

# MATEMATIKA

## O existenci matematických objektů

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Když nastoupí studenti 1. ročníku ke studiu matematiky na vysoké škole, jsou překvapeni, jak často – na rozdíl od střední školy – se tu pojednává o problémech existence. Tak např. v matematické analýze se brzy setkávají s problémem *existence* suprema a infima číselných množin, dozvídají se o *existenci* limity rostoucí a shora omezené posloupnosti, seznamují se s větou o *existenci* největší a nejmenší hodnoty funkce spojitě na uzavřeném intervalu, s větou o *existenci* nulového bodu spojitě funkce, která v krajních bodech intervalu nabývá hodnot různých znamének, zjišťují, že ze spojitosti funkce neplyne *existence* její derivace, o *existenci* jde ve větě Rolleově, Lagrangeově, zkoumá se *existence* lokálních extrémů, atd. A to jsme vyjmenovali jen několik případů z 1. semestru. Všechny takové věty mají pro matematiku zcela stěžejní význam.

Ale vraťme se do školy, základní a střední. Zde se o existenci nějak moc explicitně nemluví, spíše se počítá a v řadě případů se jen mlčky předpokládá, že objekty, o kterých pojednáváme, existují (objekty rozumíme nejen geometrické útvary, ale i řešení zadané úlohy, číselné množiny ad.). Samotné slovo „existuje“ může hlavně na mladší žáky působit trochu tajemně (kde to existuje? jak to existuje?) až málo srozumitelně. Proto se ve škole zpravidla používají jiná vyjádření, trochu zastřená, ale žákům bližší – např. jestli něco *má* řešení (kolik řešení a za jakých podmínek), kdy problém *nemá* řešení. Řada žáků v tom však jasno nemá a v případech, kdy řešení neexistuje si představují nebo i říkají „nedovedeme řešit“ nebo i „nemusíme řešit“.

Vzhledem k zásadnímu významu otázek existence a neexistence pro matematiku považují za potřebné, aby se žáci s problémy existence a ne-

xistence tu a tam uvědoměle setkávali. (Přitom nejde jen o existenci řešení problémů, ale též o existenci objektů, které definujeme, a kdy je třeba ukázat, že definice je korektní a že tedy takto definovaný objekt existuje.) Příležitosti, které poskytuje učivo, lze vhodně doplnit i ve formě zajímavých problémů, jaké jsou často přístupné také pro mladší žáky. Jako inspiraci proberme nyní několik úloh na důkaz existence či neexistence matematických objektů (jde vesměs o příklady známé z literatury).

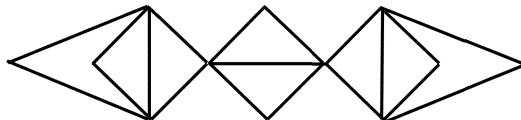
## Jak dokázat existenci matematického objektu?

V principu jsou tři možnosti: 1) objekt zkonstruovat, 2) dát korektní popis, jak lze objekt zkonstruovat, 3) opřít se o matematickou teorii – o platné matematické věty.

ad 1) Například se ptáme, zda existuje řešení nějakého zadaného hlavolamu. Jestliže řešení nalezneme, dokázali jsme tím existenci řešení.

### Příklad 1

Ptejme se, *zda existuje způsob*, jak graf na obr. 1 nakreslit jedním tahem (tj. zda existuje v tomto grafu cesta, která obsahuje všechny hrany grafu a každou z nich právě jednou). Zkuste si to.



Obr. 1

Existence řešení této úlohy se tu zjišťuje v principu stejně, jako když se ptáme např. na existenci řešení rovnice (tj. reálného čísla, které vyhovuje rovnici)  $1 + \sqrt{2 - x} = \sqrt{x + 3}$ , tj. prostě tuto rovnici řešíme a tím existenci zjistíme.

Do této zásuvky patří i situace, kdy definujeme např. rostoucí posloupnost, a ukážeme příklad rostoucí posloupnosti, třeba  $\{n\}$ ; tímto příkladem jsme dokázali, že rostoucí posloupnosti existují.

ad 2) Tento způsob se často používá v případě, že úloha není zadána zcela konkrétně. Ukažme si to na příkladě.

## Příklad 2

V kruhu  $K$  je  $10^6$  bodů jisté množiny  $M$ . Dokažte, že existuje *sečna*, která neprochází žádným z bodů množiny  $M$  a přitom v každé její poloovině je 500 000 bodů množiny  $M$ .

*Řešení:* Sestrojíme všechny přímky určené těmito  $10^6$  body (tj. na každé přímce leží alespoň dva body množiny  $M$ ). Na kružnici  $k$ , která je hranicí kruhu  $K$ , zvolíme takový bod  $T$ , který neleží na žádné ze sestrojených přímek. V bodě  $T$  sestrojíme tečnu  $p$ . Přímkou  $p$  nyní otáčíme a ta postupně prochází body množiny  $M$ , ale vždy jen po jednom, neboť tak byl bod  $T$  zvolen. Když přímka  $p$  projde přes 500 000 bodů a ještě než se na ni dostane bod 500 001., je v žádané poloze.

Sem patří např. popisy algoritmů řešení úloh, třeba popis konstrukce tečny v bodě kružnice. Z toho, že jednotlivé kroky konstrukce jsou realizovatelné, plyne existence tečny v bodě kružnice.

ad 3) Zde připomeňme např. větu o společných bodech dvou kružnic: Je-li středná dvou kružnic menší než součet jejich poloměrů a větší než absolutní hodnota jejich rozdílu, mají tyto kružnice dva společné body. Jestliže tedy máme rozhodnout o *existenci dvojice společných bodů kružnice*  $k_1(S_1; 7)$ ,  $k_2(S_2; 4)$ , kde  $|S_1S_2| = 9$ , nemusíme kružnice sestrojovat, ale zjistíme, že  $3 = |7 - 4| < 9 < 7 + 4 = 11$ , takže existují dva společné body. Podobně je to s existencí trojúhelníku, jehož strany by měly mít délku  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Trojúhelníková nerovnost je jedna ze základních vlastností trojúhelníků, tedy splňují-li zadané délky úseček trojúhelníkovou nerovnost, *existuje trojúhelník* o stranách  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (tj. zde „lze jej sestrojit“).

Dokazujeme-li existenci nějakého objektu, nemusíme tedy objekt konstruovat, dokonce ani nemusíme vědět, jak jej zkonstruovat. Tak v hořejším příkladě o grafu, chceme-li dokázat existenci řešení, nemusíme je hledat, pokud známe Eulerovu větu o grafech, z níž plyne existence řešení pro souvislé grafy se dvěma nebo žádným uzlem lichého stupně.

## Příklad 3

Dokažte, že na intervalu  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$  existuje řešení rovnice  $1 - x - \sin x = 0$ .

