

MATEMATIKA

Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie

Část III (Analýza úlohy o třech Apolloniových kružnicích se třemi překvapeními)

MILAN KOMAN – RUDOLF FRITSCH

Pedagogická fakulta UK, Praha – Ludwig-Maximilians-Universität, Mathematisches
Institut, München, NĚMECKO

Co známe a co budeme zkoumat

Připomeňme si nejdříve úlohu o třech Apolloniových kružnicích, kterou jsme řešili ve 2. části našeho příspěvku [2] a jejíž podrobnou analýzou se budeme zabývat v tomto příspěvku.

Sestrojíme v rovině trojúhelník ABC a zvolíme tři navzájem různá kladná reálná a, b, c . Pak sestrojíme tři Apolloniovy kružnice

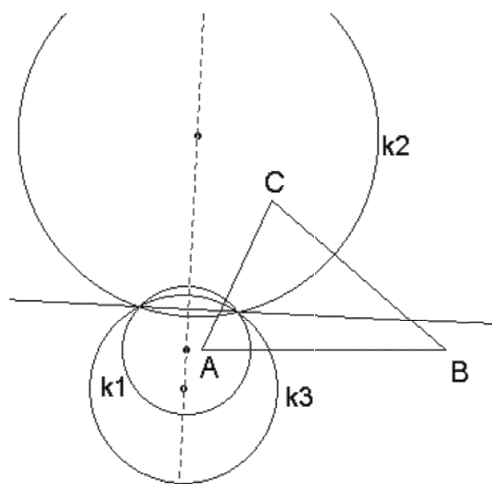
$$k_1 = k(A, B, a, b), \quad k_2 = k(B, C, b, c), \quad k_3 = k(C, A, c, a). \quad (1)$$

(První z nich je množinou všech bodů, které mají od vrcholů A, B daný poměr vzdáleností $a : b$, tj., pro které platí $|AX| : |BX| = a : b$. Podobně druhá kružnice je množinou všech bodů, pro které platí $|BX| : |CX| = b : c$. A konečně třetí kružnice je množinou všech bodů, pro které platí $|CX| : |AX| = c : a$.)

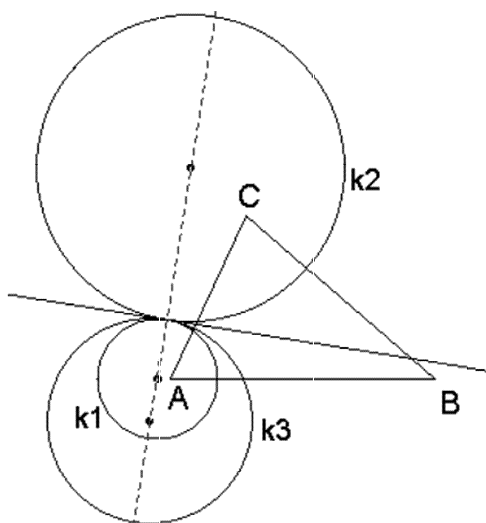
Zjistili jsme, že kružnice k_1, k_2, k_3 patří vždy jednomu svazku kružnic. Mají společnou chordálu a jejich středy leží v jedné přímce. Mohou nastat

*) Konstrukce těchto Apolloniových kružnic je popsána v 1. části našeho příspěvku, viz [1]

tři případy: Kružnice k_1 , k_2 , k_3 mají dva společné body a patří *elliptickému svazku kružnic* (obr. 1), jejich společnou chordálou je spojnice jejich průsečíků.

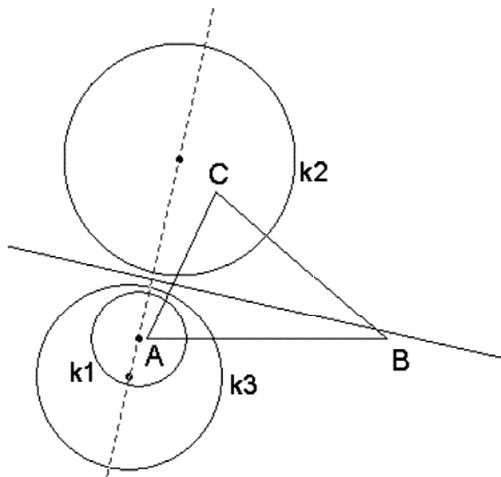


Obr. 1



Obr. 2

Druhou možnost ukazuje obrázek 2, kde se kružnice k_1, k_2, k_3 dotýkají v jednom bodě. Kružnice patří *parabolickému svazku kružnic*. Poslední možnost ukazuje obrázek 3. Kružnice k_1, k_2, k_3 nemají žádný společný bod a patří *hyperbolickému svazku kružnic*.



Obr. 3

Ve všech třech případech byl zvolen stejný trojúhelník. Počet průsečíků kružnic k_1, k_2, k_3 (tzv. *Apolloniových bodů*) závisí na číslech a, b, c . Na obrázcích 1, 2 a 3 jsou čísla a, c stejná a mění se číslo b . V prvním případě je

$$a = 0,50; \quad b = 2,00; \quad c = 1,10,$$

ve druhém případě je

$$a = 0,50; \quad b = 2,30; \quad c = 1,10$$

a ve třetím případě je

$$a = 0,50; \quad b = 2,60; \quad c = 1,10.$$

Vzniká **přirozená otázka** (jejíž řešení bude hlavní náplní tohoto příspěvku): *Pro které hodnoty a, b, c jsou výsledkem dva, jeden nebo žádný Apolloniův bod? Jinými slovy: Pro které hodnoty a, b, c patří kružnice k_1, k_2, k_3 eliptickému, parabolickému nebo hyperbolickému svazku kružnic?*

Tuto otázku si položili i studenti Pedagogické fakulty Karlovy univerzity v Praze, když jsme s nimi tuto úlohu v roce 2002 řešili. Ale tehdy jsme ještě odpověď neznali. Úlohu se nám podařilo vyřešit až začátkem roku 2004. Výsledek v českém jazyce přináší náš příspěvek, v německém jazyce příspěvek [3].

