

Shodná a podobná zobrazení v prostoru

JOSEF SROVNAL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Shodná a podobná zobrazení v rovině jsou poměrně dobře a ve vhodném rozsahu zpracovaná témata středoškolského učiva planimetrie. V učebnicích, ve sbírkách úloh i v některé speciální literatuře ([1], [3], [4], [5], [6]) najdeme také vhodné úlohy, které rozšiřují a prohlubují tuto tematiku.

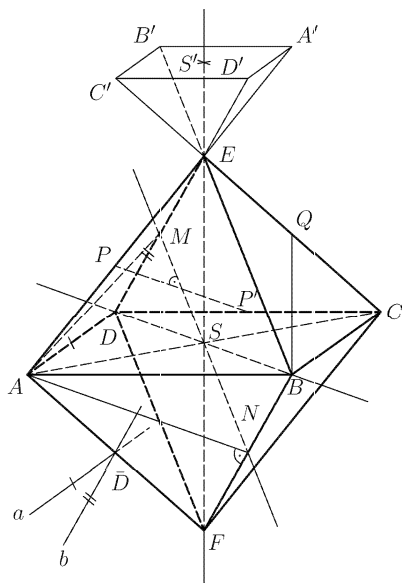
Poněkud jiná je však situace ve stereometrii, kde je shodným a podobným zobrazením věnována spíše okrajová pozornost. Úvahy se pohybují většinou v teoretické rovině a ojediněle jsou ilustrovány většinou triviálními příklady. Tento stav přirozeně vyplývá z problému, jak zobrazovat řešení prostorových úloh na dvojrozměrné nákresně, když znalosti žáků v oboru deskriptivní geometrie jsou minimální nebo dokonce žádné. Nezbývá proto nic jiného, než využít předchozích zkušeností žáků, které získali při studiu stereometrie ([2], [7], [8], [9]) a k zobrazování prostorových útvarů i k řešení úloh o nich použít opět osvědčené volné rovnoběžné promítání. Přináší to však s sebou určité těžkosti plynoucí z toho, že toto zobrazení není vzájemně jednoznačné, že v něm obtížněji a v omezenější míře můžeme řešit metrické úlohy, že musíme někdy dodatečně určovat podmínky pro polohu a tvar zobrazovaných útvarů atd. Přes všechny tyto obtíže však můžeme najít určité východisko, spočívající ve vhodné volbě úloh, vhodné poloze výchozích útvarů a v přiměřené obtížnosti a náročnosti postupů při řešení. Pokusíme se to ukázat na některých příkladech.

Úloha 1

Je dán pravidelný osmistěn $ABCDEFGF$ a středy M, N, P, Q jeho hran DE, BF, AE, CE v tomto pořadí. Sestrojte

- obrazy přímek BE, EF v rovinové souměrnosti určené rovinou $\sigma = AMN$;
- obrazy rovin $\rho = ADE$ a $\sigma = AMN$ ve středové souměrnosti určené středem S osmistěnu;
- obraz bodu P v osové souměrnosti určené osou MN ;
- obraz poloroviny BCF v otočení kolem osy EF , převádí-li toto otočení bod D do bodu A ;
- obrazy různoběžek AD, DE v posunutí určeném orientovanou úsečkou QB ;
- obraz jehlanu $ABCDE$ ve stejnolehlosti o střed E a koeficientu $-\frac{1}{2}$.

Řešení: (viz obr. 1)



Obr. 1

- a) Obrazem bodu B v souměrnosti podle roviny σ je bod F , neboť $|BN| = |NF|$ (N je střed hrany BF) a $BF \perp \sigma$, protože v rovině σ existují dvě různoběžky MN , AN , z nichž každá je kolmá k přímce BF (to plyne ze skutečnosti, že přímka MN je střední příčka čtverce $BFDE$ a AN je výška v rovnostranném trojúhelníku ABF). Analogicky zdůvodníme, že obrazem bodu E je bod D . Proto obrazem přímky BE je přímka DF .

Vzhledem k tomu, že rovinová souměrnost je involutorní zobrazení, je obrazem bodu F bod B , a proto s přihlédnutím k předchozímu je obrazem přímky EF přímka BD .

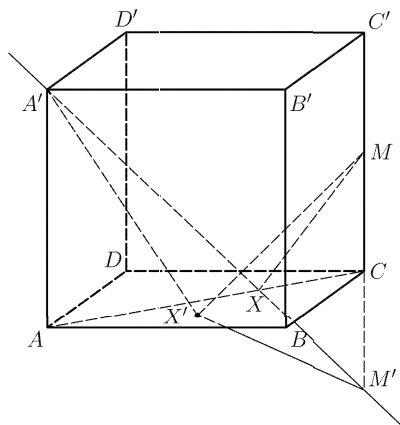
- b) Ze souměrnosti pravidelného osmistěnu podle jeho středu S snadno určíme obrazy bodů A , D , E , M , N . Platí $A \rightarrow C$, $D \rightarrow B$, $E \rightarrow F$, $M \rightarrow N$, $N \rightarrow M$. Proto se rovina $\rho = ADE$ zobrazí na rovinu BCF a rovina $\sigma = AMN$ sama na sebe (je samodružná, neboť v ní leží střed S středové souměrnosti).
- c) Osová souměrnost zachovává incidenci bodů a přímek. Vzhledem k tomu, že $P \in AE$, bude obraz P' bodu P ležet na obrazu přímky AE . Obrazem bodu A v osově souměrnosti o ose MN je bod C , (neboť platí $AC \perp MN$, $MN \subset BDE$, $AC \cap MN = S$, $|AS| = |CS|$) a obrazem bodu E je bod D (viz bod a) řešení této úlohy). Je tedy obrazem přímky AE přímka CD . Protože osová souměrnost je shodné zobrazení, zobrazuje se střed úsečky na střed obrazu této úsečky. Proto obrazem bodu P je střed P' hrany CD .
- d) Otočení kolem osy EF , které převádí bod D do bodu A , zobrazuje bod B na bod C a bod C na bod D . Bod F leží na ose otočení, a je tudíž samodružný. Obrazem poloroviny BCF je tedy polorovina CDF .
- e) V posunutí určeném orientovanou úsečkou QB určíme nejprve obraz bodu D . Protože QB je výška v rovnostranném trojúhelníku BCE kolmá na stranu EC , plyne z rovnoběžnosti $EC \parallel AF$ kolmost všech přímek směru posunutí k AF . Speciálně přímka směru posunutí procházející bodem D leží v rovině ADF rovnoběžné s rovinou BCE a protíná proto hranu AF v jejím středu $\overline{D}$. Protože je dále $|D\overline{D}| = |QB|$, $D\overline{D} \parallel QB$ a orientace úseček QB a $D\overline{D}$ je souhlasná, je $\overline{D}$ hledaným obrazem bodu D . Různoběžky AD , DE se tedy zobrazují na přímky a , b procházející bodem $\overline{D}$ tak, že $a \parallel AD$, $b \parallel DE$.

