

MATEMATIKA

Ptolemaiova věta

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Kolem roku 150 n. l. napsal alexandrijský učenec *Claudius Ptolemaios* svou *Velkou sbírku* známou pod názvem *Almagest*¹. Bylo to dokonalé dílo, které se stalo na plných 1400 let biblí astronomů. Spis o třinácti knihách shrnoval vše, co bylo astronomii potřebné, od nauky o stavbě pozorovacích přístrojů a všeho nutného matematického aparátu, především trigonometrických tabulek, až po katalog stálíc a dokonale propracovanou planetární soustavu (podrobněji např. [3]).

V tomto článku se seznámíme s postupy, jež Ptolemaiovi umožnily vypočítat zmíněné tabulky, a uvedeme několik dalších aplikací věty, která dnes nese jeho jméno²:

Věta 1 (Ptolemaiova)

V každém tětílovém čtyřúhelníku platí: Součet součinů délek jeho protilehlých stran je roven součinu délek jeho úhlopříček.

Při označení podle obr. 1 lze větu vyjádřit algebraickým vztahem

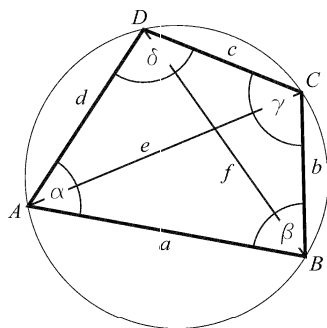
$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|, \quad (1)$$

nebo

$$ac + bd = ef. \quad (2)$$

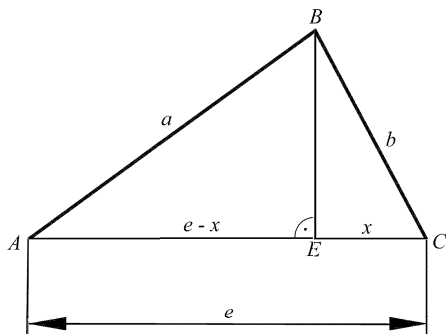
¹Název vznikl zkomolením arabského „*Al Magiste*“, což lze přeložit jako „*Největší*“.

²Podle některých pramenů byla věta 1 známa již dříve. *Almagest* je však nejstarším známým dílem, které ji i s důkazem obsahuje.



Obr. 1

Důkaz věty 1 uvedeme společně s tzv. *Artmanovou hypotézou* ([1], str. 155 – 158), podle níž byla Ptolemaiova věta objevena zobecněním úvah vedoucích k Pythagorově větě. Artmanovy domněnky nejsou možná příliš cenné z hlediska historie matematiky, umožňují však poznat souvislost Ptolemaiova důkazu se středoškolským postupem odvození Eukleidových vět a věty Pythagorovy.



Obr. 2

Při označení podle obr. 2 můžeme postup známý z učebnic schematicky zapsat takto:

$$\begin{aligned}\triangle BCE &\sim \triangle ACB \Rightarrow b : e = x : b \Rightarrow b^2 = xe, \\ \triangle ABE &\sim \triangle ACB \Rightarrow a : e = (e - x) : a \Rightarrow a^2 = (e - x)e,\end{aligned}$$

$$(a^2 = e^2 - ex) \wedge (b^2 = ex) \Rightarrow a^2 + b^2 = e^2.$$

Na obr. 2 trojúhelníky ABE a BCE pokrývají trojúhelník ABC . Ve snaze o lepší názornost můžeme situaci z obr. 2 přenést do pravoúhelníku na obr. 3 a zápis postupu pak ještě upravit:

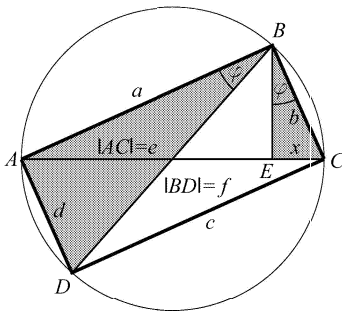
$$\triangle BCE \sim \triangle BDA \Rightarrow b : f = x : d \Rightarrow bd = xf, \quad (3)$$

$$\triangle ABE \sim \triangle DBC \Rightarrow a : f = (e - x) : c \Rightarrow ac = (e - x)f, \quad (4)$$

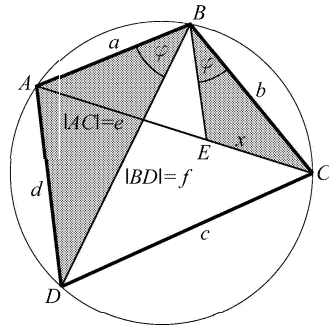
$$(ac = ef - xf) \wedge (bd = xf) \Rightarrow ac + bd = ef. \quad (5)$$