První překvapení

Částečnou odpověď na otázku, kterou jsme zakončili první odstavec, dávají věty 9 a 11 ze 2. části našeho článku [2]. Výsledky obou vět shrnuje věta 13.

Věta 13

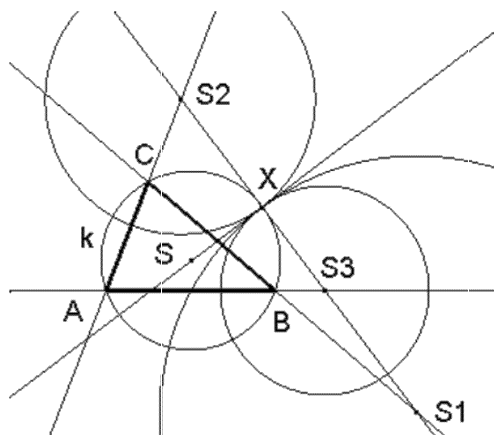
Nechť X je libovolný bod v rovině trojúhelníku ABC různý od jeho vrcholů. Nechť pro čísla a, b, c platí:

$$a : b : c = |AX| : |BX| : |CX|. \quad (2)$$

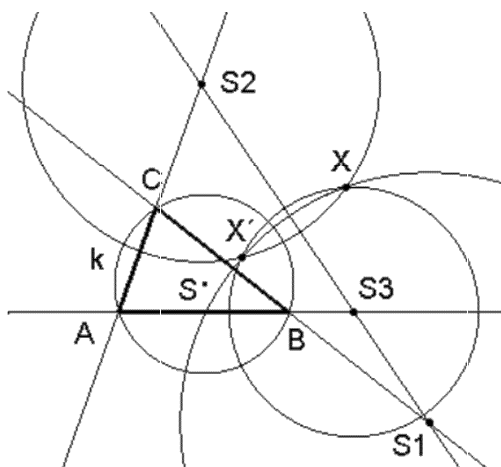
Potom svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$ je parabolický, právě když bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC . V ostatních případech je eliptický.

Tato věta však neříká nic o tom, pro která čísla a, b, c dostaneme hyperbolický svazek kružnic. Je otázkou, zda je, či není výhodou skutečnost, že bod X zmíněný ve větě 13 je již sám „výsledkem“, a to jedním z hledaných Apolloniových bodů (jedním ze společných bodů kružnic parabolického nebo eliptického svazku kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$). V každém případě to však zjednodušuje sestavení Apolloniových kružnic (1) svazku $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$. Ukážeme to na obrázcích 4 a 5.

Na obrázku 4 leží bod X na kružnici k a je tedy základním bodem parabolického svazku hledaných Apolloniových kružnic (1). Osa hledaného svazku kružnic (to je společná tečna těchto kružnic) prochází středem S kružnice k opsané trojúhelníku ABC . Středná s těchto kružnic (spojnice jejich středů) je tedy tečnou kružnice k v bodě X . Průsečíky středné s s přímkami BC, CA, AB jsou středy S_1, S_2, S_3 příslušných Apolloniových kružnic.



Obr. 4



Obr. 5

Na obrázku 5 bod X neleží na kružnici k opsané trojúhelníku ABC . Všechny tři Apolloniovy kružnice (1) jsou kolmé ke kružnici k opsané trojúhelníku ABC (viz věta 10 z 2. části článku). Druhý Apolloniův bod X' je proto obrazem bodu X v kruhové inverzi podle kružnice k (obr. 5). Můžeme tedy snadno sestavit střednou s všech tří Apolloniových kružnic (1) jako osu úsečky XX' . Dále postupujeme stejně jako v předešlém případě.

Věta 13, jak jsme viděli, nedává uspokojivé řešení daného problému. Může nás však inspirovat k jinému mnohem uspokojivějšímu řešení. Čísla a, b, c jsme ve větě 13 určili pomocí vzdáleností (bodu X) od vrcholů trojúhelníku ABC . Položme si tedy otázku:

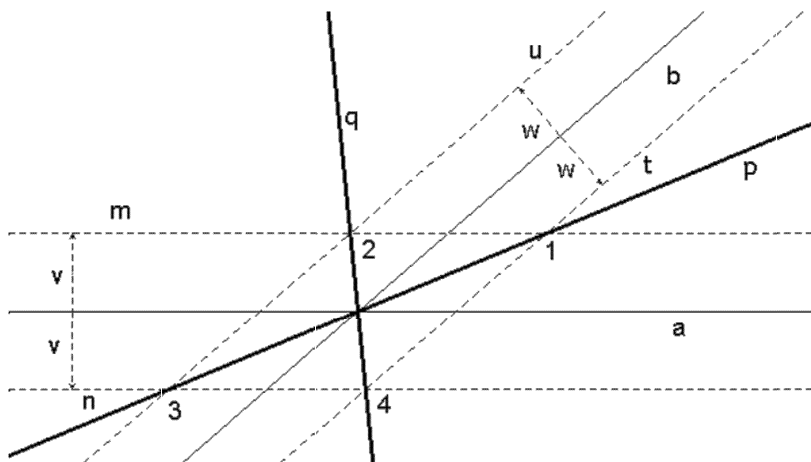
Co když nebudeme čísla a, b, c určovat jako vzdálenosti zvolených bodů od vrcholů trojúhelníku ABC , ale jako vzdálenosti od stran tohoto trojúhelníku, respektive od přímek, které vzniknou jejich prodloužením?

Ke každému bodu X v rovině trojúhelníku ABC najdeme takový bod, aby měl od přímek BC, CA, AB stejný poměr vzdáleností jako bod X od vrcholů trojúhelníku ABC . Čtenáři možná nevidí, jaký je v tom smysl, ale později budou jistě překvapeni. Nejdříve si připomeneme řešení následující jednoduché úlohy.