- f) Vrchol E jehlanu $ABCDE$ je samodružný (střed stejnolehlosti) a obrazy vrcholů podstavy leží na prodloužených hranách tak, že např. $A' \in AE$, $|A'E| = \frac{1}{2}|AE|$ a A' není bodem úsečky AE . Podobně to platí pro obrazy B', C', D' bodů B, C, D . Obrazem jehlanu $ABCDE$ je jehlan $A'B'C'D'E$, jehož podstava je na obr. 1 viditelná, kdežto hrana $B'E$ viditelná není.

Řešení předcházející úlohy je vhodné pro zopakování základních vlastností shodných a podobných zobrazení v prostoru. Obsah odpovídá zhruba středoškolské náplni učiva tohoto tématu. Lze však řešit také úlohy náročnější i s jejich zobrazováním ve volném rovnoběžném promítání, jak ukážeme dále.

Úloha 2

Bod M je středem hrany CC' krychle $ABCD A'B'C'D'$. Určete nejkratší lomenou čáru $A'XM$, leží-li bod X v rovině ABC .



Obr. 2

Řešení: Sestrojíme bod M' souměrný k bodu M podle roviny ABC (obr. 2) a určíme průsečík X přímky $A'M'$ s rovinou ABC . Z vlastností souměrnosti podle roviny plyne pro každý bod X' roviny ABC rovnost $|X'M| = |X'M'|$. Je-li $X' \neq X$, platí

$$\begin{aligned} |A'X'| + |X'M| &= |A'X'| + |X'M'| > |A'M'| = |A'X| + |XM'| = \\ &= |A'X| + |XM|. \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že pro každý bod X' roviny ABC , který je různý od bodu X , je splněna nerovnost

$$|A'X'| + |X'M| > |A'X| + |XM|.$$

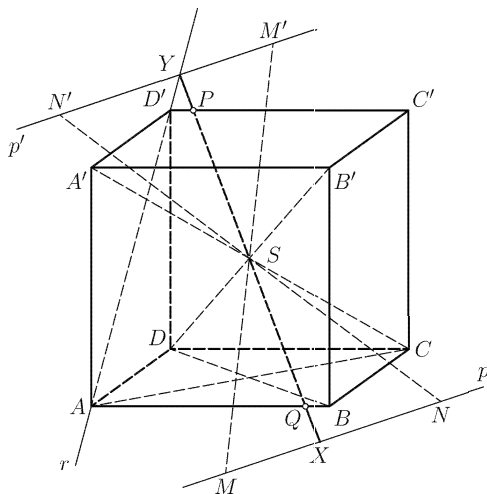
Je tedy bod X řešením úlohy. K důkazu jsme užili trojúhelníkovou nerovnost aplikovanou na trojúhelník $A'X'M'$.

Poznámka 1. Ke stejnému výsledku dospějeme, sestrojíme-li bod A'' souměrný k bodu A' podle roviny ABC a pak užijeme předchozího postupu řešení (na obr. 2 to zobrazeno není).

Poznámka 2. Ve školské praxi je vhodné před řešením této úlohy připomenout její planimetrickou analogii řešenou užitím osové souměrnosti.

Úloha 3

Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ se středem S a přímka p ležící v rovině $\rho = A'BC'$. Sestrojte úsečku XY tak, aby bod X ležel na přímce p , bod Y v rovině $\sigma = ADD'$ a bod S byl jejím středem.



Obr. 3

Řešení: Užijeme středové souměrnosti určené středem S (obr. 3), v níž sestrojíme obraz p' přímky p (na přímce p zvolíme dva různé body M, N

a sestrojíme k nim středově souměrné body M', N' ; potom $p' = M'N'$). Vzhledem k tomu, že středová souměrnost zachovává incidenci bodů, přímek a rovin, bude přímka p' ležet v rovině $\rho' = ACD'$, která je obrazem roviny ρ ve středové souměrnosti se středem S (rovinu ρ' určíme pomocí obrazů bodů $C' \rightarrow A, A' \rightarrow C, B \rightarrow D'$). Sestrojíme-li nyní průsečík $Y = p' \cap \sigma$, pak vzorem bodu $Y \in p'$ je bod $X \in p$, souměrný k bodu Y podle středu S . Je tedy $X = YS \cap p$ a z vlastností středové souměrnosti plyne, že takto sestavená úsečka XY je řešením naší úlohy. Průsečík Y leží na průsečnici r rovin ρ', σ ($r = \rho' \cap \sigma = AD'$; $p' \cap r = Y$).

Zbývá ještě určit viditelnost úsečky XY vzhledem ke krychli $ABCD A'B'C'D'$. O viditelnosti rozhodují průsečíky P, Q přímky XY s hranicí krychle. Vzhledem k tomu, že přímka XY leží v rovině ABC' (neboť $r \subset ABC'$ a současně platí $Y \in r, S \in ABC', S \in XY$), platí $P = C'D' \cap XY$ a $Q = AB \cap XY$. Tím je viditelnost určena.