Protože pravoúhelník má shodné úhlopříčky i protilehlé strany (obr. 3), platí

$$(c = a) \wedge (d = b) \wedge (f = e) \wedge (a^2 + b^2 = e^2).$$



Obr. 3



Obr. 4

Uvažujme nyní libovolný tětíkový čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 4). Chceme-li provést analogické úvahy, je nutno zvolit bod E na úsečce AC tak, aby trojúhelníky BCE a BDA byly podobné. Z obrázku je patrné, že platí

$$|\angle BCE| = |\angle BCA| = |\angle BDA| \quad (\text{shodné obvodové úhly}).$$

Zvolíme tedy E tak, aby $|\angle CBE| = |\angle DBA|$. Pak budou podobné i trojúhelníky ABE a DBC , neboť

$$|\angle ABE| = |\angle ABC| - \varphi = |\angle DBC|$$

a zároveň

$$|\angle BAE| = |\angle BAC| = |\angle BDC|.$$

Nyní stačí znovu použít kroky (3) - (5) a důkaz vztahu (2) je proveden v podobě, jež odpovídá originálu z Ptolemaiova Almagestu.

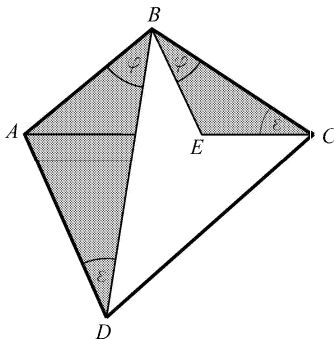
Ukážeme ještě, že předešlá věta platí také v opačném směru.

Věta 2 (obrácená Ptolemaiova věta)

Každému konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$, jehož délky stran a úhlopříček splňují vztah (1), lze opsat kružnici.

Důkaz. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$, v němž platí (1), zvolme bod E tak, aby $|\angle CBE| = |\angle DBA|$ a $|\angle BCE| = |\angle BDA|$ (obr. 5). Trojúhelníky BCE a BDA jsou podobné, a tak platí

$$|BE| : |EC| : |CB| = |BA| : |AD| : |DB|. \quad (6)$$



Obr. 5

Platí tedy i $|BE| : |BA| = |BC| : |BD|$, což spolu s rovností $|\angle ABE| = |\angle DBC|$ zdůvodňuje podobnost trojúhelníků ABE a DBC . Z ní pak plyne rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AE| \cdot |BD|$, kterou sečteme s důsledkem $|BC| \cdot |AD| = |EC| \cdot |BD|$ vztahu (6). Vzhledem k předpokladu (1) dále dostaneme

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = (|AE| + |EC|) \cdot |BD| = |AC| \cdot |BD|,$$

z čehož plyne, že E je vnitřním bodem úsečky AC . Polopřímka CE tedy prochází bodem A , úhly $\angle ACB$ a $\angle ADB$ jsou shodné a z vlastností obvodových úhlů konečně plyne, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový. Tím je důkaz proveden.

Věty 1 a 2 lze spojit ve větu jedinou:

Věta 3 (Ptolemaiovo kritérium tětiového čtyřúhelníku)

Konvexní čtyřúhelník je tětiový právě tehdy, když je součet součinů délek jeho protilehlých stran roven součinu délek jeho úhlopříček.

Ptolemaiovy tabulky, jejichž podrobnější analýza je snadno dosažitelná na Internetu ([5], *G. Elert: Ptolemy's Table of Chords* apod.), přiřazovaly délkám oblouků pevně dané kružnice délky tětív těchto oblouků. Abychom vyjádřili Ptolemaiovy myšlenky dnešními goniometrickými pojmy, uvažujme kružnici o průměru $2r = 1$. Pak je délka jejího libovolného oblouku XY jednoznačně určena velikostí φ kteréhokoliv z příslušných obvodových úhlů XVY a podle sinové věty je $|XY| = 2r \sin \varphi = \sin \varphi$. Ptolemaiovy trigonometrické tabulky jsou tedy ekvivalentní s tabulkami funkce sinus.