Úloha 7

Jsou dány dvě různoběžky a, b a dvě kladná čísla v, w . Máme sestavit množinu bodů, které mají po řadě od přímek a, b poměr vzdáleností $v : w$.

Řešení ukazuje obrázek 6. Sestrojíme rovnoběžky s přímkami a, b ve vzdálenostech v , respektive w . Ty se protnou ve čtyřech bodech 1, 2, 3, 4, vrcholech rovnoběžníku. Sjednocením přímek 13 a 24 dostaneme hledanou množinu bodů.



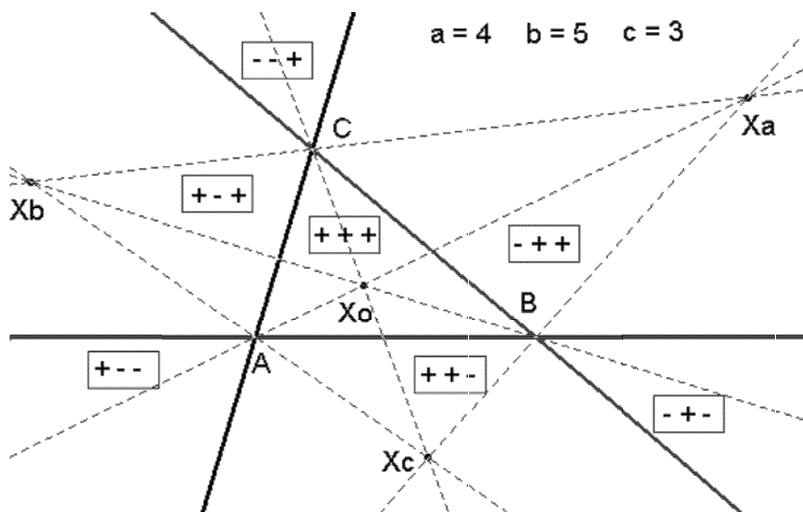
Obr. 6

Toho využijeme k řešení další pomocné úlohy:

Úloha 8

Je dán trojúhelník ABC a kladná reálná čísla a, b, c . Máme sestrojit všechny body, které mají od přímk BC , CA , AB po řadě poměr vzdáleností a, b, c .

Řešení pro $a = 4$, $b = 5$, $c = 3$ ukazuje obrázek 7. Sestrojíme dvě různoběžky tvořící množinu bodů, které mají od přímk BC , CA po řadě poměr vzdáleností $a : b$. Podobně sestrojíme množninu bodů, které mají od přímk CA , AB po řadě poměr vzdáleností $b : c$. Můžeme ještě doplnit množinu bodů, které mají od přímk AB , BC poměr vzdáleností $c : a$. Na obrázku 7 se každé tři přímk, z nichž každá prochází jiným vrcholem trojúhelníku ABC protínají v jednom bodě. Dostáváme celkem čtyři body X_o , X_a , X_b , X_c , které leží ve čtyřech ze sedmi oblastí, na které je rozdělena rovina přímkami AB , BC a CA . Pro usnadnění další komunikaci jsou na obrázku 7 tyto oblasti označeny trojicemi znamének $+$ a $-$. Například první znaménko je $+$, když bod A do uvažované oblasti patří a je $-$, když do ní nepatří. Podobný význam mají zbylá dvě znaménka.



Obr. 7

K předešlé úloze můžeme připojit několik otázek pro čtenáře k zamyšlení:

- Co můžeme říci o bodech X_o , X_a , X_b a X_c , když bude platit některá z rovností $a = b$, $b = c$, $c = a$?
- Může se stát, že by úloha měla jen tři výsledky? Například tak, že by některé přímky, které procházejí vnějšími úhly trojúhelníku ABC byly rovnoběžné?
- Jak se změní počet výsledků, když bude jedno z čísel a , b , c rovné nule? Mohou být dvě nebo dokonce tři z těchto čísel rovna nule?

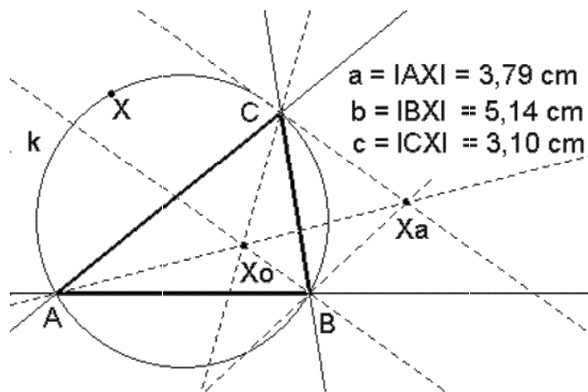
A nyní se již blížíme k prvnímu z překvapivému výsledku, ke kterému nás přivedou následující pokusy.

Pokus 1

Zvolíme libovolný trojúhelník ABC , sestrojíme jemu opsanou kružnici k a na ní zvolíme libovolný bod X (obr. 8a). Vzdálenosti bodu X od vrcholů trojúhelníku ABC označíme

$$a = |AX|, \quad b = |BX|, \quad c = |CX|.$$

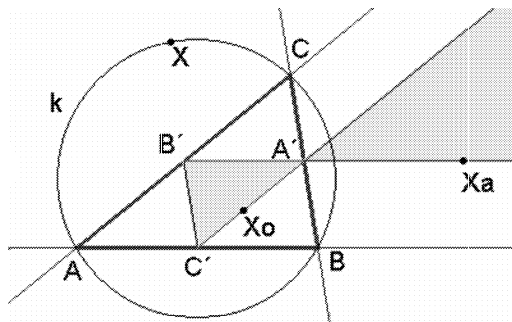
Pak sestrojíme v oblasti $(+++)$ bod X_o a v oblasti $(-++)$ bod X_a , které mají oba od přímek BC , CA , AB po řadě poměr vzdáleností $a : b : c$. Nyní zkusíme pohybovat bodem X po kružnici k a současně budeme sledovat, jak se pohybují body X_o a X_a .



