže:

1. *Anton Hnáth* z Moravan (84 b.), 2. *Jaroslav Hančl* z GMK Bílovec (69 b.), 3. *Jozef Mészáros* z Jelky (57 b.), 4.–6. *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť a *Jan Uhlík* z G Brno, Kpt. Jaroše (všichni 54 b.).

Pavel Calábek

(Dokončení ze s. 320)

Z celého díla je patrné zcela nové pojetí fyzika, znalého všech současných problémů moderní fyziky, což činí z knihy pozoruhodnou věc i pro učitele středních a vysokých škol, kteří mají co činit s fyzikou. V závěru celého díla bych pak doporučil připojit seznam literatury, případně i seznam několika „písmenkových“ korektur.

Závěr: škoda, že jsem neměl tuto knihu v době svých studií před půl stoletím a šťastni ti, kteří ji již dnes mají.

Učebnici lze koupit např. v Prodejné skript a učebnic VUP, Biskupské náměstí 1, 771 11 Olomouc,
e-mail: prodejna@vupnw.upol.cz,
fax: 585 631 786, tel.: 585 631 783. Cena je 348,50 Kč + 473 Kč.

Vladimír Malíšek