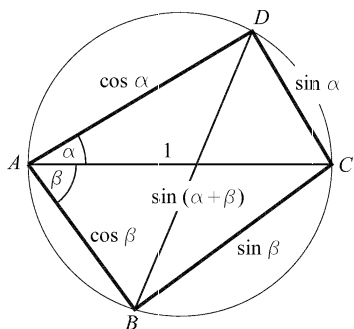
Základní hodnoty funkce $\sin \varphi$ pro $\varphi = 30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 60^\circ, \dots$ lze snadno a přesně vypočítat pomocí Pythagorovy věty a pravidelných n -úhelníků vepsaných do kružnice. Ptolemaios ovšem neužíval funkci sinus, a tak určil délky stran a úhlopříček pravidelných n -úhelníků pro $n \in \{3, 4, 5, 6, 10\}$. Délky tětív dalších oblouků získával postupně z již vypočtených užitím tří důsledků věty 1, které jsou ekvivalentní se součtovými vzorci pro sinus součtu a rozdílu dvou úhlů a se vztahem pro sinus dvojnásobného úhlu. Ptolemaiovou metodou nyní odvodíme zmíněné součtové vzorce.

Do kružnice s jednotkovým průměrem AC vepíšme čtyřúhelník $ABCD$ podle obr. 6. Označíme $|\angle CAD| = \alpha$, $|\angle CAB| = \beta$ a pomocí sinové věty určíme $|BD| = \sin(\alpha + \beta)$, $|CD| = \sin \alpha$, $|AD| = \cos \alpha$, $|BC| = \sin \beta$, $|AB| = \cos \beta$. Dosazením do (1) dostaneme vzorec pro sinus součtu velikostí dvou úhlů:

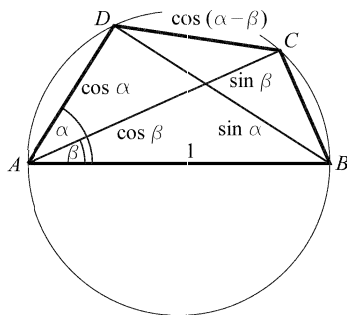
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \text{kde } \alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Analogicky ve čtyřúhelníku $ABCD$ na obr. 7 platí:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad \text{kde } \alpha, \beta \in (0; \frac{\pi}{2}).$$



Obr. 6

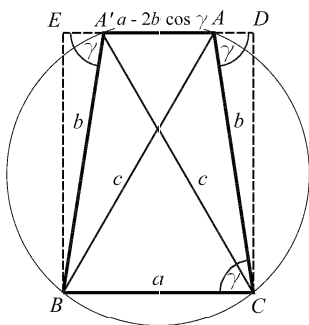


Obr. 7

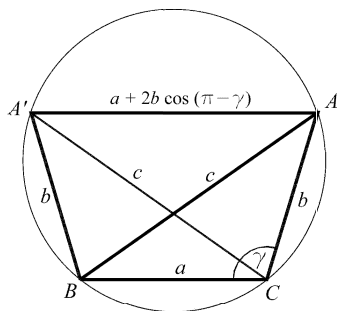
Poznámka. Vyjádření součtových vzorců pomocí oblouků délek jejich tětiv nalezne čtenář také v úloze 4.

Na závěr uvedme, že podobným způsobem lze odvodit i kosinovou větu.³ V případě ostroúhlého trojúhelníku ABC postupujeme takto: Je-li A' obraz vrcholu A v souměrnosti podle osy úsečky BC , zjistíme po doplnění lichoběžníku $BCAA'$ na pravoúhelník $BCDE$ (obr. 8a), že $|AD| = |A'E| = b \cos \gamma$ a $|A'A| = a - 2b \cos \gamma$. Aplikací Ptolemaiovy věty na čtyřúhelník $BCAA'$ dostaneme

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



Obr. 8a



Obr. 8b

³Eukleides v druhé knize Základů [2] uvádí dvě věty, které jsou v souhrnu ekvivalentní kosinové větě: Větu XII pro tupý úhel při vrcholu A a větu XIII pro ostrý úhel při A . Důkaz vět odpovídá důkazům z dnešních středoškolských učebnic.

Pro tupouhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu C dokážeme platnost posledního vztahu analogicky pomocí obr. 8b, který byl převzat z publikace [4]. Ověření platnosti vztahu pro situace, kdy je tupý úhel při vrcholu A , resp. B , přenecháme čtenáři.

V tomto příspěvku jsme se omezili jen na ukázkou trigonometrického využití Ptolemaiovy věty. Některé další aplikace jsou naznačeny v úlohách připojených na konci článku. V navazujících článcích, které budou publikovány v tomto časopise, budou uvedeny další analogie a zobecnění věty 1, včetně ukázek jejich využití.