Obr. 8a

Na obrázku 8a je zvolen bod X na kružnici k , pak jsou změřeny délky $a = |AX|$, $b = |BX|$, $c = |CX|$ a nakonec sestrojeny body X_o a X_a .

Jak se mění poloha bodů X_o a X_a v závislosti na pohybu bodu X po kružnici k naznačuje obrázek 8b. Bod X_o obíhá po obvodu tzv. příčkového trojúhelníku $A'B'C'$ (jeho strany jsou střední příčky trojúhelníku ABC). Bod X a obíhá ramena úhlu, který je vrcholovým úhlem k vnitřnímu úhlu trojúhelníku $A'B'C'$ při vrcholu A' .

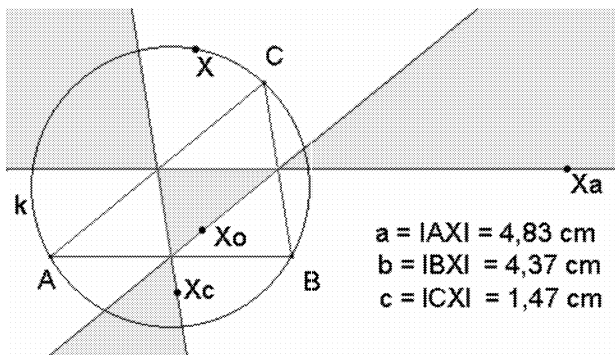


Obr. 8b

Obrázek 8b je bohužel statický. To právě potěšení z něho pocítíme teprve tehdy, když sestrojíme jeho mobilní verzi v Cabri-geometrii. Uvidíme například, jak se body X_o a X_a současně sbíhají a rozbíhají v bodě A' . Můžeme pozorovat, jak bod X_a střídavě „mizí“ a znovu se objevuje. Pro body X , které leží na oblouku CB (neobsahujícím bod A) bod X_a totiž neexistuje. Dostáváme tak **dva pozoruhodné objevy**:

- 1) Zobrazení $X \rightarrow X_o$ „mění“ kružnici k na hranici trojúhelníku $A'B'C'$ a zobrazení $X \rightarrow X_a$ „mění“ oblouk CAB kružnice k na ramena úhlu vrcholového k úhlu $C'A'B'$.
- 2) Spojitý pohyb bodu X po kružnici k se mění na nespojitý a „přerušovaný“ pohyb bodu X_a po ramenech vrcholového úhlu k vnitřnímu úhlu středového trojúhelníku v bodě A_o .

Zobrazujeme-li všechny čtyři body X_o , X_a , X_b , X_c , jsou jejich dráhy při pohybu bodu X hranice jednotlivých šedivě vyznačených oblastí na obrázku 9.



Obr. 9

Radost nám může opět způsobit, když sestrojíme mobilní obrázek v Cabri-geometrii a využijeme operace „pohyb objektu“. Bod rozpočíváme natažením pera. Současně s pohybem bodu X se pohybují i body X_o , X_a , X_b , X_c . V okamžiku, kdy „doběhne“ bod X_o k některému vrcholu příčkového trojúhelníku, „setká“ se v něm i s bodem, který „běží“ po hranici příslušného vrcholového úhlu.

Spojme-li nyní výsledky pokusu 1 s tvrzením věty 13 dostaneme další **pozoruhodný objev**:

Nechť ABC je libovolný trojúhelník. Nechť X' je libovolný bod na některé z přímek, které jsou prodloužením stran příčkového trojúhelníku T daného trojúhelníku ABC . Vzdálenosti bodu X' po řadě od přímek BC , CA , AB označme a , b , c , tj.

$$a = |X', BC|, \quad b = |X', CA|, \quad c = |X', AB| \quad (3)$$

Potom Apolloniův svazek kružnic $A(A, B, C, a, b, c)$ je parabolický, a proto čísla ze vztahu (3) dávají jen jeden Apolloniův bod.

Tento výsledek nás může inspirovat k položení otázky: *Co když bod X' ne zvolíme na žádné přímce, která vznikne prodloužením stran příčkového trojúhelníku?*

Pokus 2

Zvolte trojúhelník ABC a vyznačte libovolný bod X' v jeho rovině, různý od vrcholů A , B , C . Určete čísla a , b , c podle rovností (3). Sestrojte Apolloniův svazek kružnic $A(A, B, C, a, b, c)$.

Pohybujte s bodem X' a pozorujte, jak se mění Apolloniův svazek kružnic $A(A, B, C, a, b, c)$ a kdy bude eliptický, kdy parabolický a kdy hyperbolický.

To, co můžeme při vlastním pokusu pozorovat, přinese první nečekaný výsledek, první překvapení.

Pohybem bodu X' zjistíme, že mohou vzniknout všechny tři druhy svazků kružnic, to je eliptický, parabolický i hyperbolický. Rozhodující je, zda bod X' je vnitřním, hraničním nebo vnějším bodem sjednocení čtyř šedě vyznačených oblastí na obrázku 9.

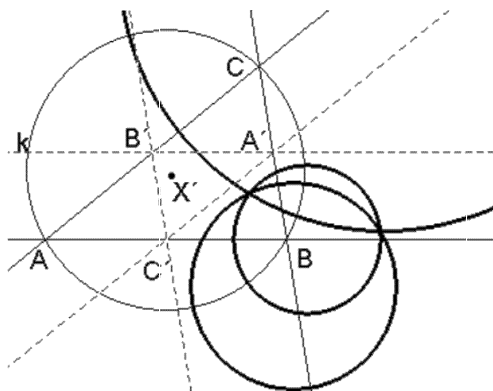
Všechny tři možnosti znázorníme na obrázcích 10, 11 a 12, v nichž se však pro stručnost omezíme jen na body, které patří trojúhelníku ABC .

Na obrázku 10 náleží bod X' trojúhelníku $A'B'C'$ a příslušný Apolloniův svazek je eliptický; všechny tři Apolloniovy kružnice procházejí dvěma body.