*Řešení:* Levá strana rovnice je elementární funkce, je tedy spojitá. Pro  $x = 0$  nabývá kladné hodnoty 1 a pro  $x = \frac{\pi}{2}$  záporné hodnoty  $-\frac{\pi}{2}$ , takže podle Bolzano – Cauchyovy věty existuje na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  nulový bod levé strany rovnice (levá strana prochází z kladných hodnot do záporných

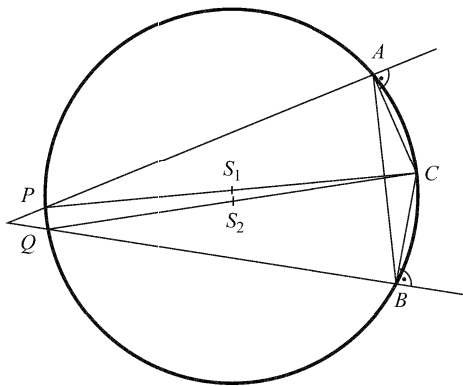
přes nulu), tedy v daném intervalu existuje řešení dané rovnice. Najít toto řešení – nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu – je už jiná úloha.

Je samozřejmé, že při důkazu existence nějakého matematického objektu musíme každý krok důkazu mít logicky i matematicky podložený. Jinak bychom mohli dojít i k nesprávným či absurdním výsledkům.

#### Příklad 4

Některá kružnice má dva středy.

*Důkaz* existence kružnice se dvěma středy provedeme tak, že takovou kružnici zkonstruujeme. Sestrojíme ostrý úhel, na jeho ramenech zvolíme dva body  $A, B$  a v nich kolmice k ramenům tak, aby se prořaly uvnitř úhlu (obr. 2). Průsečík označíme  $C$  a dostali jsme tak  $\triangle ABC$ , kterému opišeme kružnici. Její průsečíky s rameny úhlu označíme  $P, Q$ . Sestrojíme úsečku  $PC$ . Podle Thaletovy věty je to průměr kružnice (úhel  $PAC$  je pravý), takže jeho střed  $S_1$  je středem kružnice. Sestrojíme úsečku  $QC$ . Podle Thaletovy věty je to také průměr kružnice (úhel  $QBC$  je pravý), takže jeho střed  $S_2$  je také středem kružnice, přičemž  $S_1 \neq S_2$ .



Obr. 2

Existují i speciální metody důkazů existence. Jednou z nich, která je snadno přístupná i pro středoškoláky a jejíž použití se vyskytlo už i v MO, je *Dirichletův princip*.

Pojednáme o něm jen stručně. Jde o silný nástroj dokazování existence nějakých objektů, i když je překvapivě jednoduchý: *Je-li  $n + 1$  objektů rozděleno do  $n$  tříd, pak existuje třída, v níž jsou aspoň dva objekty.* Ukažme

si příklady s tematikou velmi rozdílnou, jejichž řešení však bude prostou aplikací Dirichletova principu.

### Příklad 5

Na záhonu  $2 \text{ m} \times 10 \text{ m}$  vyrostlo 21 stromků. Dokažte, že existuje kruh o poloměru 75 cm, v němž jsou aspoň dva stromky.

*Řešení:* Rozdělíme záhon na čtverce o straně 1 m (s úhlopříčkou 1,41 m). Podle Dirichletova principu existuje čtverec, v němž jsou aspoň dva stromky. Tento čtverec pokryjeme kruhem o průměru 1,50 m a v něm jsou tedy 2 stromky.

### Příklad 6

Jsou dána čísla  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{100}$ . Dokažte, že existuje dvojice těchto čísel taková, že jejich rozdíl je dělitelný číslem 99.

*Řešení:* Každé z těch 100 čísel patří do některé zbytkové třídy podle modulu 99, těchto tříd (tj. různých možných zbytků) je 99, takže podle Dirichletova principu alespoň dvě z těchto čísel patří do téže zbytkové třídy, tj. při dělení 99 dávají týž zbytek. Lze je vyjádřit:  $a = 99p_1 + q$ ,  $b = 99p_2 + q \Rightarrow a - b = 99(p_1 - p_2) \Rightarrow a - b$  je dělitelno 99.

Dirichletův princip lze vyslovit i takto: *Je-li  $kn + 1$  objektů rozděleno do  $n$  tříd, pak existuje třída, v níž je aspoň  $k + 1$  objektů.*

### Příklad 7

Deset spolužáků bylo při cvičení rozděleno do tří družstev. Příště byli opět nějak rozděleni do tří družstev. Dokažte, že někteří dva spolužáci byli v obou případech spolu ve stejném družstvu.

*Řešení:* První dělení: 10 spolužáků do 3 družstev  $\Rightarrow$  existuje družstvo, v němž byli spolu aspoň 4 spolužáci. Druhé dělení: Tito 4 spolužáci byli rozděleni (spolu s ostatními) do 3 družstev  $\Rightarrow$  existuje družstvo, kde spolu byli alespoň dva z těch čtyřech. Tito dva byli tedy v obou případech spolu ve stejném družstvu.

### Jak dokázat neexistenci objektu?

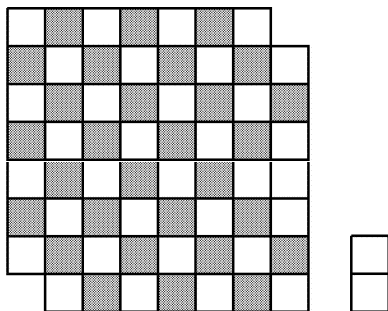
Důkaz neexistence bývá často obtížnější než důkaz existence. Existenční výrok o objektu dokážeme, když najdeme jeden příklad objektu vyhovujícího podmínkám. Negací existenčního výroku je obecný výrok, tedy cosi

musíme dokazovat pro každý objekt z nějaké množiny objektů. Tento způsob (zkoumat jeden prvek po druhém) je prakticky použitelný, jen když množina objektů není příliš rozsáhlá. Pro rozsáhlejší nebo dokonce nekonečné množiny by takový postup byl nevhodný nebo nemožný.

Neexistenci proto zpravidla vyvozujeme z vlastností objektů a za pomocí vhodných matematických vět, někdy máme k dispozici přímo kritéria existence a neexistence. Příkladem takového kritéria je věta o diskriminantu kvadratické rovnice, která říká, kdy existují 2 řešení, kdy jedno a kdy reálné řešení *neexistuje*. Podobně i výše zmíněná věta o společných bodech dvou kružnici má i svou větev, v níž se říká, kdy dvě kružnice nemají společný bod, tj. kdy společné body *neexistují* a rovněž trojúhelníková nerovnost (při konstrukci trojúhelníku ze tří stran) řeší i případ, kdy trojúhelník *neexistuje*. Ukažme si však ještě případ, kdy se neopíráme přímo o nějakou matematickou větu či formuli, ale jen o logickou úvahu.

### Příklad 8

Rozhodněte, zda šachovnici s dvěma vyříznutými rohovými poli lze pokrýt dominovými kostkami, viz obr. 4.



Obr. 3

*Řešení:* Mohli bychom to zkusit – ukázalo by se, že bezvýsledně – nebo přemýšlet. Vidíme, že jedna dominová kostka pokryje právě dvě pole šachovnice, tedy vždy jedno pole černé a jedno bílé. Nutnou podmínkou pokrytí tedy je požadavek, aby černých a bílých polí byl stejný počet. U celé šachovnice tomu tak je, ale zde chybí dvě černá pole, kterých je tedy jen 30 narozdíl od 32 polí bílých. Pokrytí tedy neexistuje.