Úlohy

- Obrázky 3 a 4 jsou nakresleny pro $2\varphi < |\angle ABC|$. Ověřte důkaz pro situace, kdy tento vztah neplatí.
- Pomocí Ptolemaiovy věty určete délku úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku, jehož strana má délku a .
- Délky stran lichoběžníku jsou 1, 1, 1 a m , kde m je kladné reálné číslo. Určete délky jeho úhlopříček a poloměr kružnice opsané.
- Bod D rozděluje oblouk AC kružnice o poloměru r na oblouky AD a DC . Dokažte, že platí:
 - $|AC| = |AD|\sqrt{1 - |CD|^2/(2r)^2} + |CD|\sqrt{1 - |AD|^2/(2r)^2}$,
 - $|AD| = |AC|\sqrt{1 - |CD|^2/(2r)^2} - |CD|\sqrt{1 - |AC|^2/(2r)^2}$.
- Tři strany tětiového čtyřúhelníku mají délky a , b , c a čtvrtá je rovna průměru kružnice čtyřúhelníku opsané. Dokažte, že tento průměr je reálným kořenem rovnice

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Literatura

- [1] *Artmann, B.*: Euclid – The Creation of Mathematics. Springer - Verlag, 1999.
- [2] *Eukleides*: Základy, JČMF, Praha 1907.
- [3] *Horský Z. – Plavec M.*: Poznávání vesmíru. Orbis, Praha 1962.
- [4] *Nelsen, R. B.*: Proofs Without Words - Exercises in Visual Thinking, The Mathematical Association of America, Washington 1993.
- [5] <http://hypertextbook.com/eword/chords.html>

Co, proč a jak ve školské matematice IV

RŮŽENA BLAŽKOVÁ

Pedagogická fakulta MU, Brno

Operace se zlomky – násobení zlomků

Násobení zlomků $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$, kde $b, d \neq 0$, je v učebnicích definováno následujícím způsobem:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

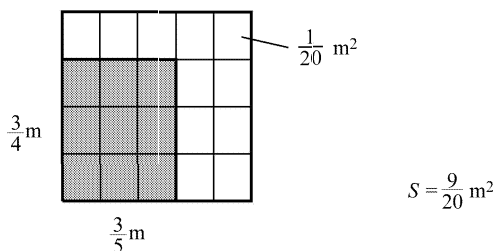
Ve školské matematice se násobení zlomků zavádí a demonstruje nejprve na příkladech násobení zlomku přirozeným číslem. To se, podobně jako násobení přirozených čísel, ukazuje nejprve na základě sčítání několika stejných sčítanců, např.

$$4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Pro volbu motivačních příkladů z praxe jsou vhodné např. určení množství vypité tekutiny po vypití několika krabiček (fručka) nápojů o objemu $\frac{1}{5}$ litru, určení délky dráhy po ujití určitého počtu kroků téže délky $\frac{3}{4}$ metru, výpočet obsahu obdélníku, jehož jedna strana je číslo přirozené a druhá strana je vyjádřena zlomkem (např. chodby, která má délku 5 m a šířku $\frac{5}{4}$ m) apod. Dostatek motivačních a aplikačních úloh podpoří správné pochopení věty, která uvádí násobení zlomku číslem přirozeným: Zlomek násobíme přirozeným číslem tak, že tímto číslem vynásobíme čitatele zlomku a jmenovatele opíšeme (nebo ponecháme beze změny). Snažíme se tak předejít chybě, se kterou se u některých žáků setkáme, až probereme násobení zlomku zlomkem. V tomto případě někteří žáci přirozeným číslem vynásobí jak čitatele, tak jmenovatele zlomku, např. $3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{21}$.

Násobení zlomku zlomkem může být vysvětlováno na různých ilustračních příkladech, avšak nejdůležitější je, aby žák v uváděném příkladu skutečně viděl operaci násobení. Uvedme některé možnosti postupu:

a) Z čtvercového plátu plechu o délce strany 1 m potřebujeme vystříhnout obdélník, jehož jedna strana je tři pětiny metru a druhá strana tři čtvrtiny metru. Jaký bude obsah obdélníku?