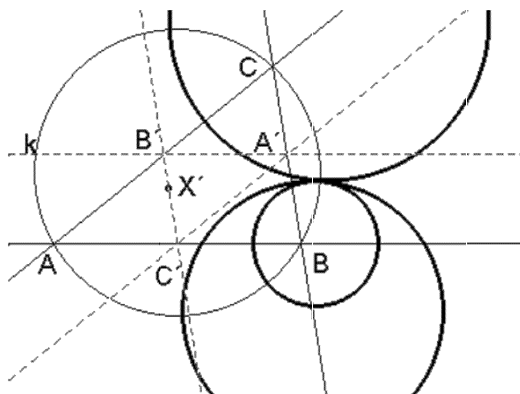
Na obrázku 11 leží bod X' na straně trojúhelníku $A'B'C'$ a Apolloniův svazek kružnic je v tomto případě parabolický, všechny tři kružnice se dotýkají v jednom bodě.

Na obrázku 12 je bod X' vnějším bodem trojúhelníku $A'B'C'$ (a zároveň vnitřním bodem daného trojúhelníku) a Apolloniův svazek kružnic je hyperbolický; tři Apolloniovy kružnice nemají žádný společný bod.

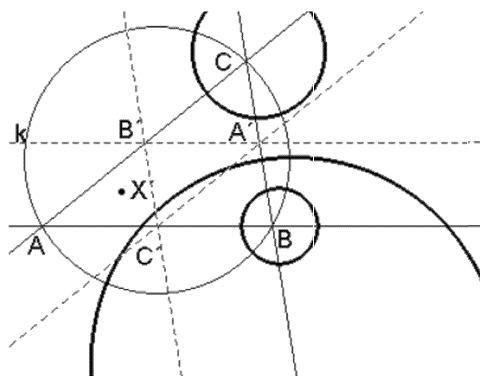
Statické obrázky 10, 11 a 12 však nemohou poskytnout to potěšení, které přináší vlastní experimentování s mobilním Cabri obrázkem.



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

První výsledek (první překvapení)

Nechť X' je libovolný bod trojúhelníku ABC různý od jeho vrcholů. Jeho vzdálenosti od stran trojúhelníku označme podle (3). Potom pro body X' , které patří vnitřku šedě vyznačených oblastí na obr. 9 dostaneme eliptický svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$, pro body na hranici těchto oblastí dostaneme parabolický svazek a pro body uvnitř bílých oblastí hyperbolický svazek.

Druhé překvapení

Klíčem k prvnímu překvapení byl pokus 1. Zkoumali jsme při něm, jak se zobrazují body X kružnice k opsané trojúhelníku ABC , když jejich vzdálenosti od vrcholů A, B, C interpretujeme jako vzdálenosti od přímk BC, CA, AC . Změňme pokus takto:

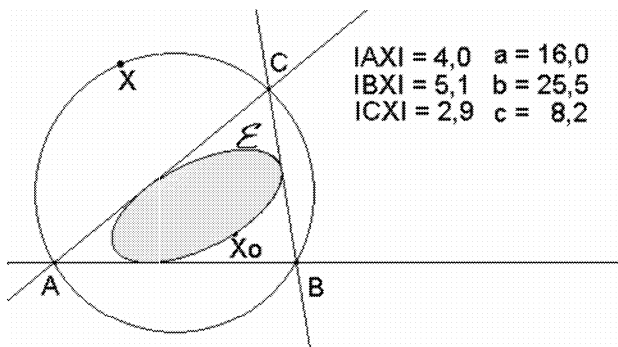
Pokus 3

Zvolíme opět trojúhelník ABC , sestrojíme jemu opsanou kružnici k a na ní zvolíme bod X . Na rozdíl od pokusu 1 určíme čísla a, b, c jako druhé mocniny vzdáleností bodů X od vrcholů trojúhelníku ABC :

$$a = |AX|^2, \quad b = |BX|^2, \quad c = |CX|^2. \quad (4)$$

Pak sestrojíme všechny body X' , které mají od přímk BC, CA, AB po řadě poměr vzdáleností $a : b : c$. Nakonec budeme opět pohybovat bodem X po kružnici k a zároveň sledovat, jak se pohybují sestrojené body X' .

Stručně uvedeme jen výsledky. Popíšeme případ, kdy se bod X' pohybuje v trojúhelníku ABC . (Obr. 13, kde je bod X' označen jako bod X_o .)

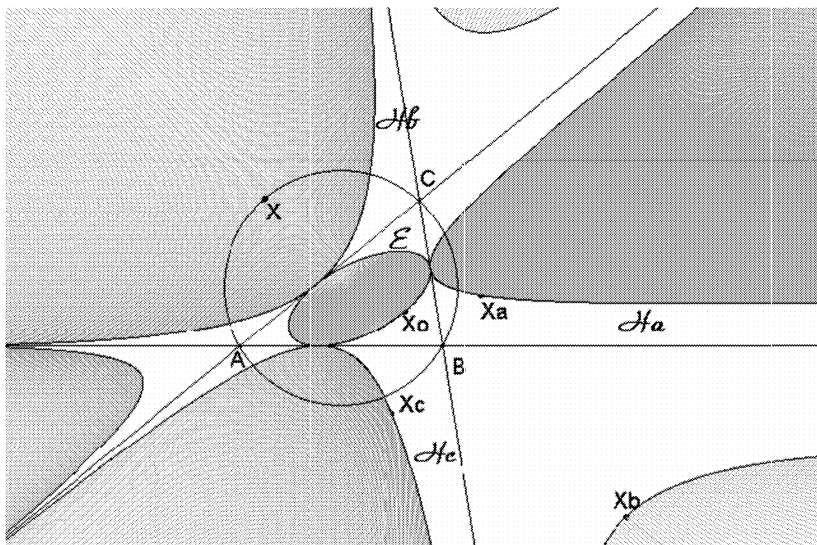


Obr. 13

Sestrojíme-li stopu nebo množinu bodů X_o , objeví se křivka $\mathcal{E}$ vepsána do trojúhelníku ABC připomínající elipsu (obr. 13). Jak ověříme, že to je opravdu elipsa? Poměrně jednoduše. Vyznačíme pět různých bodů této křivky a pak využijeme možnosti, kterou dává Cabri-geometrie. Sestrojíme kuželosečku, která prochází těmito body. (Konstrukci najdeme v „roletě“, která je při standardním nastavení pod konstrukcí „kružnice“.) Pokus naznačuje, že naše domněnka o elipse je velice pravděpodobná. Tuto