Poznámka 3. Středové souměrnosti užíváme k řešení úloh, v nichž je třeba umístit („vzpříčit“) úsečku mezi dva útvary tak, že krajní body této úsečky patří daným útvarům a střed úsečky splývá s daným bodem (v němž volíme při řešení střed středové souměrnosti).

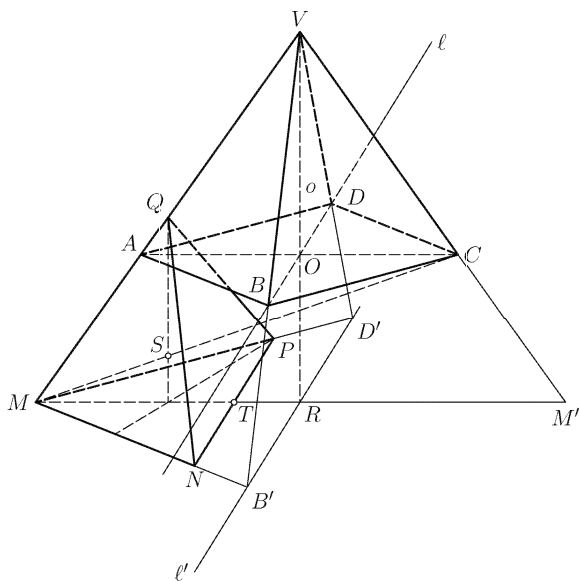
Úloha 4

Je dán pravidelný čtyřstěn $MNPQ$ se středem S . V klínu určeném rovinami MNQ, MPQ s vnitřním bodem S sestrojte kolmý čtyřboký jehlan $ABCDV$ s kosočtvercovou podstavou $ABCD$ v rovině rovnoběžné s rovinou stěny MNP , leží-li stěna ABV v rovině MNQ , stěna ADV v rovině MPQ a vrchol C v rovině MNS . Hlavní vrchol V jehlanu má od bodu Q vzdálenost rovnou délce hrany čtyřstěnu.

Řešení: Leží-li stěny ABV a ADV po řadě v rovinách MNQ, MPQ , leží boční hrana AV jehlanu na průsečnici těchto rovin, tj. na přímce MQ . Protože $|QV| = |MQ|$, může být buď $V = M$, nebo $V \neq M$.

Předpokládejme nejprve, že $V \neq M, V \in MQ$. Osa o jehlanu prochází bodem V a je rovnoběžná s přímkou QS , která je kolmá k rovině MNP , tedy i k rovině podstavy jehlanu, která je s rovinou MNP rovnoběžná. Označme $R = o \cap MNP = o \cap MT$, kde T je střed hrany NP (přímka MT je pravoúhlým průmětem přímky MQ do roviny MNP). Protože jehlan $ABCDV$ je souměrný podle osy o , užijeme ke konstrukci hrany CV osové souměrnosti: K přímce MV sestrojíme přímku souměrnou podle osy o tak, že k bodu M určíme jeho obraz M' ($M' \in MR, |MR| = |M'R|$). Potom je

přímka $M'V$ obrazem přímky MV (bod $V \in o$ je samodružný). Na přímce VM' určíme vrchol C , jako průsečík přímky $M'V$ s rovinou MNS . Rovina MNS protíná rovinu osového řezu jehlanu obsahující přímky MV , $M'V$ v přímce MS , proto $C = M'V \cap MS$. V osové souměrnosti určené osou o nyní sestrojíme obraz A bodu C tak, že bodem C vedeme rovnoběžku s přímkou MM' , která protíná osu o v bodě O (středu podstavy jehlanu) a přímkou MV ve vrcholu A . Zbývá ještě sestrojit vrcholy podstavy B, D , které jsou rovněž souměrné podle osy o a leží na přímce l kolmé k AC procházející bodem O a rovnoběžné s rovinou MNP (úhlopříčky kosočtverce). Ze vztahů $MT \perp NP$, $MT \parallel AC$ plyne $AC \perp NP$. Sestrojíme proto přímku $l \parallel NP$, $O \in l$ a pak je též $l \perp AC$. Body B, D na přímce l určíme z podmínky, že leží v rovinách MNQ a MPQ : Bodem R vedeme přímku $l' \parallel l$ a na ní určíme body $B' = MN \cap l'$, $D' = MP \cap l'$ (stačí sestrojit jeden z těchto bodů a pak užít osové souměrnosti). Potom je $B = l \cap B'V$, $D = l \cap D'V$. Konstrukci jehlanu $ABCDV$ ukončíme sestrojením podstavních i bočních hran s přihlédnutím k viditelnosti.



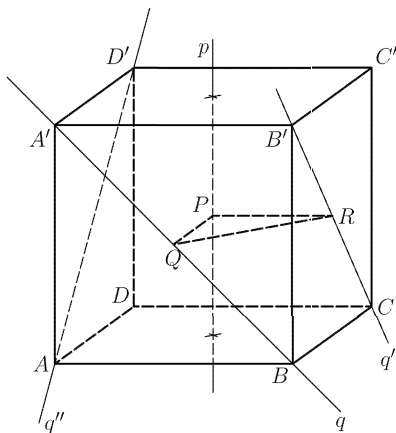
Obr. 4

Nastane-li pro polohu bodu V na přímce MQ případ $V = M$, pak nelze jehlan $ABCDV$ sestrojit, neboť v tomto případě je $V = M = C$ a úloha nemá řešení.

Úloha 5

Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$, přímky p, q a rovina ρ . V rovině kolmé k přímce p sestrojte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník PQR s pravým úhlem při vrcholu P tak, aby $P \in p, Q \in q$ a $R \in \rho$. Přímku p volte jako spojnici středů stěn $ABCD, A'B'C'D'$; $q = A'B$ a $\rho = ABC'$.