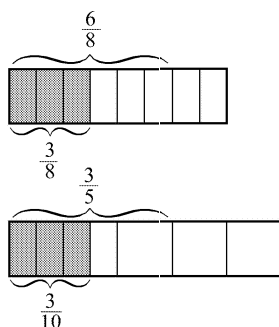
Obr. 1

Z obrázku názorně určíme obsah obdélníku: $\frac{9}{20} \text{ m}^2$. Na základě názoru můžeme pak odvodit vztah a uvést větu pro násobení zlomků:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$$

Součinem dvou zlomků je zlomek, v jehož čitateli je součin čítelů obou zlomků a ve jmenovateli součin jmenovatelů obou zlomků. (Nebo je věta uvedena ve tvaru: Zlomek násobíme zlomkem tak, že součin čítelů lo-míme součinem jmenovatelů. Nebo: Zlomek násobíme zlomkem tak, že vynásobíme čitatele čitatelem a jmenovatele jmenovatelem.)

b) Násobení zlomku zlomkem motivujeme příkladem, v němž počítáme zlomek ze zlomku, např. $\frac{1}{2}$ z $\frac{6}{8}$ a poté $\frac{1}{2}$ z $\frac{3}{5}$. V tomto případě však ne všichni žáci vidí operaci násobení.



Obr. 2

$$\frac{1}{2} \text{ z } \frac{6}{8} \quad \dots \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

Při výuce násobení zlomků věnujeme pozornost krácení zlomků, a to jak zlomků jednotlivých, tak tzv. krácení křížem, tj. krácení různých činitelů. Upozorníme na případy, které by vedly k eventuálním chybám při krácení, jako je krácení v součtu nebo rozdílu:

$$\begin{array}{cc} \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{15}, & \frac{5}{6} + \frac{6}{15}, \\ \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{10}, & \frac{5}{4} - \frac{4}{10}, \\ \frac{5 \cdot 6}{6}, & \frac{5 + 6}{6}, \\ \frac{5 \cdot 4}{4}, & \frac{5 - 4}{4} \end{array}$$

Násobení racionálních čísel je operace uzavřená, komutativní, asociativní, neutrálním prvkem je číslo 1, číslo 0 je prvkem agresivním. Ke každému racionálnímu číslu (s výjimkou nuly) existuje inverzní prvek, což je číslo převrácené. Součin zlomku a zlomku k němu převrácenému je roven jedné.

Příklady k procvičení

1. Tabulka se samokontrolou

•					•				•			
	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$				$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$				$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
						$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{5}$			$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{15}$

Obr. 3

Do políček čtvercové tabulky 2×2 napíšeme čtyři libovolné zlomky, které vynásobíme po dvojicích nejprve v řádcích. Ve shodě s obrázkem 3 tak dostaneme následující výsledky

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Vynásobíme-li ale tytéž zlomky v tabulce po dvojicích ve sloupcích, dostaneme

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}.$$

Součin součinů (dvojic) zlomků v řádcích je přitom roven součin součinů (dvojic) zlomků ve sloupcích. Platí tedy

$$\frac{8}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{15}.$$

2. Vypočítejte dané tři součiny zlomků a uspořádejte je od nejmenšího k největšímu

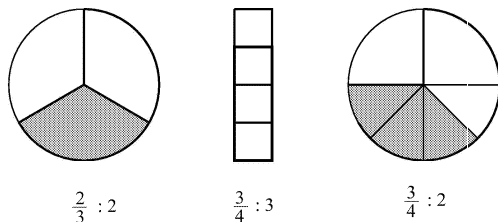
$$\frac{48}{90} \cdot \frac{18}{64}, \quad \frac{36}{56} \cdot \frac{7}{9}, \quad \frac{125}{280} \cdot \frac{14}{25}.$$

Operace se zlomky - dělení zlomků

Vlastní výuku dělení zlomků můžeme opět rozčlenit do několika fází.

a) Dělení zlomku číslem přirozeným, např.

Dvě třetiny dortu rozdělte na dvě části. Tři čtvrtiny litru mléka rozdělte na tři části. Tři čtvrtiny pizzy rozdělte na dvě části.



Obr. 4

Těmto praktickým úlohám tak odpovídají příklady dělení $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

(Srovnejte výsledky dělení s výsledky příkladů násobení $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$)

b) Dělení přirozeného čísla zlomkem.

(i) Je vhodné uvést nejprve příklady, kdy žáci snadno pochopí princip dělení přirozeného čísla zlomkem. Například chceme-li 15 litrů moštu rozlít

do lahví o objemu 1 litr, potřebujeme jich k tomu 15, neboť $15 : 1 = 15$. Chceme-li však 15 litrů moštu rozlít do lahví o objemu $\frac{1}{2}$ litru, potřebujeme k tomu 30 lahví, tedy dvojnásobek lahví, neboť $15 : \frac{1}{2} = 30$.

Analogicky můžeme dále pokračovat: Chceme-li 15 litrů moštu rozlít do lahví o objemu jedna třetina litru, jedna čtvrtina litru, tři poloviny litru, apod. Přitom vždy sledujeme, jak se mění podíl a jaká je souvislost s násobením příslušných čísel.

(ii) Můžeme využít následující experiment: 5 litrů mléka budeme dělit po jedné čtvrtině litru. Kolik žáků tak obdrží jednu čtvrtinu litru mléka? Dále můžeme postupovat od jednoho litru a budeme sledovat, kolik žáků postupně mlékem podělíme. Údaje pak zapíšeme do tabulky:

počet litrů mléka	1	2	3	4	5
počet žáků, které podělíme	4	8	12	16	20

Z tabulky je patrné, že $5 : \frac{1}{4} = 20$ a v souvislosti se znalostí násobení zlomků již víme, že $5 \cdot \frac{4}{1} = 20$, tedy $5 : \frac{1}{4} = 5 \cdot \frac{4}{1}$.

(iii) Tři kilogramy sušených bylin budeme rozdělovat do sáčků po jedné desetíně kilogramu ($\frac{1}{10}$ kg=100 g). Vypočteme $3 : \frac{1}{10} = 3 \cdot \frac{10}{1} = 30$.

Z několika uvedených příkladů můžeme usoudit, že přirozené číslo dělíme zlomkem tak, že přirozené číslo násobíme zlomkem převráceným.

c) Dělení zlomku zlomkem

Předpis pro dělení zlomku jiným zlomkem je obsažen v následující větě: Daný zlomek dělíme druhým zlomkem tak, že jej vynásobíme zlomkem převráceným k druhému zlomku, tj platí

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

přičemž zde požadujeme, aby čísla b, c, d byla různá od nuly.

I zde je možno využít několika motivačních úloh, které daný předpis podpoří, např.

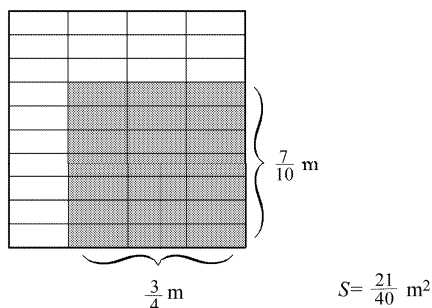
(i) Tři čtvrtiny litru mléka rozdělíme do skleniček po jedné čtvrtině litru. Kolik skleniček tak naplníme? ($\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$, přitom si všimněme, že platí $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = 3$, tedy $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1}$).

(ii) Obdélník má strany délky $\frac{3}{4}$ metru a $\frac{7}{10}$ metru. Jeho obsah je $\frac{21}{40}$ metru čtverečního. Formulujeme následující úlohu:

Jaká je délka obdélníku, je-li jeho obsah $\frac{21}{40}$ metru čtverečního a šířka obdélníku je $\frac{7}{10}$ metru?

Máme tak vypočítat podíl zlomků $\frac{21}{40} : \frac{7}{10} = \frac{3}{4}$. Přitom vidíme, že $\frac{21}{40} \cdot \frac{10}{7} = \frac{3}{4}$.

Je tedy $\frac{21}{40} : \frac{7}{10} = \frac{21}{40} \cdot \frac{10}{7} = \frac{3}{4}$.



Obr. 5

(iii) Pro přemýšlivé žáky můžeme uvést následující příklad.

Pokud neumíme vypočítat hodnotu např. hodnotu podílu $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$, obecně

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}, \quad \text{kde} \quad b, c, d \neq 0,$$

můžeme postupovat takto:

Označíme si hodnotu podílu jako x , je tedy $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = x$. Přitom si uvědomme, že hodnota podílu x vynásobená hodnotou dělitele je rovna dělenci, tj. $x \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$. Jestliže chceme dále vypočítat hodnotu x , můžeme obě strany poslední rovnice vynásobit zlomkem převráceným ke zlomku $\frac{5}{7}$, který figuruje jako činitel na levé straně této rovnice u neznámé hodnoty x , tedy zlomkem $\frac{7}{5}$. Tím získáme u neznámé hodnoty x koeficient 1. Dále uvádíme výše popsany postup při dělení daných zlomků

$$x \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}, \quad \text{a tedy} \quad x = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15},$$

tj.

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}.$$

Obecně pak můžeme použít následující postup

$$x = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

$$x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$x \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad \text{tj.} \quad x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Přitom platí

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Po zvládnutí učiva o dělení zlomků zavádíme pojem složeného zlomku, tedy zlomku, jehož čitatelem i jmenovatelem je opět zlomek. Úpravy složeného zlomku, krácení apod. vyplývají z uvedených postupů pro dělení zlomků, neboť hlavní zlomková čára u složených zlomků nahrazuje dělení. Lze též uvést mnemotechnickou pomůcku:

$$\text{č} \left\langle \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \right\rangle \text{j} = \frac{ad}{bc}$$

V učebnicích matematiky pro jednotlivé ročníky ZŠ i ve sbírkách úloh lze nalézt mnoho zajímavých příkladů pro počítání také se složenými zlomky.

L i t e r a t u r a

- [1] *Balada, F.:* Z dějin elementární matematiky. SPN, Praha 1959.
- [2] *Hejný, M. a kol.:* Teória vyučovania matematiky. SPN, Bratislava 1990.

Upozornění čtenářům. Do druhé části příspěvku „Co, proč a jak ve školské matematice“ (14. ročník MFI, číslo 7) se vloudila chybička. Na str. 398 má v poslední větě správně být: „Při znázorňování zlomků na číselné ose je nutné respektovat skutečnost, že obrazem čísla na číselné ose je bod, nikoliv interval, tedy např. obrazem čísla $\frac{1}{2}$ a všech zlomků s tímto zlomkem ekvivalentních je bod, nikoliv úsečka nebo obdélník, jak to žáci někdy činí“. Čtenářům se za tuto chybu omlouváme.

Binomické rovnice a funkce sinus

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Dnes, kdy si každý žák může hodnoty funkce sinus zjistit na kalkulačce s velmi velkou přesností, upadá jejich vyjádření pomocí odmocnin pomalu ale jistě v zapomenutí. Pro numerické výpočty je nepochybně důležitější znát hodnotu $\sin \frac{\pi}{3}$ ve tvaru 0,866 025, než ve tvaru $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ale v teorii by tímto způsobem studentům mohly uniknout pozoruhodné souvislosti. Z údajů na kalkulačce například žádný student nezjistí, že platí následující rovnosti, které mu samozřejmě k ničemu nebudou, ale které mohou některé zvědavější povahy potěšit:

$$\begin{array}{ll} \sin 0^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{4}} & \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{1}} \\ \sin 15^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} & \sin 67,5^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \sin 22,5^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} & \sin 75^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{1}} & \sin 90^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{4}} \\ \sin 45^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{0}} \end{array}$$

Poznatky, které nyní odvodíme, už tak jednoduché nebudou. Z hlediska školského nejsou sice nijak důležité, ale jistý význam se jim přisoudit dá, protože studenti si při jejich odvozování mohou procvičit a zopakovat probrané učivo.

Vyjdeme z binomické rovnice

$$x^{2n} - 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou čísla

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n} + i \sin \frac{2k\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1,$$

která v Gaussově rovině leží ve vrcholech pravidelného $2n$ -úhelníku znázorněného na obr. 1. Všimněme si, že čísla x_k a x_{2n-k} jsou pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ komplexně sdružená; je-li tedy

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n},$$

je

$$x_{2n-k} = \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n},$$

Polynom $x^{2n} - 1$ rozložíme na součin kořenových činitelů, při čemž sloučíme dvojčleny $x - x_k$ a $x - x_{2n-k}$:

$$\begin{aligned} x^{2n} &= (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} [(x - x_k)(x - x_{2n-k})] = \\ &= (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right). \end{aligned}$$

Protože pro $x \neq 1$ a $x \neq -1$ platí

$$\frac{x^{2n} - 1}{(x^2 - 1)} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2},$$

dostáváme z odvozeného vztahu

$$1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right),$$

což pro $x = 1$ znamená, že je

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right).$$

Užitím rovnosti

$$1 - \cos \frac{k\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$$

dostaneme

$$n = 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$$

a vzhledem k tomu, že úhel $\frac{k\pi}{2n}$ je pro $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ ostrý, má $\sin \frac{k\pi}{2n}$ kladnou hodnotu a po závěrečné úpravě docházíme k výsledku:

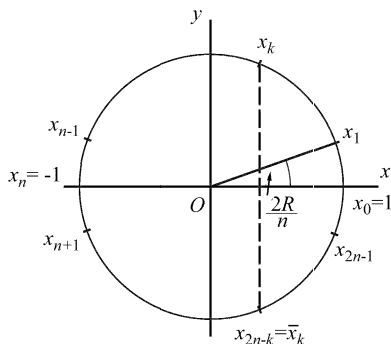
$$\text{Pro všechna přirozená } n > 1 \text{ platí: } \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Studentům necháme tento výsledek ověřit pro $n = 2$ a $n = 3$:

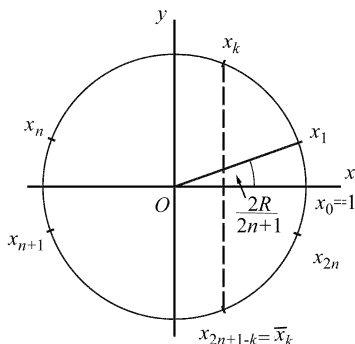
$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Podobný vztah odvodíme z binomické rovnice

$$x^{2n+1} - 1 = 0.$$



Obr. 1



Obr. 2

Její kořeny jsou čísla

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n,$$

která v Gaussově rovině leží ve vrcholech pravidelného $(2n+1)$ -úhelníku znázorněného na obr. 2. Opět je vidět, že čísla x_k a x_{2n+1-k} jsou sdružená pro všechna $k = 1, 2, \dots, n$; je-li tedy

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{2n+1},$$

je

$$x_{2n+1-k} = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2n+1},$$

Podobným způsobem jako v předcházejícím případě rozložíme polynom $x^{2n+1} - 1$ na součin kořenových činitelů:

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - 1 &= (x - 1) \prod_{k=1}^n [(x - x_k)(x - x_{2n+1-k})] = \\ &= (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right) \end{aligned}$$

Uvědomíme-li si, že pro $x \neq 1$ je

$$(x^{2n+1} - 1)/(x - 1) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2n},$$

vyplývá z odvozeného vztahu

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{2n} = \prod_{k=1}^n (x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1).$$

Odkud pro $x = 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= \prod_{k=1}^n \left(2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right) = 2^n \prod_{k=1}^n 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \\ &= 2^{2n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\sin \frac{k\pi}{2n+1}$ je pro $k = 1, 2, \dots, n$ kladný, dospíváme k závěrečnému výsledku:

Pro všechna přirozená n platí

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

I nyní mohou studenti ověřit, že pro $n = 1$ a $n = 2$ je vskutku

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Naskytá se otázka, zda nějaká podobná rovnost platí i pro součin hodnot funkce kosinus. Odvodíme ji způsobem, který už bude čtenáři nepochybně povědomý.

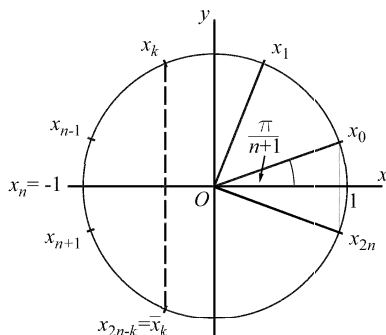
Uvažujme binomickou rovnici

$$x^{2n+1} + 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou čísla

$$x_k = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2n+1} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2n+1},$$

kde $k = 0, 1, \dots, 2n$. Tyto kořeny jsou v Gaussově rovině vrcholy pravidelného $(2n+1)$ -úhelníku na obr. 3. Na rozdíl od předešlých případů je nyní $x_0 \neq 1$. Známým způsobem rozložíme polynom $x^{2n+1} + 1$ na součin kořenových činitelů



Obr. 3

$$x^{2n+1} + 1 = (x+1) \sum_{k=0}^{n-1} (x-x_k)(x-x_{2n-k})$$

a po úpravě dostaneme

$$x^{2n+1} + 1 = (x+1) \sum_{k=0}^{n-1} (x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1).$$

Vzhledem k tomu, že je

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} = -\cos \left[\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \right] = -\cos \frac{(n-k)2\pi}{2n+1},$$

můžeme psát

$$x^{2n+1} + 1 = (x+1) \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 + 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1).$$

Z této rovnosti známým způsobem vyplývá

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2n} = \prod_{k=0}^{n-1} (x^2 + 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1),$$

odkud dosazením $x = 1$ dostaneme

$$1 = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \left[1 + \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right] = 2^{2n} \prod_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Po odmocnění máme závěrečný výsledek:

$$\text{Pro všechna přirozená } n \text{ platí: } \frac{1}{2^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 1. 2006 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 123

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s obvodem 180, jejichž délky stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

Filip Švrček

Úloha 124

Nechť S značí střed kružnice vepsané danému ostroúhlému trojúhelníku ABC . Označme dále A', B', C' obrazy bodu S v osových souměrnostech po řadě podle přímk BC, CA, AB . Dokažte, že trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

Jaroslav Švrček