domněnku skutečně dokážeme ve čtvrté části příspěvku pomocí výpočtů a navíc popíšeme jednoduchou konstrukci této elipsy. Najdeme její střed a body dotyku se stranami trojúhelníku. Ty samozřejmě můžeme dostat také už dnes jako body X_o odpovídající vrcholům trojúhelníku ABC .

Nyní se podívejme, jak se pohybují body X_a , X_b , X_c , které nepatří vnitřku trojúhelníku ABC . Výsledek ukazuje obrázek 14. Je na něm nám již známá elipsa $\mathcal{E}$ a tři hyperboly $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_b$ a $\mathcal{H}_c$. Ale k tomuto výsledku jsme nedospěli hned. Při vlastním zkoumání trajektorií bodů X_a , X_b a X_c čekala na nás „léčka“. Zvolený trojúhelník ABC byl tak velký, že se části zmíněných hyperbol v oblastech $(+ - -)$, $(- + -)$, $(- - +)$ na monitoru vůbec neobjevily. Na základě chybné analogie s obrázkem 9 jsme se proto nejdříve domnívali, že tyto množiny náleží jen oblastem $(- + +)$, $(+ - +)$ a $(+ + -)$, a že to budou elipsy. Naši chybu jsme zjistili při dalších pokusech. Při zmenšení trojúhelníku ABC jsme objevili, že každý z bodů X_a , X_b a X_c se pohybuje po dvojdílné křivce, nejspíše po hyperbole. Ale čekala nás ještě jedna „léčka“. Zdálo se nám, že přímky BC , CA , AB budou tvořit asymptoty hyperbol $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_b$ a $\mathcal{H}_c$. Tuto chybu odhalilo další zmenšování trojúhelníku ABC .



Obr. 14

Také zde potěší, natáhneme-li tahem myši pružinu bodu X a obrázek tím „rozpohybujeme“. Bod X_o bude obíhat po elipse $\mathcal{E}$ a při každém průchodu bodem dotyku elipsy se stranami trojúhelníku se v tomto bodě setká s bodem pohybujícím se po připsané hyperbole. Při troše fantazie nám to může připomenout simulaci pohybu planet, kterou můžeme sledovat v planetáriích.

Samozřejmě se nabízí nová domněnka, že pro šedě vyznačené oblasti na obrázku 14 bude platit obdobná vlastnost jako pro oblasti vyznačené na obrázku 9. To můžeme ověřit pokusem 4, který je obdobou pokusu 3.

Pokus 4

Zvolte trojúhelník ABC a vyznačte libovolný bod X' v jeho rovině. Určete čísla a, b, c jako druhé odmocniny vzdáleností bodu X' po řadě od přímk BC, CA a AB , tj.

$$a = \sqrt{|X'; BC|}, \quad b = \sqrt{|X'; CA|}, \quad c = \sqrt{|X'; AB|} \quad (5)$$

Sestrojte Apolloniův svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$. Pohybujte s bodem X' a zkoumejte, kdy bude Apolloniův svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$ eliptický, kdy parabolický a kdy hyperbolický.

Čtenář se může sám přesvědčit, že na základě pokusu 4 můžeme dojít k dalšímu nečekanému výsledku:

Druhý výsledek (druhé překvapení)

Nechť X' je libovolný bod v rovině trojúhelníku ABC různý od jeho vrcholů. Zvolme čísla a, b, c tak, aby platily rovnosti (5). Potom bodům X' , které patří vnitřku šedě vyznačených oblastí na obr. 14 odpovídá eliptický svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$, bodům na hranici těchto oblastí odpovídá parabolický svazek a bodům uvnitř bílých oblastí hyperbolický svazek.

Třetí překvapení

Východiskem pokusů 1 a 3 byl bod X , který se pohyboval po kružnici opsané danému trojúhelníku ABC a jeho měnící se vzdálenosti od vrcholů tohoto trojúhelníku. Při prvním pokusu jsme zkoumali po jakých drahách se přitom pohybují body X_o, X_a, X_b, X_c , které mají od přímk BC, CA, AB poměr vzdáleností

$$a : b : c = |AX| : |BX| : |CX|. \quad (6)$$

Při druhém pokusu jsme pro pohyb bodů X_o, X_a, X_b, X_c místo rovnosti (6) použili rovnosti

$$a : b : c = |AX|^2 : |BX|^2 : |CX|^2. \quad (7)$$

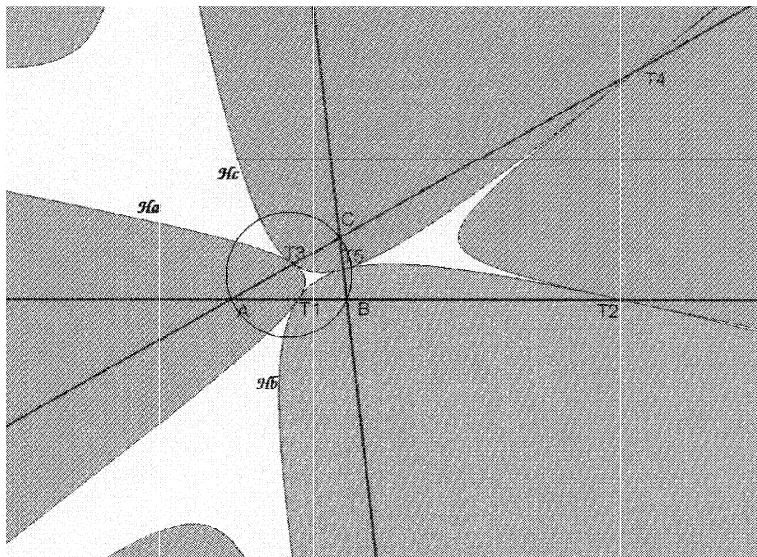
Může nás napadnout přirozená otázka, co když při pohybu bodů X_o, X_a, X_b, X_c nahradíme rovnost (7) rovností