Často se používá důkazu sporem: předpokládáme, že objekt vyhovující podmínkám existuje a řetězem implikací dojdeme k logickému sporu, z čehož plyne, že objekt neexistuje.

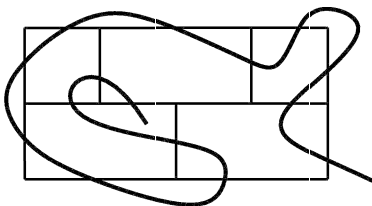
### Příklad 9

Neexistuje racionální číslo, jehož 2. mocnina by byla 2.

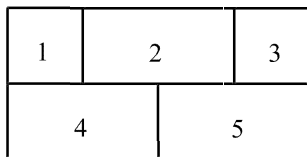
I když jde o známý příklad, postup důkazu si zopakujme. Předpokládáme, že takové racionální číslo  $r$  existuje, tj. že  $(r \in \mathbb{Q}) \wedge (r^2 = 2)$ . Každé racionální číslo, tedy i číslo  $r$ , lze vyjádřit jako zlomek  $\frac{p}{q}$  v základním tvaru, tedy  $(p, q \in \mathbb{N}) \wedge (p, q \text{ jsou čísla nesoudělná})$ . Platí  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$  je dělitelno dvěma  $\Rightarrow p$  je dělitelno dvěma, tj.  $p = 2m$ , kde  $m \in \mathbb{N} \Rightarrow (2m)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow 2m^2 = q^2 \Rightarrow q^2$  je dělitelno dvěma  $\Rightarrow q$  je dělitelno dvěma  $\Rightarrow$  spor; ježto zlomek je v základním tvaru, nemohou být  $p$  i  $q$  současně sudé.

### Příklad 10

Je dáno 16 úseček uspořádaných do obrazce na obr. 4a, 4b. Ptáme se, zda existuje spojitá čára, která protíná „vnitřek“ každé úsečky právě jednou. Když se o takovou čáru pokoušíme (obr. 4a), skončíme nezdarem. Má se tedy dokázat, že taková čára neexistuje.



Obr. 4a



Obr. 4b

Na obr. 4b vidíme, že máme 5 obrazců, přičemž obrazce č. 1 a 3 jsou ohraničeny čtyřmi úsečkami a obrazce 2, 4 a 5 pěti úsečkami. Předpokládejme, že čára vyhovující podmínkám úlohy existuje. Pak při každém průchodu této čáry přes nějaký obrazec se počet dosud neprořatých úseček na hranici obrazce zmenší o 2. Takže u obrazců s pěti úsečkami na hranici nemůžeme pomocí průchodů přes obrazec počet neprořatých úseček vynulovat. Znamená to, že v takovém obrazci buď musí naše čára začínat,

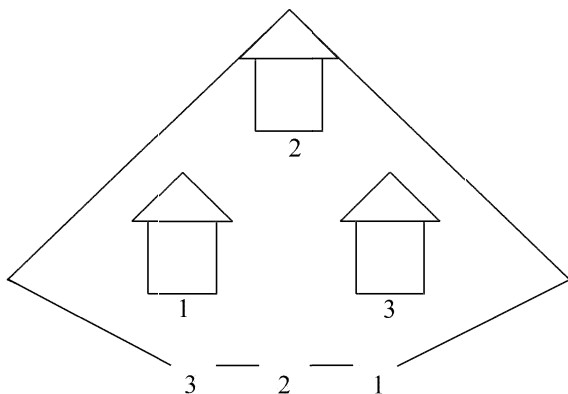
nebo v něm musí končit. Ale čára má jen jeden začátek a jeden konec, zatímco obrazce s pěti úsečkami na hranici jsou tři; tím dostáváme spor a taková čára tedy neexistuje.

To, že se úlohu na existenci nedaří vyřešit, ještě neznamená, že úloha nemá řešení (že hledaný objekt neexistuje). Třebas na to jen jdeme špatně, nebo je potřebné vyzkoušet příliš mnoho možností a ještě jsme se s tou správnou nesetkali (viz různé hlavolamy), nebo je úloha nad naše síly. Ale i v tom případě, že řešení neexistuje, se nám nemusí podařit důkaz neexistence řešení, neboť je např. založen na nějaké větě z vyšších pater matematiky. Snad nejznámější je tu problém trisekce úhlu, tj. rozdělení libovolného úhlu na 3 shodné části pomocí pravítka a kružítka. (Matematika zde dokázala, že pomocí pravítka a kružítka nelze roztřídit libovolný úhel, ale stále a stále se o to někteří lidé po celém světě pokoušejí.)

Pro ilustraci situace, kdy úlohu „se nedaří řešit“ uvedeme nyní dva příklady s podobnou fabulací, ale se zcela odlišným výsledkem.

### Příklad 11 (Rozvadění sousedů)

Na jednom dvoře stály 3 domky s čísly 1, 2 a 3 a ze dvora vedly 3 brány, také 1, 2 a 3. Každý ze sousedů používal výhradně tu bránu, která měla totéž číslo jako jejich domek. Pak se však obyvatelé domků navzájem rozvadili a hledali způsob, jak by jezdili ze dvorku (opět každý svou branou), aniž by se potkávali, tj. aniž by křížovali cestu jiných (obr. 5).

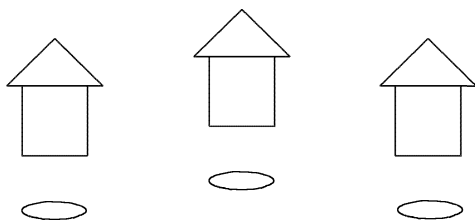


Obr. 5

Existenci tří cest, které se nikde nekříží, od domků k branám téhož čísla dokážeme, když tyto cesty do obrázku zakreslíme. Pokud se vám úloha nedaří řešit, znamená to, že jste ještě nevynaložili dostatek úsilí a vynalézavosti. A nyní další, zdánlivě podobný příklad.

## Příklad 12

Jde o známý problém tří domků a tří studánek. Máme 3 domky a 3 studánky, v každé z nich je jiná voda, a tak z každého domku chodí obyvatelé pro vodu do všech tří studánek. Pak se však sousedé nepohodli a rozhodli se, že z každého domku si udělají pěšinku ke každé studánce, ale tak, aby se žádné pěšiny nekřížily a sousedé se nemuseli po cestě potkávat (obr. 6).



Obr. 6

I tato úloha podporuje vynalézavost, ale i v „nejlepším řešení“ bude chybět cesta z jednoho domku k jedné studánce; řešení neexistuje. Důkaz neexistence úplného řešení však není elementární a plyne z teorie grafů, z jisté věty o planárních grafech.