Řešení: Je-li PQR trojúhelník požadovaných vlastností (obr. 5) pak otočení kolem přímky p o $+90^\circ$ (nebo o -90°) zobrazí vrchol Q na vrchol R (nebo obráceně) a vrchol P se zobrazí sám na sebe (leží na ose otočení a je samodružný). Protože $Q \in q$, otočíme s vrcholem Q i přímku q . Její obraz q' musí procházet bodem R (obrazem bodu Q), neboť otočení zachovává incidenci bodů a přímek. Z požadavku $R \in \rho$ pak plyne $R = q' \cap \rho$.



Obr. 5

Obraz q' přímky q , která je mimoběžná s osou otočení, sestrojíme tak, že otočíme dva její různé body, např. A', B . Každý z těchto bodů se při otočení pohybuje po čtvrtkružnici, ležící v rovině otočení, kolmé k ose otočení. Je tedy obrazem bodu A' bod B' a obrazem bodu B bod C .

Přímka q' je pak spojnicí bodů B' , C' . Průsečík $R = q' \cap \rho$ je střed stěny $BCC'B'$. Rovina trojúhelníku PQR je rovinou středního řezu krychle. V ní určíme pomocí inverzního otočení bod Q (tj. otočíme zpět kolem téže osy p v opačném smyslu). Je tedy bod Q střed stěny $ABB'A'$ a bod P střed krychle. Z vlastností otočení kolem osy plyne, že sestrojený trojúhelník je skutečně pravoúhlý a rovnoramenný.

Shora popsaný postup vede jen k jednomu z možných řešení. Další řešení dostaneme stejným postupem, otočíme-li přímku q kolem osy p o 90° v opačném smyslu. V obou případech je počet řešení dán počtem společných bodů otočené přímky q s rovinou ρ . První otočení vedlo k jednomu řešení (jediný společný bod – průsečík přímky q' s rovinou ρ). Druhé otočení v opačném smyslu (při volbě útvarů podle obr. 5) zobrazí přímku q na přímku q'' , která leží v rovině ρ ($A' \rightarrow D'$, $B \rightarrow A$, $q'' = AD' \subset \rho$). Má tedy přímka q'' všechny body společné s rovinou ρ a úloha má nekonečně mnoho řešení (každý bod přímky q'' lze zvolit za vrchol R příslušného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku PQR).

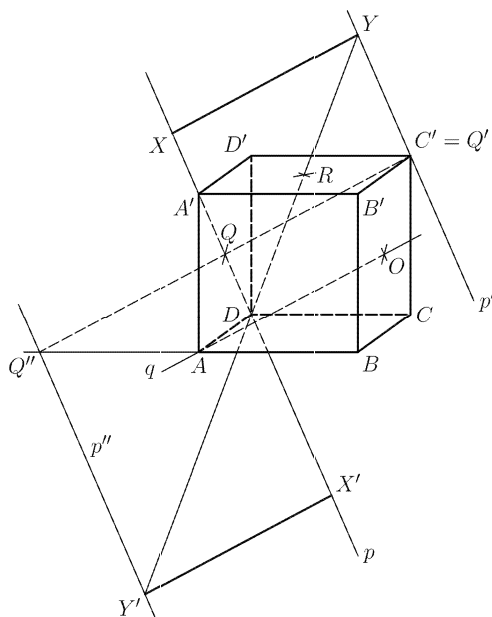
Poznámka 4. Nahradíme-li v obr. 5 rovinu $\rho = ABC$ rovinou $\sigma \parallel \rho$, $\sigma \neq \rho$ a řešíme-li stejnou úlohu, je přímka q'' rovnoběžná s rovinou σ tak, že v ní neleží. Nemá tedy v tomto případě přímka q'' žádný bod společný s rovinou σ a příslušné otočení nevede k žádnému řešení.

Úloha 6

Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$. Sestrojte úsečku XY velikosti $|XY| = d$ tak, že $X \in p$, $Y \in \rho$ a přímka XY je rovnoběžná s přímkou q . Volte $p = A'D$, $\rho = BDD'$, $q = AO$, $d = |AO|$, kde O je střed stěny $BCC'B'$.

Řešení: Sestrojíme obraz p' přímky p v posunutí určeném orientovanou úsečkou AO a obraz p'' přímky p v opačném posunutí určeném orientovanou úsečkou OA (obr. 6). Určíme dále průsečíky $p' \cap \rho = Y$ a $p'' \cap \rho = Y'$. Přímky směru posunutí vedené body Y a Y' protínají přímku p v bodech X , X' . Řešením úlohy jsou úsečky XY , $X'Y'$.

Ke konstrukci obrazů p' , p'' přímky p v obou posunutích, lze použít např. bodu $Q \in p$, který je středem úsečky $A'D$; jeho obrazy v uvažovaných posunutích jsou body $Q' = C'$ a $Q'' \in AB$ tak, že $|AQ''| = |AB|$, $Q'' \neq B$. Potom je $Q' \in p'$, $p' \parallel p$ a $Q'' \in p''$, $p'' \parallel p$. Přímky p , p' , p'' leží v téže rovině σ , jejíž průsečnice s rovinou ρ je přímka RD , kde R je střed stěny $A'B'C'D'$; $RD \cap p' = Y$, $RD \cap p'' = Y'$.

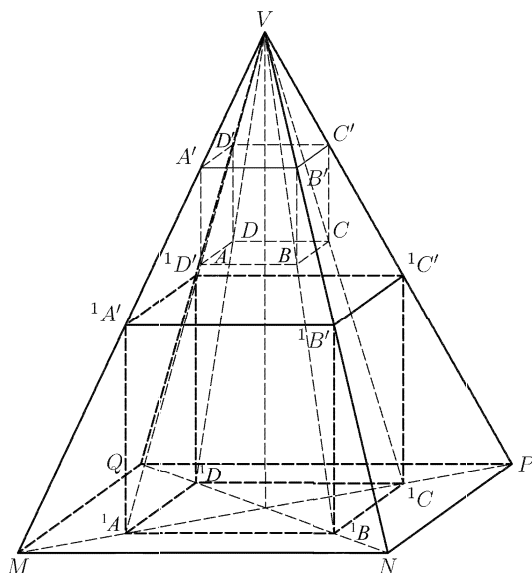


Obr. 6

Úloha 7

Do daného pravidelného čtyřbokého jehlan $MNPQV$ vepište krychli tak, že jedna její stěna leží v rovině podstavy a vrcholy protilehlé stěny na jeho bočních hranách.