$$a : b : c = \sqrt{|AX|} : \sqrt{|BX|} : \sqrt{|CX|}. \quad (8)$$

Pokus 5

Zvolíme opět trojúhelník ABC a na kružnici k jemu opsané pohyblivý bod X . Pak budeme zkoumat dráhy všech bodů, které mají od přímek BC, CA, AB po řadě poměr vzdáleností (8).

Výsledek pokusu je snad ještě zajímavější než v předešlých případech. Podívejme se na obrázek 15.



Obr. 15

Dráhami bodů X_o, X_a, X_b, X_c jsou strany čtyř křivočarých „trojúhelníků“, jejichž sjednocením jsou tři hyperboly $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$ a $\mathcal{H}_c$. Každé dvě z těchto tří hyperbol mají právě dva společné body dotyku.

- Společné body dotyku hyperbol $\mathcal{H}_a$ a $\mathcal{H}_b$ jsou body T_1 a T_2 . Můžete se sami přesvědčit, že oba leží na přímce AB (ta však na našem obrázku není nakreslena).
- Společné body dotyku hyperbol $\mathcal{H}_a$ a $\mathcal{H}_c$ jsou body T_3 a T_4 , které leží na přímce AC .
- Společné body dotyku hyperbol $\mathcal{H}_b$ a $\mathcal{H}_c$ jsou body T_5 a T_6 , které leží na přímce BC . Bod T_6 je však na obrázku 13 nepřístupný.

Na obrázku 15 vidíme dva křivočaré trojúhelníky $T_1T_3T_5$ a $T_2T_4T_5$, po kterých se pohybují body X_o a X_a . Další dva křivočaré trojúhelníky $T_2T_3T_6$ a $T_1T_4T_6$ na obrázku 15 vidíme jen částečně. Ale není to jen tím, že bod T_6 je nepřístupný. Tyto trojúhelníky jsou „nevlastní přímkou“ (což je množina všech bodů, které leží v „nekonečnu“) rozděleny na obrázku 15 na dvě části. Například „křivočarý“ trojúhelník $T_3T_6T_2$ se skládá z bílé plochy „vlevo“ od bodu T_3 a bílé plochy „vpravo“ od bodu T_2 (tu však na obrázku 15 spíše tušíme než vidíme). Podobně je to s křivočarým trojúhelníkem $T_1T_6T_4$.

Čtenářům můžeme opět doporučit rozpohybovat obrázek 15 tím, že uvedeme bod X natažením pera do pohybu po kružnici k . Rozhodně to stojí zato.

Co bude následovat? Samozřejmě obdoba pokusů 2 a 4.

Pokus 6

Vyjdeme z obrázku 1, v němž jsou vyznačeny hyperboly $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b, \mathcal{H}_c$. Pak pokračujeme. Zvolíme v rovině trojúhelníku ABC bod X , který je různý od vrcholů A, B, C a určíme čísla a, b, c tak, aby platilo

$$a = |X'; BC|^2, \quad b = |X'; CA|^2, \quad c = |X'; AB|^2 \quad (9)$$

Potom sestrojíme Apolloniův svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$.

Vlastní pokus spočívá v tom, že budeme pohybovat bodem X a budeme opět sledovat, kdy je Apolloniův svazek kružnic eliptický, kdy parabolický a kdy hyperbolický.

A výsledek bude tentokrát již asi podle očekávání. Rozdíl oproti výsledkům popsáním ve výsledcích 1 a 2 je v tom, že nyní na obrázku 15 odpovídají eliptickým svazkům bílé a nikoliv šedé plochy. Dostáváme:

Třetí výsledek (třetí překvapení)

Nechť X' je libovolný bod v rovině trojúhelníku ABC různý od jeho vrcholů. Zvolme čísla a, b, c tak, aby platily rovnosti (9). Potom bodům

X' , které patří vnitřku bílých oblastí na obr. 15 odpovídá eliptický svazek kružnic $\mathcal{A}(A, B, C, a, b, c)$, bodům na hranici těchto oblastí odpovídá parabolický svazek a bodům uvnitř šedých oblastí hyperbolický svazek.

Co je ještě před námi

Pomocí Cabri-geometrie jsme dospěli ke třem překvapivým pohledům na řešení úlohy o třech Apolloniových kružnicích. Doufáme, že vám naše příspěvky přinesli nejen nové pohledy do méně známých a neznámých koutů geometrie, ale i radost z cesty, kterou jsme si zvolili. Přesto vám zůstáváme něco dlužní. Jsou to odpovědi na následující otázky:

- Výsledky 1 až 3 jsou nepochybně zajímavé výsledky, ale bez jejich důkazu zůstávají jen pouhými domněnkami. Otázka tedy zní: Jak můžeme tyto výsledky dokázat?
- Ve výsledcích 2 a 3 se hovoří o elipsách a hyperbolách, které jsou klíčem k řešení. Otevřenou však zůstala otázka: Jak můžeme tyto kuželosečky sestrojit jinak, než jako množiny bodů?

Na tyto otázky se soustředíme ve čtvrté části našeho příspěvku.

Poznámka

Autoři připravují elektronickou verzi příspěvku, ve které budou nej-důležitější obrázky překresleny pomocí programu Cabri Java. To umožní čtenářům nejen sledovat výklad, ale provádět vlastní experimenty na mobilních obrázcích.