V existenčních úlohách bývá také požadavek zjistit nejen, zda řešení existuje, ale kolik je řešení a za jakých podmínek existují. K tomu jsou velmi případné konstrukční úlohy, kde zjišťování podmínky řešitelnosti a počtu řešení je úkolem diskuse jako součásti řešení konstrukční úlohy. Vhodným tématem k podobné diskusi je také třeba řešení lineárních rovnic s parametrem. Nejprve je upravíme na tvar  $Ax = B$  a pak uvažujeme případy  $A \neq 0$  (existuje jediné řešení),  $(A = 0) \wedge (B = 0)$  – řešením je každé číslo,  $(A = 0) \wedge (B \neq 0)$  – řešení neexistuje. Ještě připomeňme diskriminant kvadratické rovnice, jehož hodnota je kritériem existence dvou nebo jednoho řešení a neexistence reálného řešení. Z tohoto pohledu je správný takový postup při řešení kvadratických rovnic v reálném oboru, že nejprve vypočteme diskriminant, rozhodneme o existenci či neexistenci

řešení a pak zapíšeme

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

(příčemž je někdy vhodné předem si vypočítat  $\sqrt{D}$ ), nebo

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a},$$

nebo zapíšeme, že řešení neexistuje (množina všech řešení je prázdná).

Ale i u jiných typů rovnic se v učivu o jejich řešení nevyhýbejme případům, kdy řešení neexistuje, např. zadávejme i takové rovnice, jako jsou

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad 2^{x^2} + 4^{2x} = 0, \quad |x-1| + |x+1| - 1 = 0.$$

Na závěr našeho malého výletu do existencí a neexistencí ještě jeden příklad, který by nás měl nabádat k opatrnosti při geometrických výpočtech.

### Příklad 13 (Tajemný kvádr)

Vypočtěte objem a povrch kváдру o hranách délky  $a, b, c$ , platí-li  $ab = 1$ ,  $c = \sqrt{3}$ , tělesová úhlopříčka  $u = 2$ .

*Řešení:* Povrch  $S = 2ab + 2ac + 2bc = 2ab + 2c(a+b)$ ; zde  $ab$  a  $c$  známe, pomocí zadaných hodnot vyjádříme ještě  $a+b$ :

$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4$  a poněvadž  $c^2 = 3$ , je  $a^2 + b^2 = 1$ . K této rovnosti přičtíme rovnost  $2ab = 2$  a máme  $a^2 + 2ab + b^2 = 3$ ,  $(a+b)^2 = 3$ ,  $a+b = \sqrt{3}$ .

Platí tedy

$$S = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 8.$$

$$V = abc = ab \cdot c = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Výpočet je ukončen.

Najdeme nyní velikost hrany  $a$ . Protože  $ab = 1$ , je  $b = \frac{1}{a}$ ; výše jsme zjistili vztah  $a+b = \sqrt{3}$ , tedy  $a + \frac{1}{a} = \sqrt{3}$ , z toho  $a^2 + 1 = a\sqrt{3}$ , takže pro  $a$  máme kvadratickou rovnici  $a^2 - a\sqrt{3} + 1 = 0$ . Ovšem diskriminant  $D = 3 - 4 = -1 < 0$ , takže zadaný tajemný kvádr má povrch 8, objem  $\sqrt{3}$ , ale neexistuje.

# Odvaha i rozvaha pre dokazovanie v školskej matematike

DUŠAN JEDINÁK

Trnavská univerzita, Trnava, SLOVENSKO

## Úvod

Aj v školskej matematike je to už tak, zoznamujeme sa s nimi a vyžadujeme ich – dôkazy. Matematický jazyk má svoj systém, logickú štruktúru, v ktorej sa vychádza z prijatých definícií pojmov, uznaných axióm a odvodených tvrdení. Sústavou výrokov, výrokových foriem a logických operácií s nimi prijímame dohodnutý spôsob usudzovania a logického vyplývania, ktoré prerastú do uznávaných metód dôkazov.

Školská matematika je zmesou rôznych induktívnych alebo deduktívnych prístupov, často bez zrejmej štruktúry, zdôvodnenej formy a dobre zadefinovaného myšlienkového základu. Práca s dôkazmi na tejto úrovni vyžaduje dlhodobý a cielený premyslený postup v rovine psychickej i logickej, pripravujúci na príkladoch to, čo robí matematické teórie použiteľné nielen v prírodovedných a technických, ale aj spoločenskovedných disciplín a kultúrno-právneho životného prostredia.

Ponúkam ukážky siedmich úloh aj s ich riešeniami ako príklad postupu pre budúcich učiteľov matematiky v základných i stredných školách s pripomienkou od starovekého filozofa *Parmenida z Eley* (asi 540 – 470 pred n. l.): *Nekráľ bez cieľa očami, nepočúvaj ušami, v ktorých sa rozlieha iba hluk a nemel naprázdno ústami, ale rozumom skúmaj dôkaz, ktorý som vyslovil.*

## Nemôže byť?

### Úloha 1

Dokážte, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

*Riešenie:* Nemôže byť? To je otázka! Súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel môžeme napísať ako:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = 4(n^2 + 3n + 3) + 2,$$

kde  $n \in \mathbb{N}$ .

Pozrime sa „čo robia“ druhé mocniny prirodzených čísiel:

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad 5^2 = 25, \quad 6^2 = 36, \dots$$

Ak je  $n$  párne, tj. existuje  $k \in \mathbb{N}$  tak, že  $n = 2k$ , potom  $n^2 = 4k^2$ , teda každá druhá mocnina párneho čísla je deliteľná štyrmi.

Druhé mocniny nepárnych čísiel sú vždy nepárne, pretože

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

Spomínaný súčet druhých mocnín štyroch za sebou idúcich prirodzených čísiel

$$4(n^2 + 3n + 3) + 2$$

je párny, teda ak by existovalo niektoré prirodzené príslušné  $p \in \mathbb{N}$  tak, aby

$$4(n^2 + 3n + 3) + 2 = p^2$$

muselo by  $p$  tiež byť párne, ale to znamená, že  $p^2$  musí byť deliteľné aj štyrmi. Ale náš súčet  $4(n^2 + 3n + 3) + 2$  nie je deliteľný štyrmi. Číže také  $p \in \mathbb{N}$  neexistuje, aby pre  $n \in \mathbb{N}$  platilo

$$4(n^2 + 3n + 3) + 2 = p^2$$

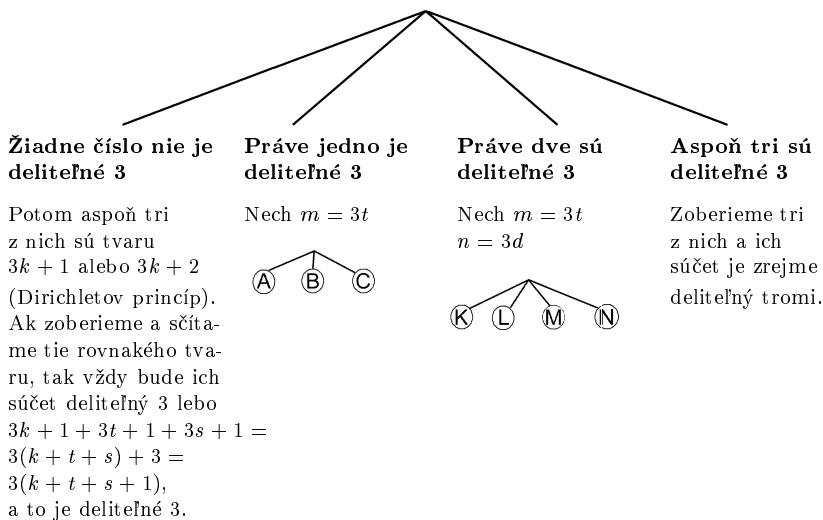
Dokázali sme, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

## Využijeme vhodné úplné roztriedenie

### Úloha 2

Dokážte, že medzi piatimi ľubovoľne vybranými prirodzenými číslami (označme si ich  $m, n, p, q, r$ ) sa vždy nájdu tri čísla, ktorých súčet je deliteľný číslom tri.