Řešení: K řešení úlohy použijeme stejnolehlosti v prostoru (viz obr. 7). Daný jehlan protneme vhodnou rovinou ρ rovnoběžnou s rovinou podstavy MNP . Rovina ρ protíná boční hrany jehlanu ve vrcholech čtverce $A'B'C'D'$, který tvoří jednu (horní) stěnu krychle $ABCD A'B'C'D'$. Tuto krychli sestrojíme známým způsobem. Ve vrcholu V jehlanu zvolíme střed stejnolehlosti a k vrcholu A krychle určíme jeho obraz 1A z podmínky, že bod 1A leží v rovině podstavy jehlanu (je tedy ${}^1A = MP \cap AV$). Středem V a dvojicí bodů $A \rightarrow {}^1A$ je již stejnolehlost určena (její koeficient je dán poměrem $|V{}^1A| : |VA|$). Obraz ${}^1A{}^1B{}^1C{}^1D{}^1A'{}^1B'{}^1C'{}^1D'$ krychle $ABCD A'B'C'D'$ v této stejnolehlosti je již řešením úlohy. Viditelnost na obr. 7 je určena z podmínky, že boční stěny jehlanu jsou neprůhledné;



Obr. 7

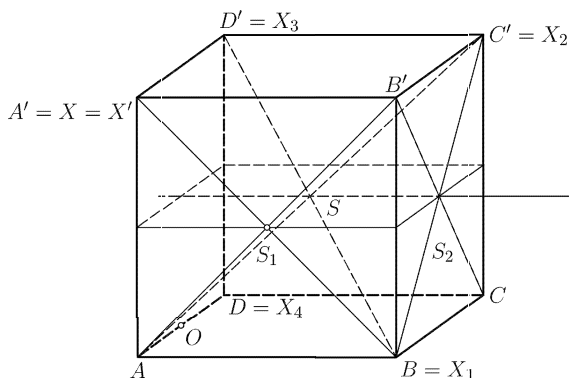
proto u obou krychlí jsou viditelné jen hrany $A'B'$, $B'C'$, ${}^1A'{}^1B'$, ${}^1B'{}^1C'$, ležící ve viditelných bočních stěnách jehlanu.

Součástí tématu shodná a podobná zobrazení v prostoru je také skládání (tj. postupné provádění) těchto zobrazení. Princip je stejný jako v planimetrii, avšak jedním z hlavních problémů zůstává opět grafické zobrazování postupů řešení. Navíc jde o problematiku poměrně obsáhlou, proto se omezujeme ve školské praxi jen na některé vhodné ukázky. Můžeme se přitom opírat i o některé planimetrické analogie (srovnávání skládání osových souměrností v rovině se skládáním rovinových souměrností v prostoru, skládání otočení kolem středu v rovině a skládání otočení kolem osy v prostoru, skládání posunutí v rovině a skládání posunutí v prostoru atd.). Připomeneme také platnost asociativního zákona a neplatnost komutativního zákona pro skládání zobrazení. Následující úloha může sloužit jako ilustrace vhodného postupu.

Úloha 8

V krychli $ABCD A'B'C' D'$ označte O střed hrany AD , S_1 střed stěny $ABB' A'$, S_2 střed stěny $BCC' B'$ a S střed krychle. Je-li Z_1 středová sou-

měrnost se středem S_1 , Z_2 středová souměrnost se středem S_2 , Z_3 posunutí určené orientovanou úsečkou BA , Z_4 souměrnost podle roviny S_1S_2S a Z_5 osová souměrnost určená osou SS_2 , určete zobrazení Z , které vznikne složením Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 a Z_5 v tomto pořadí.



Obr. 8

Řešení: Máme určit zobrazení $Z = Z_5 \circ Z_4 \circ Z_3 \circ Z_2 \circ Z_1$. Pro počáteční představu a lepší orientaci můžeme zvolit v prostoru vhodný bod X a najít jeho obraz $X' = Z(X)$ v zobrazení Z tak, že postupně určíme $X_1 = Z_1(X)$, $X_2 = Z_2(X_1)$, $X_3 = Z_3(X_2)$, $X_4 = Z_4(X_3)$, $X_5 = Z_5(X_4) = X'$. Zvolíme-li např. $X = A'$, dostaneme při postupném zobrazování $X_1 = B$, $X_2 = C'$, $X_3 = D'$, $X_4 = D$, $X_5 = A'$, tj. $X' = A' = X$. To by mohlo vést k domněnce, že zobrazení Z je identitou. Definitivní odpověď však dostaneme až provedeme podrobnější rozbor. Složením $Z_2 \circ Z_1$ dostaneme posunutí Z'_1 určené orientovanou úsečkou $A'C'$ (posunutí ve směru S_1S_2 , jehož velikost je $2|S_1S_2|$). Lze tedy nahradit zobrazení $Z_3 \circ (Z_2 \circ Z_1) = Z_3 \circ Z'_1$ složením dvou posunutí, jehož výsledkem je opět posunutí $T = Z_3 \circ Z'_1$ určené orientovanou úsečkou AD . Výsledné zobrazení Z můžeme nyní zapsat ve tvaru $Z = Z_5 \circ Z_4 \circ T$. Zobrazení T a Z_5 na pravé straně vztahu vyjádříme pomocí rovinových souměrností. Posunutí T složíme ze dvou rovinových souměrností, jejichž roviny jsou kolmé na přímkou směru posunutí a jejichž vzdálenost je rovna polovině velikosti posunutí. Budiž tedy $T = Z''_2 \circ Z''_1$, kde Z''_1 je souměrnost podle roviny ABB' a Z''_2 je souměrnost podle roviny SS_2O . Osovou souměrnost Z_5 složíme ze dvou rovinových souměrností $Z''_2 \circ Z_4$, jejichž roviny jsou k sobě kolmé a procházejí osou SS_2 osové

souměrnosti Z_5 . Pro výsledné zobrazení Z nyní platí

$$\begin{aligned} Z &= Z_5 \circ Z_4 \circ T = (Z_2'' \circ Z_4) \circ Z_4 \circ (Z_2'' \circ Z_1'') = Z_2'' \circ (Z_4 \circ Z_4) \circ (Z_2'' \circ Z_1'') = \\ &= Z_2'' \circ J \circ (Z_2'' \circ Z_1'') = Z_2'' \circ (Z_2'' \circ Z_1'') = (Z_2'' \circ Z_2'') \circ Z_1'' = J \circ Z_1'' = Z_1'' . \end{aligned}$$

K úpravám jsme použili asociativního zákona platného pro skládání zobrazení a přihlédlí jsme k tomu, že složením dvou rovinových souměrností o společné rovině souměrnosti vznikne identické zobrazení J , které je neutrálním prvkem vzhledem k operaci skládání. Proto je výsledné zobrazení $Z = Z_1''$ rovinovou souměrností podle roviny ABB' .

Předchozí rozbor ukázal, že zobrazení Z není identitou. Protože jsme při prvním testování zvolili bod X v rovině souměrnosti ABB' , jejíž všechny body jsou samodružné, splynul vzor X se svým obrazem X' . Při volbě jiného bodu Y , který neleží v rovině ABB' , bude $Z(Y) = Y'$ bod souměrný k bodu Y podle roviny ABB' a různý od bodu Y (to lze např. snadno ověřit, zvolíme-li $Y = S$).

Poznámka 5. Pokud bychom chtěli změnit zadání předchozí úlohy tak, aby výsledné zobrazení bylo identitou, stačilo by např. zvolit rovinovou souměrnost Z_6 určenou rovinou souměrnosti ABB' a vytvořit složené zobrazení

$$Z = Z_6 \circ Z_5 \circ Z_4 \circ Z_3 \circ Z_2 \circ Z_1 .$$

Podle předchozího je pak

$$Z = Z_6 \circ (Z_5 \circ Z_4 \circ Z_3 \circ Z_2 \circ Z_1) = Z_6 \circ Z_6 = J .$$

Shodná a podobná zobrazení v prostoru jsou zajímavým tématem ve stereometrii. Vzhledem k jeho obsáhlosti a relativní obtížnosti nemůžeme toto učivo v rámci středoškolské výuky probrat v celé šíři a v celém rozsahu. Vycházíme-li z textů učebnic, v nichž je tato tematika zpracována, mohou shora uvedené úlohy sloužit jako vhodný doplněk k rozšíření a prohloubení učiva.

L i t e r a t u r a

- [1] *Pomykalová, E.:* Matematika pro gymnázia (Planimetrie). Prometheus, Praha 1995.
- [2] *Pomykalová, E.:* Matematika pro gymnázia (Stereometrie). Prometheus, Praha 1997.

- [3] *Vejsada, F. – Talafous, F.*: Sbírka úloh z matematiky. SPN, Praha 1969.
- [4] *Šedivý, J.*: Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách. Škola mladých matematiků, ÚV MO, Praha 1962.
- [5] *Šedivý, J.*: O podobnosti v geometrii. Škola mladých matematiků, ÚV MO, Praha 1963.
- [6] *Vyšín, J. – Kučerová, J.*: Druhý výlet do moderní matematiky. Škola mladých matematiků, ÚV MO, Praha 1973.
- [7] *Srovnal, J.*: Polohové úlohy ve stereometrii. MFI, roč. 8 (1998/99), č. 6.
- [8] *Srovnal, J.*: Metrické úlohy ve stereometrii. MFI, roč. 11 (2001/02), č. 4.
- [9] *Srovnal, J.*: Povrchy a objemy těles. MFI, roč. 11 (2001/02), č. 10.

56. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z9

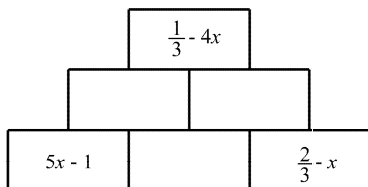
Z9–I–1

Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin všech jejich číslic je 750?

Pavel Thustý

Z9–I–2

Vyplňte správnými výrazy prázdná pole ve sčítací pyramidě na obrázku. Ve správně vyplněné sčítací pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součet výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním.



Světlana Bednářová

Z9–I–3

Do kružnice s poloměrem 2 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Přímky FE a CD se protínají v bodě M . Určete délku úsečky AM .

Marta Volfová

Z9–I–4

Matematické soutěže se zúčastnilo 142 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,9 bodu (zaokrouhleno na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,7 bodu (zaokrouhleno na desetiny). Kolik žáků mohlo odevzdat třetí úlohu? Uděloval se pouze celý počet bodů, za neodevzdanou úlohu bylo 0 bodů.

Libor Šimůnek

Z9–I–5

Trojúhelník REZ s obsahem 84 cm^2 ($|RE| = 14 \text{ cm}$, $|ZE| = 15 \text{ cm}$) jsme dvěma přímnými řezy rozdělili na tři části a z těch jsme složili (bez překrývání) obdélník. Jaké rozměry mohl obdélník mít? Najděte všechny možnosti.

Světлана Bednářová

Z9–I–6

Dokažte, že číslo

$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2004 \cdot 2006)$$

je dělitelné číslem 2007^4 .

Pavel Tlustý

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Z číslic $1, 2, \dots, 9$ jsme vytvořili tři smíšená čísla tvaru $a\frac{b}{c}$, přitom jsme každou číslici použili právě jednou. Pak jsme tato tři čísla správně sečetli. Jaký nejmenší součet jsme mohli dostat?

Světлана Bednářová

Z8–I–2

Král si nechal nalít plnou číši vína. Pětinu vína z ní upil. Pak si nechal číši dolít vodou a upil jednu čtvrtinu obsahu. Opět mu číši dolili vodou a král z ní upil jednu třetinu. Páže mu zase číši dolilo vodou. Kolik procent čistého vína zbylo ve sklenici?

Marie Krejčová

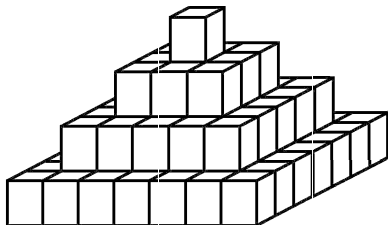
Z8–I–3

Je dán pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají přímky DG a BE .

Michaela Raabová, Marie Krejčová

Z8–I–4

Žáci postavili z malých kostek pyramidu podobnou té na obrázku, měla však více pater. Pyramida, svého druhu největší na světě, stála od té doby na dvoře školy a přšlo na ni. Po čase se musely všechny kostky, na které přšlo, tedy ty na povrchu, vyměnit. Vyměnilo se celkem 2 025 kostek. Kolik měla pyramida pater?



Libor Šimůnek

Z8–I–5

Je dáno čtyřmístné číslo. Přičteme k němu takové čtyřmístné číslo, které je napsáno stejnými číslicemi jako první číslo, ale v opačném pořadí. Kterými čísly je tento součet vždy dělitelný?

Libuše Hozová

Z8–I–6

Výška rovnoramenného trojúhelníku ABC dělí jeho obsah v poměru $1 : 3$. Určete obsah a obvod trojúhelníku ABC , je-li $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.

Libuše Hozová

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Jana narýsovala šestiúhelník. Délky všech jeho stran vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Potom si uvědomila, že každé dvě jeho sousední strany jsou na sebe kolmé. Narýsuj, jako mohl vypadat Janin šestiúhelník, je-li jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm^2 .

Monika Dillingerová

Z7–I–2

Rozděl obdélník na obrázku na co nejmenší počet tvarově stejných částí tak, aby každá z nich obsahovala jen taková čísla, která dávají po dělení třemi navzájem různé zbytky. Pozor, řezat se smí jen po čarách sítě!

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

Světlana Bednářová

Z7–I–3

Urči počet zlomků, jejichž hodnota je celým násobkem tří a čísel i j jmenovatel jsou trojmístná přirozená čísla.

Libor Šimůnek

Z7–I–4

Dědeček nesl do mlýna pytel zrní. Najednou mu začala zrníčka z pytle vypadávat a za dědečkem zůstávala cestička značená jednotlivými zrníčky. Tři ptáčci si toho všimli a začali jednotlivá zrníčka zobat. První zobal zrníčka zelený ptáček, a to tak, že sezobal každé čtvrté zrnko ležící na zemi. Potom přiletěl zobat červený ptáček a sezobl každé páté na zemi ležící zrnko. Nakonec slétl na cestičku modrý ptáček a sezobal každé třetí

na zemi ležící zrníčko. Kolik zrníček dědeček ztratil, jestliže ptáčci sezobali dohromady 79 zrníček?

Monika Dillingerová

Z7–I–5

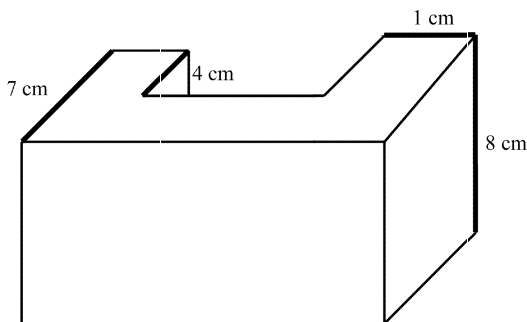
Aspoň trojmístné číslo s navzájem různými číslicemi, jehož žádné tři po sobě jdoucí číslice a, b, c nesplňují žádnou z nerovností $a < b < c$, $a > b > c$, se nazývá *vlnité*. Napiš

- a) největší vlnité číslo, které není dělitelné číslem 3,
- b) největší vlnité číslo dělitelné číslem 150.

Světlana Bednářová

Z7–I–6

Osmiboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikl slepením tří kvádrů. Zjisti objem a povrch tohoto hranolu, pokud víš, že mezi osmi jeho bočními stěnami jsou čtyři dvojice shodných stěn, a znáš délky vyznačených hran (obrázek není přesný, nevyplatí se měřit).



Světlana Bednářová

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 125 a 126, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (15.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 125

Najděte všechny čtveřice navzájem různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze čtyř sčítaných čísel, přičemž příslušné podíly tvoří stejnou čtveřici jako původní čísla.

Jaromír Šimša

Řešení:

Označme a, b, c a d hledaná přirozená čísla a s jejich součet. Nechť platí

$$a > b > c > d. \quad (1)$$

Tedy $\frac{s}{d} > \frac{s}{c} > \frac{s}{b} > \frac{s}{a}$ a podle zadání platí

$$\frac{s}{d} = a, \quad \frac{s}{c} = b, \quad \frac{s}{b} = c, \quad \frac{s}{a} = d.$$

Odtud plyne

$$s = ad = bc. \quad (2)$$

Podle definice součtu s platí

$$s = a + b + c + d. \quad (3)$$

Ze vztahu (1) plyne $b \leq a - 1$, $c \leq b - 1 \leq a - 2$. Odtud, a dále ze vztahů (2) a (3) plyne

$$ad = a + b + c + d \leq 3a - 3 + d.$$

Nerovnost $ad \leq 3a + d - 3$ upravíme na tvar

$$(a - 1)(d - 3) \leq 0.$$

Vzhledem k tomu, že podle (1) $a > 1$ nutně platí $d \in \{1, 2, 3\}$. Dále rozlišíme tři možnosti.

- Pokud $d = 3$, nastává v předcházející nerovnosti rovnost, tedy nutně platí $c = a - 2$ a $b = a - 1$. Ze vztahů (2) a (3) dále plyne

$$(a - 1)(a - 2) = bc = a + b + c + d = 3a,$$

což upravíme na tvar $a^2 - 6a + 3 = 0$. Tato rovnice nemá řešení v oboru přirozených čísel.

- Pokud $d = 2$, plyne ze vztahů (2) a (3)

$$a + b + c + 2 = a + b + c + d = ad = 2a \quad \text{a} \quad bc = ad = 2a,$$

takže z první rovnice máme $a = b + c + 2$. Dosazením do druhé rovnice pak dostaneme

$$bc = 2a = 2(b + c + 2),$$

který upravíme na tvar

$$(b - 2)(c - 2) = 8.$$

Jelikož oba činitele jsou podle (1) přirozená čísla a platí $b - 2 > c - 2$, mohou nastat dva případy.

Platí $b - 2 = 8$ a $c - 2 = 1$. Odtud $b = 10$, $c = 3$, $a = 15$.

Platí $b - 2 = 4$ a $c - 2 = 2$. Odtud $b = 6$, $c = 4$, $a = 12$.

- Pokud $d = 1$, plyne ze vztahů (2) a (3) $a = ad = a + b + c + d = a + b + c + 1$, tedy $b + c + 1 = 0$. Tato rovnice nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Zadání úlohy vyhovují dvě čtveřice navzájem různých přirozených čísel, kterými jsou (15, 10, 3, 2) a (12, 6, 4, 2).

Správné řešení zaslali:

Karol Gajdoš z Trnavy, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Miroslav Hübsch* z Prahy 5, *Jaroslav Hančl*, *Miloslav Holík*, *Cyril Hrubíš*, *Miroslav Klímoš*, *Michael Kučera* a *Jiří Tomala*, všichni z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali:

Anton Hnáth z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Vít Orava* z GMK v Bílovci.

Úloha 126

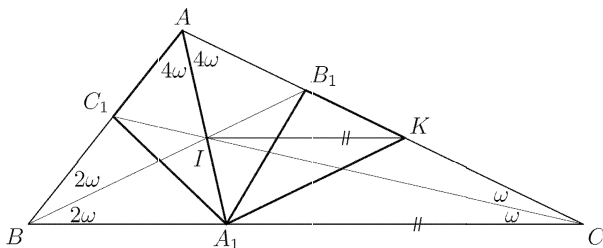
Nechť AA_1 , BB_1 a CC_1 jsou osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . Velikosti jeho vnitřních úhlů po řadě při vrcholech A , B , C jsou v poměru $4 : 2 : 1$. Dokažte, že platí $|A_1B_1| = |A_1C_1|$.

27. turnaj měst, říjen 2005

Řešení:

Nechť velikost vnitřního úhlu při vrcholu C je rovna 2ω , potom velikosti vnitřních úhlů při vrcholech B , C jsou po řadě 4ω , 8ω . Součet vnitřních

úhlů v trojúhelníku je 180° , proto $180^\circ = 14\omega$. Označme I průsečík os úhlů. Bodem I vedme rovnoběžku s přímkou BC a její průsečík se stranou AC označme K .



Dokažme, že trojúhelníky A_1AC_1 a A_1KB_1 jsou shodné.

Platí $|\angle AKI| = |\angle ACB| = 2\omega = |\angle ABI|$ a $|\angle KAI| = |\angle BAI| = 4\omega$, tedy trojúhelníky AIK a AIB jsou podobné, vzhledem k tomu, že mají shodnou stranu AI jsou i shodné, proto platí $|AK| = |AB|$. Podle věty (sus) jsou trojúhelníky BA_1A a KA_1A shodné, tedy $|A_1K| = |A_1B|$. Protože vnitřní úhly trojúhelníku AA_1B u vrcholů A a B mají stejnou velikost 4ω , platí navíc $|A_1B| = |A_1A|$. Odtud plyne, že $|A_1A| = |A_1K|$ a $|\angle A_1KA| = |\angle A_1BA| = |\angle A_1AC_1| = 4\omega$.

V trojúhelníku C_1AC platí $|\angle CC_1A| = 180^\circ - |\angle C_1CA| - |\angle C_1AC| = 14\omega - \omega - 8\omega = 5\omega$. Odtud $|\angle C_1IA| = 180^\circ - |\angle C_1AI| - |\angle AC_1I| = 14\omega - 4\omega - 5\omega = 5\omega$. Trojúhelník C_1IA je tedy rovnoramenný a platí $|AC_1| = |AI|$. V trojúhelníku BB_1A platí $|\angle BB_1A| = 180^\circ - |\angle B_1BA| - |\angle BAB_1| = 14\omega - 2\omega - 8\omega = 4\omega$. Trojúhelník AIB_1 je rovnoramenný a platí $|AI| = |IB_1|$. Z rovnoběžnosti úseček IK a BC plyne $|\angle KIB_1| = |\angle CBB_1| = 2\omega = |\angle B_1CB| = |\angle B_1KI|$. Trojúhelník IB_1K je rovnoramenný a platí $|IB_1| = |KB_1|$. Z těchto úvah plyne $|AC_1| = |AI| = |IB_1| = |KB_1|$.

Protože současně platí $|A_1A| = |A_1K|$, $|\angle A_1AC_1| = |\angle A_1KB_1|$ a $|AC_1| = |KB_1|$, jsou podle věty (sus) trojúhelníky A_1AC_1 a A_1KB_1 shodné a platí $|A_1C_1| = |A_1B_1|$, což jsme měli dokázat.

Správné řešení zaslali:

Anton Hnáth z Moravan, Jaroslav Hančl, Tomáš Jeziorský, Adam Kubetta, Jiří Kunčar a Miroslav Štufka, všichni z GMK v Bílovci.