Literatura

- [1] Koman, M. – Fritsch, R.: Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie. Část 2 (O trojúhelníku a třech Apolloniových kružnicích). Matematika – fyzika – informatika, roč. 14, č. 2, s. 65–77.
- [2] Koman, M. – Fritsch, R.: Posviťme si s Cabri do méně známých a neznámých zákoutí geometrie. Část 1 (Co víme a co nevíme o Apolloniově kružnici). Matematika – fyzika – informatika, roč. 13, č. 9, s. 513–525.
- [3] Fritsch R.: – Koman, M.: Von Apollonios aus dynamisch Mathematik entdecken Leuchten wir mit Cabri in wenig bekannte und unbekannte stille Winkel der Geometrie. In: Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste, Band 25, München, 2004, SAWK, Forschungsbeiträge der Naturwissenschaften Klasse. (V tisku.)

Práce byla zpracována za podpory výzkumného záměru VZ-J13/98:114100004

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 117 a 118, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (14.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 117

Nechť n je přirozené číslo větší než 2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3) \cdot (a_2 + a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_n + a_1 + a_2)}{(a_1 + a_2) \cdot (a_2 + a_3) \cdot \dots \cdot (a_n + a_1)} > \left(\sqrt{2}\right)^n.$$

Lev Kurlyandchik (Sankt-Peterburg)

Řešení:

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí

$$(a_1 + a_2 + a_3) = \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) + \left(\frac{1}{2}a_2 + a_3\right) \geq 2\sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_2 + a_3\right)}.$$

Obdobným způsobem můžeme odhadnout všechny činitele následujícího součinu a dostaneme

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (a_2 + a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_n + a_1 + a_2) &\geq \\ &\geq 2^n \sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_2 + a_3\right)} \cdot \sqrt{\left(a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_3 + a_4\right)} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \sqrt{\left(a_n + \frac{1}{2}a_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)}. \end{aligned}$$

Záměnou pořadí činitelů v součinu na pravé straně poslední nerovnosti máme

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_2 + a_3\right)} \cdot \sqrt{\left(a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_3 + a_4\right)} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \sqrt{\left(a_n + \frac{1}{2}a_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)} = \\ &= \sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)} \cdot \sqrt{\left(a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_2 + a_3\right)} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \sqrt{\left(a_n + \frac{1}{2}a_1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a_n + a_1\right)}. \end{aligned}$$

Dále z rovnosti

$$(a_1 + \tfrac{1}{2}a_2) \cdot (\tfrac{1}{2}a_1 + a_2) = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)^2 + \tfrac{1}{4}a_1a_2$$

a z podmínek úlohy plyne

$$(a_1 + \tfrac{1}{2}a_2) \cdot (\tfrac{1}{2}a_1 + a_2) > \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)^2.$$

Obdobně odhadneme zbývající členy součinu na pravé straně uvažované nerovnosti a dostaneme

$$\begin{aligned} 2^n \sqrt{(a_1 + \tfrac{1}{2}a_2) \cdot (\tfrac{1}{2}a_1 + a_2)} \cdot \sqrt{(a_2 + \tfrac{1}{2}a_3) \cdot (\tfrac{1}{2}a_2 + a_3)} \cdot \dots \\ \dots \cdot \sqrt{(a_n + \tfrac{1}{2}a_1) \cdot (\tfrac{1}{2}a_n + a_1)} > \\ > 2^n \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)^2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_2 + a_3)^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}(a_n + a_1)^2} = \\ = (\sqrt{2})^n \cdot (a_1 + a_2) \cdot (a_2 + a_3) \cdot \dots \cdot (a_n + a_1), \end{aligned}$$

Spojením obou nerovností dostaneme po snadné úpravě žádanou nerovnost.

Redakce neobdržela žádné správné řešení této úlohy.

Úloha 118

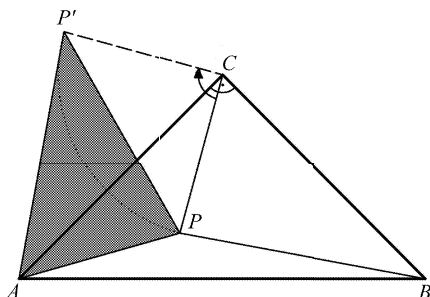
Nechť P je libovolný vnitřní bod pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB . Dokažte, že z úseček délky $|AP|$, $|BP|$ a $|CP|\sqrt{2}$ lze sestavit trojúhelník.

Jaroslav Švrček

Řešení (podle Zuzany Safernové):

Obraz bodu P v otočení R se středem C o orientovaný úhel BCA označme P' . Platí přitom $|CP'| = |CP|$. Protože bod P je vnitřním bodem trojúhelníku ABC , jsou body A , P , P' jsou vrcholy trojúhelníku. Trojúhelník CPP' je pravoúhlý rovnoramenný se základnou PP' , proto $|PP'| = |CP|\sqrt{2}$. Ze zadání plyne, že obrazem bodu A v otočení R je bod B , platí tedy $|AP'| = |BP|$.

Jelikož strany trojúhelníku $P'PA$ mají velikosti $|AP|$, $|BP|$ a $|CP|\sqrt{2}$, je tvrzení úlohy dokázáno.



Poznámka:

Úlohu bylo možno řešit analyticky a ukázat, že délky $|AP|$, $|BP|$ a $|CP|\sqrt{2}$ splňují trojúhelníkové nerovnosti.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan a *Zuzana Safernová* z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslal: *Jiří Steckbauer* z Květné.

41. ročník MO ve Velké Británii

Ve školním roce 2004/05 se uskutečnil 41. ročník britské matematické olympiády (BMO). Na ukázkou uvádíme dvě (ze čtyř) úloh závěrečného kola této soutěže, které se uskutečnilo 1. února 2005.

1. V trojúhelníku ABC je velikost vnitřního úhlu při vrcholu A rovna 120° . Osy vnitřních úhlů při vrcholech A, B a C protínají protilehlé strany po řadě v bodech D, E a F . Dokažte, že kružnice o průměru EF prochází bodem D .
2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$