*Riešenie:* Využijeme úplne roztriedenie všetkých možností podľa počtu čísel deliteľných tromi



- A) Nech ostatné všetky štyri sú tvaru  $3k + 1$ , tak zoberieme tri z nich a ich súčet je zrejme deliteľný tromi.
- B) Nech ostatné všetky štyri sú tvaru  $3k + 2$ , tak zoberieme tri z nich a ich súčet je zrejme deliteľný tromi.
- C) Nech aspoň jedno z čísel je tvaru  $3s + 1$  a aspoň jedno je tvaru  $3z + 2$ . Zoberieme  $(3t) + (3s + 1) + (3z + 2) = 3(t + s + z + 1)$  a to je deliteľné tromi.
- K) Nech všetky ostatné majú pri delení tromi zvyšok 1, napr.  $p = 3k + 1$ ,  $q = 3s + 1$ ,  $r = 3z + 1$ . Potom ich stačí zobrať a sčítať a je zrejme, že ich súčet je deliteľný tromi.
- L) Nech  $p = 3k + 2$ ,  $q = 3s + 2$ ,  $r = 3z + 2$ . Ich sčítanie spĺňa požiadavku deliteľnosti tromi.
- M) Nech  $p = 3k + 1$ ,  $q = 3s + 2$ ,  $r = 3z + 2$  Zoberieme a sčítame napr.  $m = 3t$ ,  $p = 3k + 1$ , a  $q = 3s + 2$ . Teda  $3t + 3k + 1 + 3s + 2 = 3(t + k + s + 1)$  a to je deliteľné tromi.
- N) Nech  $p = 3k + 2$ ,  $q = 3s + 1$ ,  $r = 3z + 1$  Zoberieme napr.  $n = 3d$ ,  $p = 3k + 2$ ,  $q = 3s + 1$  a ich súčet  $3d + 3k + 2 + 3s + 1 = 3(d + k + s + 1)$ , čo znamená deliteľnosť tromi podľa požiadavky úlohy.

Je vidieť, že sme všetky možnosti pre ľubovoľnú voľbu piatich prirodzených čísel roztriedili do deviatich disjunktných tried podľa počtu čísel

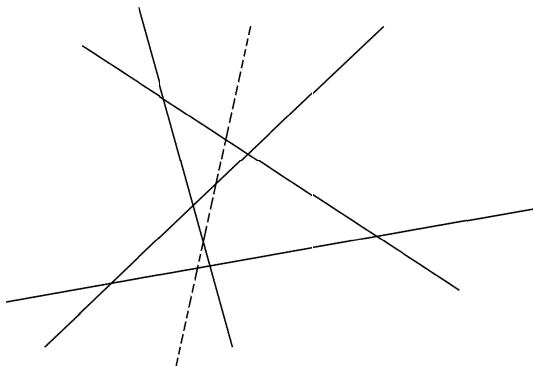
deliteľných tromi a vzhľadom k možným zvyškom pri deliteľnosti tromi. V každej triede sme ukázali platnosť požadovaného tvrdenia.

## Deduktívnym postupom

### Úloha 3

Na koľko oblastí rozdelí celú rovinu  $n$  navzájom rôznobežných priamok, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom.

*Riešenie:* Uvažujme pomerne všeobecne: Nech  $n - 1$  priamok (sú označené plnou čiarou) rozdelí celú rovinu na  $P_{n-1}$  oblastí (na obr. je  $n - 1 = 4$ , teda  $n = 5$ , piata priamka je vyznačená čiarkovaním;  $P_{n-1} = 11$ ).



Potom  $n$ -tá priamka bude preŕať tými pôvodnými priamkami v  $n - 1$  rôznych bodoch, teda rozdelená na  $n$  častí a každá táto časť prispeje k rozdeleniu „zasiahnutých“ oblastí na dve nové oblasti, takže počet oblastí vzrastie o  $n$ .

Teda platí:  $P_n = P_{n-1} + n$ , teda aj

$$P_1 = 2 = 1 + 1$$

$$P_2 = P_1 + 2$$

$$P_3 = P_2 + 3$$

$$\vdots$$

$$P_{n-1} = P_{n-2} + (n - 1)$$

$$P_n = P_{n-1} + n$$

Ak to sčítame a zjednodušíme, dostaneme

$$P_n = 1 + \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}_{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

Za daných podmienok  $n$  priamok rozdelí rovinu na  $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$  oblastí.

**Dokážeme, že sa nedá ...**

#### Úloha 4

Dokážte, že číslo  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sa nedá napísať ako súčet niekoľkých za sebou idúcich prirodzených čísiel.

*Riešenie:* Predpokladajme, že sa to dá napísať ako súčet niekoľko za sebou idúcich prirodzených čísiel a ukážeme, že potom vznikne spor (súčasná platnosť výroku i jeho negácie).

$$\text{Nech teda } 2^n = \underbrace{x + (x+1) + \dots + (x+k-1)}_{k \text{ za sebou idúcich prirodzených čísiel } (k > 1)}$$

Tam vieme sčítať členy aritmetickej postupnosti. Platí

$$2^n = (x + x + k - 1) \frac{k}{2}.$$

Na ľavej strane tejto rovnice je vždy súčin samých dvojek.

Posúďme aj pravú stranu.

Ak  $k = 2p$  (tj.  $k$  je párne číslo), tak pravá strana je  $\underbrace{(2x + 2p - 1)p}_{\text{nepárne číslo}}$

Ale ľavá strana je súčin samých párnych dvojek a na pravej strane je aj nepárny činiteľ. To sa nemôže nikdy rovnať.

Podobne, ak  $k = 2p + 1$  (tj.  $k$  je nepárne číslo), tak pravá strana má tvar

$$(2x + 2p) \cdot \frac{2p + 1}{2} = (x + p) \underbrace{(2p + 1)}_{\text{nepárne číslo}}$$

Ale to by znamenalo, že súčin párnych dvojok sa rovná súčinu, v ktorom je nepárny činiteľ. To je spor.

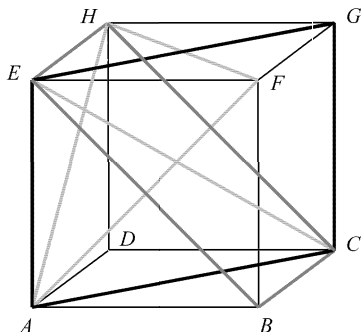
Pozoruhodnou úvahou sme sa presvedčili, že číslo  $2^n$  sa pre žiadne prirodzené  $n$  nedá napísať ako súčet niekoľkých za sebou idúcich prirodzených čísiel.

## Použitie kritéria $p \perp q$

### Úloha 5

Dokážte, že v kocke  $ABCDEFGH$  platí: priamka  $EC$  je kolmá na rovinu  $AFH$   $\{p = EC \perp AFH(q)\}$ .

*Riešenie:* Využijeme kritérium kolmosti  $p$  na  $q$  (priamka je kolmá na rovinu, ak je kolmá na dve rôznobežky tejto roviny). Ukážeme, že  $EC$  je kolmá na dve rôznobežky z roviny  $AFH$ .



- I.  $HF \perp EG$  (uhlopriečky štvorca),  
 $HF \perp EA$  ( $EA \perp EFGH$ , kocka),  
 teda  $HF \perp EACG$  (splnené kritérium  $p \perp q$ ).
- II.  $AF \perp EB$  (uhlopriečky štvorca),  
 $AF \perp BC$  ( $BC \perp ABFE$ , kocka),  
 teda  $AF \perp BCHE$  (splnené kritérium  $p \perp q$ ).

Z I. vyplýva, že  $EC \perp HF$ ,

Z II. vyplýva, že  $EC \perp AF$

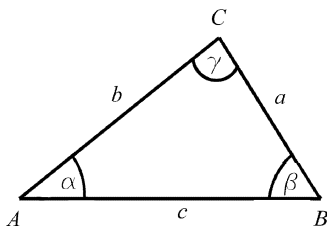
(splnené kritérium  $p \perp q$ )  $\Rightarrow EC \perp AFH$ .

## Úspech zaručený dôsledným komplexným postupom

### Úloha 6 (10. MO, 1968)

Dokážte, že existuje práve jeden trojuholník, ktorého dĺžky strán sú tri po sebe idúce prirodzené čísla a jeho jeden vnútorný uhol je dvojnásobkom druhého.

*Riešenie:* Označme dĺžky strán trojuholníka  $ABC$   $a = n$ ,  $b = n + 1$ ,  $c = n + 2$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .



Potom pre veľkosti vnútorných uhlov platí  $\alpha < \beta < \gamma$ . Rozlíšime tri prípady: buď  $\alpha = 2\beta$ , alebo  $\gamma = 2\alpha$ , alebo  $\gamma = 2\beta$ .

1) Nech  $\beta = 2\alpha$ . Zo sínusovej vety vyplýva, že platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b}{a} = \frac{n+1}{n},$$

ale tiež platí

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$$

z kosínusovej vety vyplýva

$$\cos \alpha = \frac{n+5}{2(n+2)}, \quad \cos \beta = \frac{n^2 + 2n + 3}{2n(n+2)}, \quad \cos \gamma = \frac{n-3}{2n},$$

potom

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n+5}{n+2} \Rightarrow n = 1$$

a teda  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ , ale taký trojuholník neexistuje.

2) Nech  $\gamma = 2\alpha$ . Zo sínusovej a kosínusovej vety vyplýva

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$$

po dosadení:

$$\frac{n+2}{n} = \frac{n+5}{n+2} \Rightarrow n = 4$$

a potom  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ . Trojuholník s dĺžkami strán 4, 5, 6 pritom spĺňa podmienky úlohy.

3) Nech  $\gamma = 2\beta$ . Využitím sínusovej a kosínusovej vety dostaneme postupne

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = 2 \cos \beta,$$

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 3}{n(n+2)} \Rightarrow n^2 - n - 3 = 0,$$

ale korene tejto rovnice nie sú prirodzené čísla. Trojuholník s takýmito dĺžkami strán nevyhovuje zadaniu úlohy.

Dokázali sme, že z analyzovaných možností požadovanej úlohe vyhovuje práve jeden trojuholník – s dĺžkami strán 4, 5, 6.

## Viacerými spôsobmi

### Úloha 7

Dokážte tvrdenie: Pre každé  $n$  prirodzene platí  $8 \mid (3^{2n} - 1)$ .

*Riešenie:*

- A) Platí  $3^{2n} - 1 = (3^n)^2 - (1)^2 = (3^n - 1)(3^n + 1)$ . Pretože  $3^n$  je vždy nepárne číslo, tak  $3^n - 1$  aj  $3^n + 1$  sú čísla párne. Potom sú to dve za sebou idúce párne čísla, z ktorých určite jedno je deliteľné aj štyrmi. To znamená, že v súčine  $(3^n - 1)(3^n + 1)$  je číslo deliteľné dvomi a iné číslo deliteľné štyrmi, to znamená, že súčin je deliteľný ôsmimi.
- B) Skúmaný výraz môžeme upraviť:

$$\begin{aligned} 3^{2n} - 1 &= 9^n - 1 = (8 + 1)^n - 1 = \\ &= 8^n + \binom{n}{1} 8^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} 8 + 1 - 1 = \\ &= 8 \left( 8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} \right), \end{aligned}$$

to znamená že  $8 \mid (3^{2n} - 1)$ .

C) Dôkaz matematickou indukciou:

a) pre  $n = 1$   $8 \mid 8$  platí

b) nech pre  $n = k \geq 1$  platí  $8 \mid (3^{2k} - 1)$ ; ukážeme, že potom vzťah platí aj pre  $n = k + 1$ , t.j.  $8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$ .

Upravujeme:

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k+2} - 1 = 9 \cdot 3^{2k} - 1 = 9 \cdot 3^{2k} - 1 + 8 = \\ &= 9 \cdot 8 \cdot m + 8 = 8(9m + 1), \end{aligned}$$

to ale znamená, že číslo  $3^{2(k+1)} - 1$  je deliteľné ôsmimi. Platí druhý krok dôkazu matematickou indukciou.

Tým je dané tvrdenie dokázané.

Tvrdenie  $\forall n \in \mathbb{N}$  je  $8 \mid (3^{2n} - 1)$  sme teda dokázali viacerými postupmi.

## Záver

Aj keď vieme, že neexistuje žiadna ľahká a jediná metóda dokazovania v školskej matematike, musíme sa snažiť ukázať, že dôležité je hlbšie porozumenie primeraným lokálnym dôkazom, ktoré sú podporované aj pozorovaním nakreslených obrázkov, geometrickým znázorňovaním, modelovaním, robením analógií, experimentovaním i odhadovaním, vytváraním domnienok a ich preverovaním. Už od začiatku vyučovania matematiky je didakticky účinné ponúkať (aj keď vedecký neúplný) systém nadväzujúcich, logicky zdôvodnených, matematických axiém, definícií a viet, postavený na primeraných dôkazoch, ktoré vo svojej podstate študujúci plne chápu a vedia ich aj obhajovať. Rád rozširujem medzi dnešnými učiteľmi našich škôl odkaz známeho českého matematika *E. Čecha* (1893-1960): *Nemusíte dokazovať všetko, ale nesmiete nedokazovať nič. Nesmie sa stratiť fakt, že matematika je systém.*

## Literatúra

- [1] *Cirjak, M.*: Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh. Essox, Prešov 2000.
- [2] *Čech, V.*: Proč děláme důkazy v matematice. SPN, Praha 1971.
- [3] *Freudenthal, H.*: Mathematik als pädagogische Aufgabe 1, 2. Stuttgart: Klett Verlag 1977 (ruský preklad Moskva: Prosveščenie 1982, 1983).
- [4] *Kac, M. – Ulam, S.M.*: Matematika a logika. SNTL, Praha 1977.
- [5] *Jelínek, M.*: Logické prvky ve školské matematice. SPN, Praha 1981.
- [6] *Kopka, J.*: Hrozny problémů ve školské matematice. UJEP, Ústí nad Labem 1999.

- [7] *Kuřina, F.*: Umění vidět v matematice. SPN, Praha 1989.
- [8] *Mihalíková, B. a kol.*: Úlohy matematickej olympiády základnej školy. Iuventa, Bratislava 2003.
- [9] *Polya, G.*: Mathematical Discovery I., II. New York – London: J. Wiley & Sons, 1962, 1965 (ruský překlad Moskva: Nauka, 1976).
- [10] *Stoljar, A. A.*: Začem i kak my dokazyvajem v matematike. Narodnaja osveta, Minsk 1987.
- [11] *Thiele, R.*: Matematické důkazy. SNTL, Praha 1985.

# Násobení dvou čísel „pod sebou“ a „vedle sebe“

JOSEF PASTORČÁK

SPŠ stavební, Valašské Meziříčí

V současné době se na základní škole učí žáci násobit dvě čísla „pod sebou“. Tento způsob násobení se používá již delší dobu. Nebylo tomu tak ale vždy. Dříve se používalo také násobení „vedle sebe“. Tento způsob násobení jsem se učil také já v letech 1945–1949 na národní škole a používal jsem jej i na tehdejší tzv. střední škole (dnes 2.stupeň ZŠ) i v dalším studiu. Násobit „pod sebou“ jsem se naučil až jako pedagog gymnázia, ale sám jsem jej nikdy nepoužíval. Při pátrání v historii o způsobu násobení jsem využil fondu učebnic matematiky *Muzea Komenského* v Přerově. Ze studia učebnic vyplynulo, že až do roku 1950 se používal převážně způsob násobení „vedle sebe“, v malé míře i „pod sebou“ (viz [1] – [7]), zatímco po roce 1950 se používal výhradně způsob násobení „pod sebou“ (viz [8] – [11]). Autorovi příspěvku se však nepodařilo zjistit, jaký byl důvod změny. Možná v tom byla snaha násobit prvního činitele (násobence) za každou cenu nejprve jednotkami druhého činitele (násobitele). Možná to souviselo s tím, že po roce 1950 byl i didaktický systém více direktivní, zatímco do roku 1950 byl liberálnější a jednotliví učitelé obecných a národních škol používali metodu, která jim lépe vyhovovala.

Na následujících příkladech vidíme srovnání obou způsobů násobení:

|           |             |             |
|-----------|-------------|-------------|
| Pod sebou | 439         | 439         |
|           | <u>· 52</u> | <u>· 12</u> |
|           | 878         | 878         |
|           | <u>2195</u> | <u>439</u>  |
|           | 22828       | 5268        |

Vedle sebe

|                     |                 |            |
|---------------------|-----------------|------------|
| (sepisování vpravo) | <u>439 · 52</u> | 439 · 12   |
|                     | 2195            | <u>878</u> |
|                     | <u>878</u>      | 5268       |
|                     | 22828           |            |

Vedle sebe

|                    |                 |                                    |
|--------------------|-----------------|------------------------------------|
| (sepisování vlevo) | <u>439 · 52</u> | (při sepisování vlevo nelze využít |
|                    | 878             | výhody při násobení číslem         |
|                    | <u>2195</u>     | začínajícím číslicí 1)             |
|                    | 22828           |                                    |

Každý si jistě všimne dvou rozdílů: První rozdíl je viditelný, u násobení vedle sebe se ušetří jeden až dva řádky (když násobitel začíná číslicí 1). Druhý rozdíl je v tom, že násobení vedle sebe systémově odpovídá násobení i dělení čísel a algebraických výrazů (viz následující příklady). Operace násobení a dělení se začínají provádět vždy prvním číslem násobitele nebo dělitele zprava a sepisuje se zleva doprava, což odpovídá i směru psaní zleva doprava.

### Příklad 1

$$22828 : 52 = 439$$

$$202$$

$$468$$

$$0$$

### Příklad 2

$$\frac{(a + b + c) \cdot (a + b)}{a^2 + ab + ac} = a^2 + 2ab + ac + b^2 + bc$$

$$\frac{ab + b^2 + bc}{a^2 + 2ab + ac + b^2 + bc}$$

### Příklad 3

$$\begin{array}{r}
 (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a^2 - 2ab + b^2) = a - b \\
 \hline
 -a^3 + 2a^2b - ab^2 \\
 \quad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
 \quad \quad + a^2b - 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Domnívám se, a z uvedených příkladů vyplývá, že násobení „vedle sebe“ (sepisování vpravo) je systémově, didakticky i prakticky vhodnější než násobení pod sebou. Víím, že v době užití kalkulátorů a počítačů ve výuce má obecně tato otázka menší význam, i když na základní škole ještě značný význam má.

Cílem tohoto krátkého příspěvku bylo poskytnutí základní informace o možných způsobech násobení dvou čísel ve výuce matematiky.

## L i t e r a t u r a

- [1] *Schuster, A.*: Počty ve školách obecných, 1906.
- [2] *Bydžovský, B.*: Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, 1923.
- [3] *Matolín, A.*: Početnice pro 4. třídu obecných škol pětiletých až osmiletých, 1930.
- [4] *Horák – Libíček – Páchl*: S chutí do práce – Početnice pro 4. postupný ročník obecných škol, 1938.
- [5] *Kohlmann, Č.*: Numerické počítání, 1938.
- [6] Početní sdružení: Mladý počtář – Početnice pro 4. a 5. postupný ročník malotřídních škol obecných, 1946, 1948.
- [7] *Disman, M. – Pátek, F. – Trajer, J. – Tvrdek, V.*: Počtářské základy – 1. díl, Početní spoje a výkony, SPN, Praha 1948.
- [8] *Trajer, J. – Pátek, F. – Kníže, G. – Kurfürst, J. – Tvrdek, V. – Vlček, J. – Váňa, J.*: Početnice pro 4. postupný ročník národních škol, SPN, Praha 1949, 1950.
- [9] *Kurfürst, J.*: Početnice pro 4. postupný ročník, SPN, Praha 1957.
- [10] *Melichar, J. – Bělík, M. – Červinka, M. – Janků, M. – Kabele, J.*: Metodický text 4 pro učitele 4. ročníku ZŠ, 1979.
- [11] *Urbanová, J. – Blažke, R. – Kabele, J. – Janků, M. – Melichar, J. – Šmelhaus, J.*: Metodická příručka pro učitele k učebnicím matematiky pro 5. ročník ZŠ, 1980.

# Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 119 a 120, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (14.) ročníku našeho časopisu.

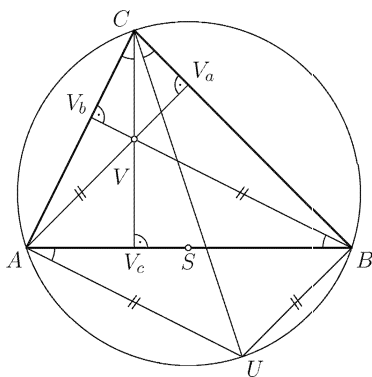
## Úloha 119

Nechť  $S$  je střed strany  $AB$  ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  a  $V$  průsečík jeho výšek. Označme  $U$  obraz bodu  $V$  ve středové souměrnosti se středem  $S$ . Dokažte, že úhly  $ACV$  a  $BCU$  jsou shodné.

*Erich Windischbacher (Graz)*

*Řešení:*

Označme  $V_a, V_b, V_c$  paty výšek po řadě z vrcholů  $A, B, C$ , viz obrázek. Bod  $B$  je obrazem bodu  $A$  ve středové souměrnosti se středem  $S$ , proto je úsečka  $BU$  obrazem úsečky  $AV$  v této souměrnosti a tyto úsečky jsou rovnoběžné. Tedy  $UB$  je kolmá k přímce  $CB$ . Analogicky ukážeme, že platí  $UA \parallel VB$  a  $UA \perp CA$ . Odtud plyne, že body  $A, U, B$  a  $C$  leží na Thaletově kružnici s průměrem  $CU$ . Protože trojúhelník  $ABC$  je ostroúhlý, leží body  $C$  a  $U$  v opačných polorovinách vytažených přímkou  $AB$ .



Trojúhelníky  $V_bVC$  a  $V_cVB$  jsou podobné, jelikož mají shodné vnitřní úhly při vrcholech  $V_b$  a  $V_c$ , resp. při vrcholu  $V$ , tedy i úhly  $ACV$  a  $VBV_c$  jsou shodné. Úhly  $VBV_c$  a  $BAU$  jsou střídavé, tudíž shodné. Z vlastností

obvodových úhlů plyne, že i úhly  $BAU$  a  $BCU$  jsou shodné. Proto jsou shodné i úhly  $ACV$  a  $BCU$ , což jsme chtěli ukázat.

Správné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Lukáš Bednařík* z SG v Olomouci, *Jaroslav Hančl*, *Tomáš Jeziorský*, *Miroslav Klimoš*, *Adam Kubetta*, *Michal Kučera* a *Josef Žabenský*, všichni z GMK v Bílovci, *Lucie Fabriková*, *Zbyněk Konečný* *Jakub Opršal* a *Jan Uhlík*, všichni z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť, *Marek Scholle* z G Pardubice, *Dašická* a *Pavel Šalom* z G Rožnov p. R.

### Úloha 120

Platí-li pro přirozená čísla  $a, b, c, d$  vztah  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ , pak nejvýše jedno z čísel  $a, b, c$  je liché. Tvrzení dokažte a najděte všechny takové trojice  $(a, b, c)$  přirozených čísel, kde  $d = 21$ .

*Stanislav Trávníček*

*Řešení:*

Každé sudé přirozené číslo  $n$  lze zapsat ve tvaru  $n = 2k$ , kde  $k$  je přirozené číslo, proto  $n^2 = 4k^2$  dává při dělení čtyřmi zbytek 0. Každé liché přirozené číslo  $n$  lze zapsat ve tvaru  $n = 2k + 1$ , kde  $k$  je celé nezáporné číslo, proto  $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$  dává při dělení čtyřmi zbytek 1.

Pokud  $d$  je číslo sudé, dává  $d^2$  při dělení čtyřmi zbytek 0, tedy  $a^2 + b^2 + c^2$  dává zbytek nula, proto musí být všechna čísla  $a, b, c$  sudá. Pokud je  $d$  číslo liché, dává součet  $a^2 + b^2 + c^2$  při dělení čtyřmi zbytek 1 a tedy právě jedno z čísel  $a, b, c$  musí být liché.

Nechť  $d = 21$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $c$  je liché číslo a  $a \leq b$  jsou sudá čísla. Potom  $a = 2k$ ,  $b = 2l$  a  $c = 2m + 1$ , kde  $k \leq l$  jsou přirozená čísla a  $m$  celé nezáporné číslo. Dosazením a úpravou daného vztahu dostaneme

$$k^2 + l^2 = (11 + m)(10 - m).$$

Odtud vidíme, že  $m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Pokud  $m = 9$ , potom  $k^2 + l^2 = 20$ . Protože číslo 20 je dělitelné čtyřmi, musí být podle výsledku uvedeného výše obě čísla  $k$  a  $l$  sudá. Jediná dvojice přirozených čísel, která vyhovuje danému vztahu je  $k = 2$ ,  $l = 4$ . Podobné úvahy provedeme pro zbývající hodnoty parametru  $c$  a výsledky zapíšeme do tabulky.

| $m$ | $k^2 + l^2$ | $k$ | $l$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|-----|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 9   | 20          | 2   | 4   | 4   | 8   | 19  |
| 8   | 38          | —   | —   |     |     |     |
| 7   | 54          | —   | —   |     |     |     |
| 6   | 68          | 2   | 8   | 4   | 16  | 13  |
| 5   | 80          | 4   | 8   | 8   | 16  | 11  |
| 4   | 90          | 3   | 9   | 6   | 18  | 9   |
| 3   | 98          | 7   | 7   | 14  | 14  | 7   |
| 2   | 104         | 2   | 10  | 4   | 20  | 5   |
| 1   | 108         | —   | —   |     |     |     |
| 0   | 110         | —   | —   |     |     |     |

Z tabulky vidíme, že pro  $d = 21$  má úloha právě šest řešení takových, že  $a \leq b$  jsou sudá čísla a  $c$  liché číslo. Libovolná permutace takového řešení je opět řešení, celkem má úloha 33 řešení.

Správné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Beáta Vavrinčíková* z Košic, *Lukáš Bednařík* z SG v Olomouci, *Eva Černohorská* z 1. českého G v Karlových Varech, *Lucie Fabriková* a *Jan Uhlík*, všichni z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Tomáš Jedlička* z G Třebíč, *Tomáš Jeziorský* a *Vít Orava* všichni z GMK v Bílovci, *Tereza Klimošová* z G Lanškroun, *Marek Scholle* z z G Pardubice, *Dašická* a *Radek Žlebčík* z G Praha 5, Zborovská.

Neúplné řešení zaslali: *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Jaroslav Hančl* z GMK v Bílovci, *Zbyněk Konečný* z G Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť.