

MATEMATIKA

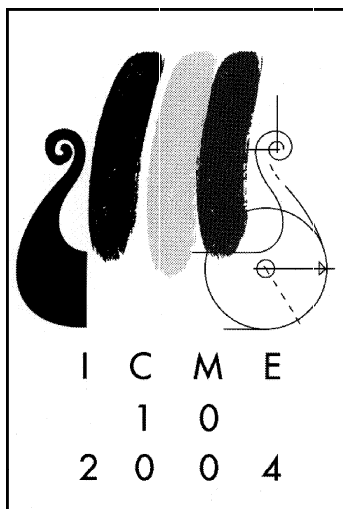
Matematická gramotnost a kongres ICME 10

10th International Congress on Mathematical Education

FRANTIŠEK KUŘINA

Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové

1. Úvod



Připomeňme si úvodem několik myšlenek, které souvisejí se vzděláváním. „Vzdělaný je ten člověk, který hlavní věci pro něho důležité umí vykonat lépe, než by uměl bez vzdělání; „lépe“ znamená pohodlněji, účinněji, hospodárněji, rychleji atd.“ ([1], s. 83). K získání vzdělání je třeba na vhodných materiálech cvičit ve škole určité síly, jako např. „schopnost vnímání, uchovávání, vzbuzování, sdružování, dávání pozorů, chtění, cítění, představování, myšlení atd.“ ([1], s. 83). „Naučit se přemýšlet a své myšlenky přesvědčivě vyjadřovat je skutečnou podstatou vzdělání“ ([2], s. 151). Ke vzdělání patří i „připravenost se zmýlit, ochota neuspět a schopnost soustředit se na vlastní zmatenost v naději, že se dopracuji toho, jak věci objasnit. Z tohoto důvodu je způsob, jak se učební látka zprostředkuje, důležitější než látka sama. Důležité totiž není to, co víte, ale jak jste k tomu přišli“ ([2], s. 152). „Vzdělání v pravém smyslu tohoto slova vždy

souviselo spíše s konáním než s věděním. Na to upozorňovala řada učenců napříč dějinami, od Aristotela („Neboť věci, které se musíme naučit, než je můžeme vykonávat, se naučíme tím, že je vykonáváme“), přes Galilea („Není možné člověka něco naučit, lze mu pouze pomoci objevit znalosti v něm samém“) a A. S. Nevilla („Slyším a zapomenu; vidím a zapamatuji si; konám a rozumím“) k Einsteinovi („Jediným zdrojem znalostí je zkušenost“). Přesto školství tuto moudrost ignorovalo a rozhodlo se, slovy Johna Deweyho, „učit naléváním“ ([3], s. 191). To je podle mého názoru tragédie naší školy. Žák, do něhož řada učitelů „hustí“ učivo, nemůže být aktivní, vzdělání takto koncipované nemůže být úspěšné.

Přitom teoreticky by mohlo existovat východisko velmi prosté. Současná biologie zná pojem *autonomní agent*. Je to každý „systém, který dokáže ve svém prostředí jednat ve vlastním zájmu. Všechny životní buňky a organismy jsou autonomními agenty“ ([4], s. 121). Každý žák každé třídy by snad měl jednat jako autonomní agent, tedy ve vlastním zájmu. Je zájmem každého žáka vnímat dobře probírané učivo, rozvíjet své představy, myslet, . . . ? Nemá snad nakonec pravdu A. N. Whitehead, když píše: „Jde o zcela pomýlenou hloupost, opakovanou všemi učebnicemi i význačnými lidmi, a sice že bychom měli rozvíjet schopnost přemýšlet o tom, co děláme. Pravý opak je pravdou. Civilizace postupuje tím, že se zmnožuje počet operací, které můžeme vykonávat, aniž bychom přemítali o jejich podstatě?“ (Citováno podle [5], s. 73). Není potom systém úloh založený na výběrových odpovědích, který jako učitel matematiky pokládám za zvrácený, lepší průpravou pro život než řešení matematických úloh klasickými prostředky? Ačkoliv se možná v praxi často musíme rozhodovat bez hlubokého myšlenkového rozboru situace, mnohdy ani neznáme k takovému rozboru potřebné údaje, považuji kultivaci myšlení žáků za důležitý cíl matematického vzdělávání, a to přesto, že společenská realita žákova prostředí, úspěšné podvodné kariéry, . . . mohou přivést žáka k přesvědčení, že poctivé studium nemusí být v jeho zájmu. Učitel se může sebevíce namáhat, autonomní žákovský agent ví své. Ve společnosti, která pohrdá mravními zásadami, ve které podvodníci zůstávají nepotrestáni, bohatnou a získávají významná postavení, se stává pozice učitele a jeho ideálů čímsi neskutečným, ne-li směšným. Hlavní motivační síly, zájmy žáků, působí jiným směrem, než zájmy učitelů.

Přitom ovšem musím připomenout, že A. N. Whitehead je autor základních prací o matematické logice a filosofii matematiky, zejména s B. Russelllem publikovaného díla *Principia Mathematica* z roku 1910. Jen velmi nerad jako učitel matematiky musím přiznat, že k negativnímu hodnocení

významu logiky a matematiky dochází např. i světoznámý kanadský vědec, lékař *Hans Selye*, který ve své knize *K záhadám vědy* uvádí: „... v běžném životě i ve vědě má formální logika, zákony myšlení a vědecká metoda jen velmi malý praktický význam ... Říká se, že každý by měl mít slušné znalosti z logiky a matematiky: bez ohledu na to, co člověk dělá, ho přijí tyto vědy naučí myslet. Pochybuji o tom ... logika se nesnaží popsat metody, jimiž věda v praxi postupuje, a nepokouší se odvodit pravidla, která by se dala použít k řízení pokroku vědy. Místo toho volně přeskupuje existující postupy a uspořádává je tak, aby vyhovovaly jejím předpokladům. Řád objevů nahrazuje řádem důkazů.“ ([7], s. 341, 344, 343).

Tento postřeh je patrně správný. Východisko je ovšem, aspoň teoreticky, jasné. Ve vyučování bychom měli, všude kde je to možné, pěstovat „řád objevů“, od samého začátku školní docházky bychom měli ukazovat spíše cestu k poznatkům než soubor hotových výsledků.

Naše učitelské názory jsou patrně plody poněkud idealizovaného pohledu na lidskou společnost, která je koneckonců i společností „biologickou“ a z tohoto hlediska se mohou věci jevit zcela jinak. Např. náš biolog *Stanislav Komárek* píše v esejí „*Biologická nika*“ ([6], s. 115): „Už k získání vzdělání, které umožňuje svému nositeli stát se společensky uznávaným specialistou (a jiné typy vzdělání nemají v dnešní době prakticky žádnou váhu a veřejnou podporu) je nutné mít určitý soubor vlastností, které tento proces ulehčují: kromě dobré paměti a schopnosti učení je to především schopnost se po léta a desetiletí zaměřit jen na velmi malý úsek skutečnosti, čili určitý typ omezenosti ... Kromě určitých požadavků, jako je třeba jisté nevelké kvantum odborných znalostí, patří k nezbytným vlastnostem zcela nepostradatelně i tvrdost spojená s nedostatkem zábran, schopnost obrátů a rychlého odhazování už neužitečných myšlenek i lidí, sebejistota, plynoucí většinou z úzkého horizontu aj. Rovněž důležitá je schopnost adekvátní argumentace, která umožňuje ztotožnit vlastní zájem s nějakým vyšším obecně uznávaným principem. Jak fantazie, tak senzibilita jsou eventuálním pretendentům pouze na školu ... „Originalita v myšlení je obecně podporována jen ve velmi úzkém rámci a ve velmi malých dávkách, které v tom kterém systému neuvádějí nic v pochybnost. V množství jen nepatrně větším se stává prudkou selekční nevýhodou, ženoucí svého nositele do obtíží a nezřídka i do záhuby““ ([6], s. 117). S touto realitou se bohužel tvořívá žáci setkávají ve škole dosti často.

V práci *Blaženství bezúhonnosti* ([6], s. 129) *S. Komárek* zdůrazňuje: „Školní vzdělání, zejména pak jeho nepovinné stupně ... výrazně selektuje

ani ne tak na inteligenci (té je možné i jen určité nezbytné minimum), jako právě na schopnosti sebeovládání. Neprosazovat se ihned a brachiálním násilím, ale pomalu a oklikou. Učit se věcem nepovažovaným za zajímavé, příjemné, a namnoze ani užitečné. Potlačit své mínění a přijmout, alespoň na oko, cizí, v kontextu pokládané za správné. Nedat nadřízeným osobám najevo pochybnosti o jejich kompetenci či jiných hodnotách, byť by takové byly nabíledni. Neklást odpor ani při evidentní újmě, není-li z poměru sil zřetelné, že vítězství je pravděpodobné atd. . . . Školní a v oficiálních strukturách do značené míry i pracovní úspěch nezávisí ani tak na jiných schopnostech, jako právě na schopnostech akceptovat takovouto životní strategii a životní rozvrh.“

Je tento obraz úspěchu ve společnosti správný? Asi je skutečností že „učitel ve své třídě zápasí o ostrůvek poctivosti, klidu, spořádanosti ve světě chaotickém a zmatečném. . . . Mravenec, který celý den pospíchá na sever po zádech slona houpavě směřujícího na jihozápad, je bolestně přesnou paralelou mnoha kvalitních učitelů v málo kvalitní společnosti ([9], s. 35, 33).“

Co zможou tito „mravenci“? Mohou ukázat dětem „správnou cestu“? Obávám se, že žáci se orientují ve společnosti sami, v kolektivech se učí v dobrém i špatném jeden od druhého jako „komplexní adaptivní systémy“ ([10], s. 158). Požadavkům, módám a názorům společnosti se rychle přizpůsobí a na učitele v roli mravenců se příliš neohlíží.

Problém je ovšem v tom, že matematiku musíme učit a musíme ji dobře učit, neboť matematika pomáhá člověku řešit záhady přírody. „*Kdyby matematika, včetně toho, co na ní spočívá, musela náhle z našeho světa zmizet, lidská společnost by se v okamžiku zhroutila. A kdyby se matematika měla zmrazit, takže by nikdy nepostoupila ani o krok kupředu, naše civilizace by začala couvat*“ ([8], s. 39).

Existuje naštěstí celá řada rodičů, pedagogů, psychologů a vychovatelů, kteří usilují upřímně o smysluplnou výchovu a vzdělání dětí, a snad ani nevnímají, že jejich „správné“ cesty na „zbloudilých“ slonech nemohou být vždy příliš úspěšné.

2. Domácí a světová pedagogická scéna

V tomto odstavci se nebudu (a ani nemohu) zabývat problémy školy v celém rozsahu, zejména ne její prací a jejími vzdělávacími výsledky. Připomenu zde pouze dva pohledy ovlivněné pedagogickou aktivitou po roce 2000 u nás a ve světě.

Naše vzdělávání mají v nejbližší budoucnosti ovlivnit ideje formulované v tzv. *Bílé knize* ([11]) a materiálech s ní spojených ([12], [13]).

Považuji za jejich pozitivní rys snahu o „*vyváženost poznatkového základu kurikula, rozvoj kompetencí i osvojování postojů a hodnot*“ ([11], s. 38). Tímto způsobem je možné postupně měnit charakter naší školy jako instituce, v níž žák získává množství formálně naučených poznatků, na školu, která žáka připravuje pro život a další studium. Usilovat o to, aby žák *organizoval a řídil vlastní učení, uplatňoval při řešení problémů logické, matematické a empirické metody a zaujímal odpovědné postoje k otázkám sociálním, kulturním, ekologickým a ekonomickým* (citováno volně podle publikace [11], s. 13, 14, 15) je bezesporu zásadně důležité. Problém je, jak těchto, a mnohých dalších cílů zmiňovaných v citovaných dokumentech, dosahovat. Podle mého názoru spočívá totiž realizace reformy na ne zcela realistických předpokladech tohoto typu: „*Poskytnout příležitosti k rozvinutí všech schopností každému členu společnosti se stalo základním požadavkem společenským, etickým i politickým, a to v celé šíři politického spektra ... Požadují se i určité vlastnosti: individuální iniciativa a převzetí odpovědnosti, samostatnost i týmová spolupráce, schopnost vést a motivovat druhé, interpersonální kompetence i schopnost řešit problémy*“ ([11], s. 16). Vzdělávací soustava se chce sice zaměřit např. na cíle: „*rozvoj lidské individuality, zprostředkování historicky vzniklé kultury společnosti, výchovu k ochraně životního prostředí, podporu demokracie a občanské společnosti, zvyšování konkurenceschopnosti ekonomiky a prosperity společnosti*“ ([11], s. 14), to jsou však spíše zbožná přání než cíle celou společností přijaté, jak o tom svědčí např. Komárkovy postřehy připomenuté v úvodu.

Společnost jako jeden z nejdůležitějších činitelů vzdělávání se v *Bílé knize* podle mého názoru idealizuje a nehodnotí se realisticky. Je zajímavé, že např. ve *Školní didaktice* ([14]) se společnost jako činitel výuky neuvádí vůbec.

Formulaci „*dosáhnout vyšší kvality a funkčnosti vzdělávání tvorbou nových vzdělávacích programů*“ ([11], s. 18) považuji za nebezpečnou, neboť orientuje naši pedagogickou veřejnost na tvorbu dokumentů, které přirozeně vyšší kvalitu vzdělávání zajistit nemohou. Tu může zajistit teprve jejich realizace. Školení, instruktáže, manuály a návody mohou vést k napsání školních vzdělávacích programů, ale vyšší kvalita vzdělání se může dosáhnout jen dlouhodobou praxí školy.

Má-li naše republika zájem o dobré vzdělávání všech svých občanů, nemůže přenechat tak velkou volnost v tvorbě koncepce jednotlivých před-

mětů a rozsahu požadovaných výstupů ve vzdělávání jednotlivým školám. Dodatečně připravené standardy a testování všech žáků se pozdě a se zbytečnými ztrátami snaží napravit „pseudodemokratičnost“ rámcových vzdělávacích programů. Vzdělání se nemůže orientovat jen na perspektivní cíle proklamovaných kompetencí. Má-li škola získat podporu veřejnosti a společenských institucí, musí plnit i cíle kvalifikační, musí pečovat o rozumnou úroveň gramotnosti občanů. Tyto cíle by měly být formulovány ústředně a měly by být i neformálně kontrolovány. Přirozeně by to ovšem znamenalo, již z technických důvodů, aby učivo bylo rozděleno do tříd. Humanisticky orientovaná pedagogika se může ukázat v praxi nehumánní, nepřipraví-li žáky dobře pro studium a pro ostrou konkurenci na trhu práce. K těmto otázkám se vrátím.

Je správné, aby se škola snažila rozvíjet každého žáka podle jeho schopností, je však třeba přiznat, že realitou školy je, že nemůže být každý žák na každé úrovni školního vzdělávání úspěšný.

Souhlasím s tím, že reformou se „*otevřít prostor pro další rozvoj autonomie škol, pro uplatnění jejich potenciálu, pro větší rozvoj tvůrčích schopností učitelů, pro větší flexibilitu vzdělávacího systému i pro vyšší efektivitu vzdělání*“ ([11], s. 38). Obávám se však, že reforma dává i příležitost k snižování úrovně naší vzdělanosti. Může to nastat na těch školách, které nevytvoří dobré předpoklady k neformálnímu rozvíjení kompetencí na dobře organizované práci školy ve všech disciplínách.

Bílá kniha je podkladovým materiálem pro realizaci reformy vzdělávání v České republice. Je podle mého názoru dokladem toho, jak si naše pedagogika ovlivněná řadou zahraničních vzorů představuje budoucnost naší školy.

V dánské Kodani se v roce 2004 konal *10. Mezinárodní kongres o matematickém vzdělávání* (ICME 10), didaktická událost prvořadého významu, kterou pořádá *Mezinárodní komise pro vyučování matematice* (ICMI) v olympijských rocích od roku 1969. V minulosti se tyto kongresy konaly ve Francii, ve Velké Británii, v Německu, v USA, v Austrálii, v Maďarsku, v Kanadě, ve Španělsku a v Japonsku, 11. kongres v roce 2008 bude hostit Mexiko. Cílem této části příspěvku je podat o kongresu ICME 10 stručnou informaci a pokusit se formulovat poučení z tohoto sněmování pro naši didaktiku.

Kongres se uskutečnil ve dnech 5. – 11. 8. 2004 v šesti pracovních dnech a jedním dnem exkurzním v areálu Technické univerzity v Lyngby. Zúčastnilo se ho více než 2000 matematiků a učitelů matematiky z 91 zemí celého

světa. Dvanáct účastníků z České republiky se zapojilo do práce kongresu velmi aktivně v různých formách.

Celkem bylo prosloveno osm plenárních přednášek, další přednášky probíhaly na různých místech paralelně (v celkovém počtu více než 80). Dále byly organizovány tématické skupiny (Topic Study Groups), jichž bylo celkem 29, a diskusní skupiny (Discussions Groups) v celkovém počtu 24. Práce kongresu probíhala mimo to v šesti tématických odpoledních, pěti národních prezentacích (Korea, Mexiko, Rumunsko, Rusko, severské země) a 45 dílnách. V průběhu kongresu bylo možné navštívit různé výstavy, zájmové schůzky a prohlédnout si rozsáhlý soubor posterů.

Pokusím se nyní o subjektivní shrnutí tématicky velmi různorodé přehlídky didaktické produkce roku 2004.

Stěží lze najít otázku v matematickém vzdělávání, které by se přímo či nepřímo jednání kongresu nedotklo. Pozornost byla věnována matematickému vzdělávání od předškolního věku až po univerzitu, různá shromáždění se zabývala diskusemi o jednotlivých oblastech školské matematiky (od aritmetiky, algebry a geometrie až ke statistice a pravděpodobnosti). V mnohých referátech se hodnotil vztah matematiky, přírodních a společenských věd a vyučování, zvláštní pozornost se věnovala otázkám reprezentace a vytváření pojmů, včetně konstruktivních přístupů k matematice, důkazům a dokazování, vizualizaci a porozumění. Studovala se problematika kurikula, včetně tvorby a hodnocení učebnic, jakož i postavení technologií ve vyučování a vzdělávání učitelů. Pozornost se věnovala i jazykům matematiky, výzkumu v didaktice matematiky a mezinárodní spolupráci.

Podrobné informace o práci kongresu lze najít v publikacích [15], [16] a [17].

Hlavní osobní poučení z kodaňského shromáždění budu formulovat v další části článku.

3. Matematická gramotnost, kvalifikace a kompetence

Když nyní s nevelkým odstupem hodnotím „Kodaň“, uvědomuji si jednak, že závažné didaktické otázky zůstávají trvale neřešeny, ale také, že „velcí“ učitelé viděli daleko do budoucna. Budu to dokumentovat na jedné myšlence, kterou v roce 1937 vyslovil můj pozdější učitel na univerzitě *Bohumil Bydžovský*, a k níž nezávisle došel významný německý didaktik *Erich Wittmann* na IMCE 10.

B. Bydžovský napsal ([18], s. 126): „... *formovat ducha lze jen získáváním vědomostí ... nelze si představit člověka vzdělaného jen formálně, tj. se znamenitě vypěstěnými duševními schopnostmi, který by však, řečeno*

drasticky, nic nevěděl.“ Přitom ovšem, píše jinde též autor, „... *pro formování ducha není lhostejné, na jaké látce se žák vzdělává ... na určitého ducha působí nejpronikavěji a nejprospěšněji, pro výchovu jak intelektu, tak i mravní povahy, ty statky kulturní, jež vznikly z duševní organizace nejbližší duševnímu založení žákovu*“ ([18], s. 71).

E. Wittmann formuloval své názory takto: „*Nyní jsou procesy učení studovány psychologickými a jinými metodami. Zdá se mi, že se přitom předmět matematiky sám stále více a více zanedbává. Mluvíme-li o matematice jen v termínech kompetencí, můžeme zapomínat na matematický obsah. To by se mělo v budoucnu změnit. O matematice nelze mluvit, jestliže jí dobře nerozumíme*“ ([19], s. 1).

Otázce matematické gramotnosti se na kongresu věnoval ve své přednášce *What is mathematical literacy* např. Tony Gardiner z Univerzity Birmingham ve Velké Británii ([16], s. 50). Gramotnost nazírá ze dvou aspektů: ze složky „*prokazatelné*“ (v originále „*tentative*“) a ze složky „*hlubší*“ (v originále „*long-term aspiration*“). První aspekt spočívá na „3R“ (*remembering, reckoning, reasoning*), který bychom mohli snad formulovat jako „3P“ (*pamatovat si, počítat, přemýšlet*), a na rutinním užití elementární matematiky v denním životě (zde uvádí explicitně aritmetiku celých a desetinných čísel, zlomky, poměry a úměrnosti, měření a základní geometrické znalosti). S touto oblastí souvisí jakási kostra elementární matematiky, kterou, zřejmě pro školu střední formuluje v heslech: numerické výpočty (patrně pomocí kalkulačky), měření, trojúhelníky a kružnice, Pythagorova věta, základní poznatky z trigonometrie a podobnosti, souřadnice, lineární a kvadratické rovnice, lineární funkce a její graf. Druhou složku matematické gramotnosti bych charakterizoval jako *porozumění elementární matematice*. Zde Gardiner explicitně uvádí např.: ocenění a respekt k logické stránce matematiky, pochopení matematiky jako abstraktní disciplíny, poznání souvislostí různých oblastí matematiky, nabývání zkušeností s řešením problémů, užití exaktních kalkulací k získávání efektivních výsledků, ... Podrobnější studium britské *National Numeracy Strategy* z konce devadesátých let, která se podle zmínky v Gardinerově přednášce zabývá např. i problematikou pamětného počítání, by podle mého názoru bylo poučné.

Otázka vztahů mezi matematikou chápanou jako abstraktní disciplína a matematikou jako užitečnou složkou vzdělávání orientovanou na užití v každodenním životě, v běžných povoláních, ale i jako podklad pro další studium, je patrně důležitá didaktická otázka, kterou by se měla naše didaktika zabývat. Jde především o vyjasnění pojmů uvedených v nad-

pise tohoto odstavce. Kvalitní studium matematiky na každé úrovni vede k určité matematické gramotnosti, její specifikace pro absolventy jednotlivých typů škol znamená určitou matematickou kvalifikaci (matematická kvalifikace občana, který je připraven studovat libovolný učňovský obor, matematická kvalifikace absolventa základní školy, který půjde studovat školu střední, matematická kvalifikace maturanta pro studium na škole vysoké a matematické kvalifikace absolventa vysoké školy pro praxi nebo pro výzkum). Jen matematickou gramotností a kvalifikací můžeme dosahovat kompetencí, takových jaké vymezují např. materiály [12] a [13]. To je hlavní poučení, které jsem si osobně odnesl z ICME 10.

4. Závěry

V roce 2004 vzpomínala polská a světová didaktika sté výročí narození *Anny Zofie Krygowské*, jedné z významných osobností didaktiky matematiky dvacátého století. Prof. Krygowská vždy zdůrazňovala, že didaktika matematiky se má zabývat všemi otázkami, které klade školská praxe. Jak z jednání světového kongresu, tak i z naší didaktické produkce mám dojem, že se otázky spjaté s praxí vzdělávání velmi zanedbávají. Jsem přesvědčen, že v didaktické teorii bylo formulováno mnoho pozoruhodných myšlenek, praxe školy se však jimi velmi málo řídí. Škola je instituce společenská, v nezdravé společnosti nemůže být ani škola zdravá. Škola může ovšem v delší perspektivě k ozdravení společnosti účinným výchovným působením přispívat, změnit ovšem společnost nemůže. Z druhé strany, nebude-li škola např. vychovávat k práci, k zodpovědnosti, kritičnosti, . nebude zdravý vývoj společnosti podporovat.

Každou školskou reformu realizují koneckonců učitelé. Na praxi školy ztroskotaly mnohé krásné pedagogické ideje v minulosti. Na učitelích, řídicích orgánech školy a na společnosti záleží, bude-li se naše škola v podmínkách rámcových vzdělávacích programů vyvíjet kupředu, bude-li stagnovat nebo povede-li tato reforma k snížení úrovně vzdělanosti v našem státě. Věřím v dobré učitele – odborníky ve svých oborech. Prioritní v současné době není redukce učiva, prioritní je učit tak, abychom rozvíjeli účinně gramotnost studentů, abychom kultivovali jejich kompetence. Je-li k tomu potřeba omezit rozsah učiva, současné materiály nám to umožňují.

Současnou světovou didaktickou produkci lze vzhledem k jejímu obrovskému rozsahu a pojmové roztříštěnosti stěží důkladně sledovat. Erich Wittmann mi v Kodani mluvil z duše, když připomněl, že honba za stále novými poznatky vede k narůstání objemu „teoretické“ produkce a přehlížení hodnot, k nimž došla didaktika matematiky v minulosti.

Tento příspěvek spíše klade otázky než dává odpovědi. Chci ho přesto uveřejnit jako podnět k diskusi o problémech, které jsou i pro naši školu důležité. Byl bych rád, aby článek vyzněl jako výraz mých pedagogických zkušeností, obávám se však, že vyzní spíše jako projev mé neschopnosti vidět věci nově.

Literatura

- [1] *Dewey, J.*: Demokracie a výchova. Laichter, Praha 1932.
- [2] *Schank, R. C.*: Co vědět a jak se to dovědět. In: Jak se věci mají. Editoři: J. Brockman, K. Matsonová. Archa, Bratislava 1996.
- [3] *Schank, R. C.*: Budeme už příště chytřejší? In: Příštích padesát let. Editor: J. Brockman. Argo, Praha 2004.
- [4] *Kauffman, S.*: Co je život? In: Příštích padesát let. Editor: J. Brockman, Argo, Praha 2004.
- [5] *Barrow, J. D.*: Pí na nebesích. Mladá fronta, Praha 2000.
- [6] *Komárek, S.*: Sto esejů o přírodě a společnosti. Vesmír, Praha 1995.
- [7] *Selye, H.*: Záhady vědy. Orbis, Praha 1975.
- [8] *Stuart, I.*: Čísla přírody. Archa, Bratislava 1996.
- [9] *Piřha, P.*: Hledání učitele. In: Hledání učitele. Pedagogická fakulta UK, Praha 1996.
- [10] *Holland, J. H.*: Co nás čeká a jak to lze předvídat. In: příštích padesát let. Editor J. Brockman, Argo, Praha 2004.
- [11] Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha. MŠMT, Praha 2001.
- [12] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. VÚP Praha 2002.
- [13] Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání. VÚP Praha 2004.
- [14] *Kalhous, Z. – Obst, O.*: Školní didaktika. Portál, Praha 2002.
- [15] 10th International Congress on Mathematical Education: Final Programm, Copenhagen 2004.
- [16] 10th International Congress on Mathematical Education: Plenary and Regular Lectures, Copenhagen 2004.
- [17] 10th International Congress on Mathematical Education: Posters, Copenhagen 2004.
- [18] *Bydžovský, B.*: Naše středoškolská reforma. Profesorské nakladatelství, Praha 1937.
- [19] Interview with Erich Ch. Wittmann. 10th International Congress on Mathematical Education. News Day 7, Copenhagen 2004.

Metoda souřadnic při řešení algebraických úloh

LEV KURLIANDČIK – JAROSLAV ŠVRČEK

Uniwersytet M. Kopernika, Toruń, POLSKO – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tento článek volně navazuje na příspěvek [2], v němž jsou uvedeny některé metody řešení algebraických úloh užitím planimetrických prostředků. V něm také najdete další užitečné geometrické aplikace, které nám mohou pomoci úspěšně vyřešit některé typy ryze algebraických úloh. Zde se zaměříme na prezentaci *metody souřadnic* a dále pak Pythagorovy věty při řešení speciálních typů soustav rovnic a řešení úloh na vyšetřování extrému (se zadanými vazebními podmínkami) elementárními prostředky. Při použití metody souřadnic je velmi důležité co nejvhodnější umístění příslušného rovinného útvaru v kartézském souřadném systému Oxy . Cílem tohoto příspěvku je prezentace uvedené metody přímo při řešení konkrétních úloh.

Příklad 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2} &= \sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu nejprve upravíme na tvar

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} &= \sqrt{2}, \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Uvažujme kartézskou souřadnou soustavu Oxy a v ní body $O[0;0]$, $A[1;0]$, $B[1;1]$, $C[0;1]$. Nechť $P[x,y]$ je libovolný bod, který leží v rovině čtverce $OABC$ (obr. 1). Vzdálenosti bodu P od vrcholů uvažovaného čtverce jsou

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |AP| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

$$|BP| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad |CP| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

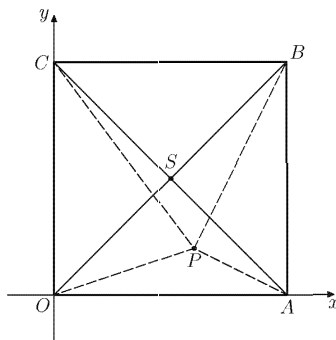
Podle zadání úlohy tak platí $|OP| + |BP| = |AP| + |CP| = \sqrt{2}$. Pro libovolný bod P roviny uvažovaného čtverce ale platí

$$|OP| + |BP| \geq |OB| \quad \text{a současně} \quad |AP| + |CP| \geq |AC|,$$

přičemž rovnosti v obou posledních nerovnostech platí, právě když bod P je současně bodem úseček OB a AC , tj. právě když je průsečíkem úhlopříček čtverce $OABC$.

Protože však $|OB| = |AC| = \sqrt{2}$, platí (podle zadání úlohy) v obou uvažovaných geometrických nerovnostech rovnosti, tj. platí

$$|OP| + |BP| = |OB| \quad \text{a současně} \quad |AP| + |CP| = |AC|.$$



Obr. 1

Bod P proto leží současně na obou úhlopříčkách OB a AC – je tedy průsečíkem S úhlopříček uvažovaného čtverce.

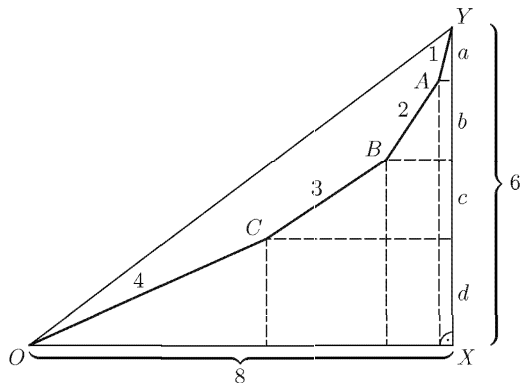
Jediným řešením dané soustavy rovnic v oboru reálných čísel je proto dvojice $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Příklad 2

V oboru kladných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 6, \\ \sqrt{1-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{9-c^2} + \sqrt{16-d^2} &= 8. \end{aligned}$$

Řešení. V kartézské souřadné soustavě Oxy uvažujme čtyři pravoúhlé trojúhelníky, že velikosti jejich přepon a vždy jedné z odvěsen jsou po řadě dvojice $(1; a)$, $(2; b)$, $(3; c)$ a $(4; d)$. Tyto trojúhelníky jsou v souřadné soustavě Oxy umístěny tak, že jejich přepony tvoří lomenou čáru $YABCO$ (obr. 2). Jejich odvěsny o délkách a, b, c, d jsou přitom navzájem rovnoběžné.



Obr. 2

Druhé odvěsny v příslušných pravoúhlých trojúhelnících jsou přitom také navzájem rovnoběžné a mají délky

$$\sqrt{1 - a^2}, \quad \sqrt{4 - b^2}, \quad \sqrt{9 - c^2}, \quad \sqrt{16 - d^2}.$$

Součet jejich velikostí je podle zadání úlohy roven 8 a je reprezentován délkou odvěsny OX v pravoúhlém trojúhelníku OXY . Protože druhá odvěsna uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku OXY má podle zadání délku 6, musí mít podle Pythagorovy věty jeho přepona YO délku 10. Navíc přitom platí

$$|YA| + |AB| + |BC| + |CO| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = |YO|,$$

a proto A, B, C jsou vnitřními body přepony YO .

Všechny pravoúhlé trojúhelníky na obr. 2 jsou tedy navzájem podobné. Odtud již snadno zjistíme, že jediným řešením dané soustavy rovnic v oboru kladných reálných čísel je uspořádaná čtveřice $(a, b, c, d) = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.

Podobně budeme postupovat i v případě řešení následující extrémální úlohy.

Příklad 3

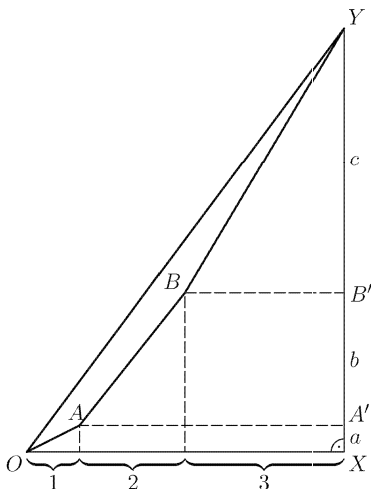
Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{4+b^2} + \sqrt{9+c^2},$$

kde a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $a + b + c = 8$.

Řešení. Výraz $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{4+b^2} + \sqrt{9+c^2}$ lze geometricky interpretovat jako součet délek přepon tří takových pravoúhlých trojúhelníků, že velikosti jejich přepon jedné z jejich odvěsen jsou po řadě dvojice $(a; 1)$, $(b; 2)$ a $(c; 3)$. Umístění uvažovaných tří pravoúhlých trojúhelníků v rovině (v kartézské souřadné soustavě Oxy) je ve shodě s obr. 3, tj. jejich odvěsny o délkách a, b, c a také odvěsny o délkách 1, 2 a 3 jsou navzájem rovnoběžné. Jejich přepony přitom tvoří lomenou čáru $OABY$.

Pro pravoúhlé průměty A', B' po řadě bodů A, B na úsečku XY , kde X je třetím vrcholem pravoúhlého trojúhelníku OXY s přeponou OY , platí $|XA'| = a$, $|A'B'| = b$, $|B'Y| = c$.



Obr. 3

Pro délku uvažované lomené čáry $OABY$ tak platí

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{4+b^2} + \sqrt{9+c^2} = |OA| + |AB| + |BY| \geq |OY|.$$

Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku OXY mají ale podle zadání úlohy velikosti $1+2+3=6$ a $a+b+c=8$. Pro velikost jeho přepony OY tedy podle Pythagorovy věty platí $|YO|=10$.

Této (nejmenší) hodnoty nabývá součet délek přepon všech tří uvažovaných pravoúhlých trojúhelníků, právě když A, B jsou vnitřními body úsečky OY , tj. pro taková kladná reálná čísla a, b, c , pro něž současně (s ohledem na podobnost uvažovaných pravoúhlých trojúhelníků) platí

$$a+b+c=8 \quad \text{a} \quad a:b:c=1:2:3, \quad \text{tj.} \quad a=\frac{4}{3}, b=\frac{8}{3}, c=4.$$

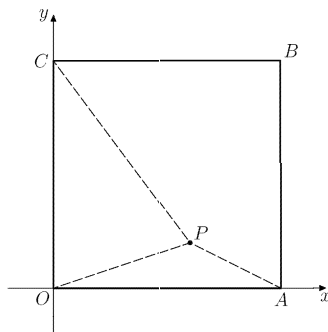
Příklad 4 (Gazeta Matematică, 1987)

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x, y \in \langle 0; 1 \rangle$ platí nerovnost

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq \sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Řešení. V kartézské souřadné soustavě Oxy uvažujme čtverec $OABC$, jehož vrcholy mají tytéž souřadnice jako v příkladu 1 (obr. 4). Nechť $P[x, y]$ je libovolný bod uvažovaného čtverce. Daná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$|AP| + |CP| \geq \sqrt{2} \cdot |OP|.$$



Obr. 4

Podle Ptolemaiovy nerovnosti platí pro body O, A, C a libovolný bod P roviny čtverce $OABC$

$$|AP| \cdot |CO| + |CP| \cdot |OA| \geq |OP| \cdot |AC|.$$

Rovnost přitom nastane, právě když $OAPC$ je tětíkový čtyřúhelník, tj. právě když $P = B$, neboť $x, y \in \langle 0; 1 \rangle$.

Po snadné úpravě uvedené varianty Ptolemaiovy nerovnosti obdržíme bezprostředně žádanou nerovnost, tj. platí $|AP| + |CP| \geq \sqrt{2} \cdot |OP|$.

Tím je dokázána také daná nerovnost.

Literatura

- [1] *Kourliandtchik, L. – Molnár, J. – Švrček, J. – Uscki, M.*: Matematika jako jedna část. Miniatury matematyczne, Vol. 14, wyd. Aksjomat, Toruń 2004, s. 43 – 88.
- [2] *Švrček, J.*: Užitečná planimetrie. MFI, ročník 13, 2003/04, č. 10, s. 577 – 583.

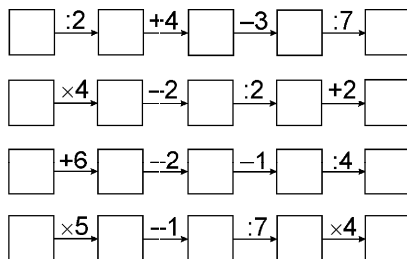
55. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:



M. Smítková

Z6–I–2

Sněhurka se sedmi trpaslíky sbírala lískové oříšky. Měla jich tolik, kolik všichni trpaslíci dohromady. Když se vraceli, potkali veverku Loudilku. Sněhurka i každý trpaslík jí dali stejný počet oříšků. Když pak trpaslíci a Sněhurka vysypali zbylé oříšky na stůl, zapsal Prófa jejich počty: 120, 316, 202, 185, 333, 297, 111 a 1 672. Kolik oříšků dostala veverka Loudilka?

L. Hozová

Z6–I–3

Když jsme čísla 80 a 139 vydělili stejným přirozeným číslem, získali jsme zbytky 8 a 13. Jakým číslem jsme dělili?

M. Volfová

Z6–I–4

Obvod trojúhelníku je 16 cm. Jak dlouhé má strany, když jsou to v centimetrech přirozená čísla a součet dvou stran je o 6 cm větší než třetí strana?

L. Hozová

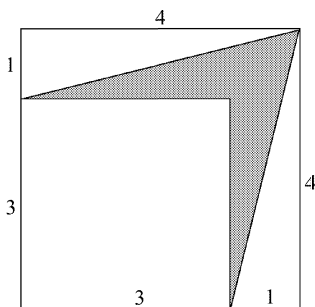
Z6–I–5

Maruška dostala pět různě těžkých koláčů. Průměrná hmotnost jednoho koláče byla 200 gramů. Maruška jeden koláč snědla a průměrná hmotnost zbylých koláčů pak byla 160 gramů. Kolik vážil koláč, který Maruška snědla?

B. Šťastná

Z6–I–6

Urči velikost šedé plochy vyplňující část útvaru mezi dvěma čtverci (rozměry na obrázku jsou v centimetrech).



P. Tlustý

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \square & :2 & \rightarrow & \square & +4 & \rightarrow & \square & -3 & \rightarrow & \square & :7 & \rightarrow & \square \\
 \square & \times 4 & \rightarrow & \square & -2 & \rightarrow & \square & :2 & \rightarrow & \square & +2 & \rightarrow & \square \\
 \square & +6 & \rightarrow & \square & -2 & \rightarrow & \square & -1 & \rightarrow & \square & :4 & \rightarrow & \square \\
 \square & \times 5 & \rightarrow & \square & -1 & \rightarrow & \square & :7 & \rightarrow & \square & \times 4 & \rightarrow & \square
 \end{array}$$

M. Smitková

Z5–I–2

Blecha Skákalka skáče po číselné ose. Dokáže však jen dva druhy skoků. Jedním přeskočí o 14 čísel doprava nebo doleva, druhým přeskočí o 18 čísel doprava nebo doleva. Právě stojí na čísle 2.

- Najdi způsob, jak má blecha skákat, aby se dostala právě čtyřmi skoky na desítku.
- Blecha tvrdí, že včera byla na třináctce. Mluví pravdu nebo lže? Zdůvodni.

M. Dillingerová

Z5–I–3

Pohádkový nafukovací čtverec, který umí mluvit, měl před 5 minutami délku strany 8 cm. Při každé lži zvětší svůj obvod dvojnásobně, při každé vyslovené pravdě se zmenší délka každé jeho strany o 2 cm. Za posledních 5 minut dvakrát lhal a dvakrát mluvil pravdu.

- Jaký největší obvod může teď mít?
- Jaký nejmenší obvod může teď mít?

S. Bodláková

Z5–I–4

Pepa na pouti koupil čtyři autíčka. Bílé stálo dvakrát tolik, co červené, zelené třikrát tolik, co bílé a za modré zaplatil tolik, co za červené a bílé dohromady. Přitom červené stálo o 70 Kč méně než zelené. Kolik stála jednotlivá autíčka?

Š. Ptáčková

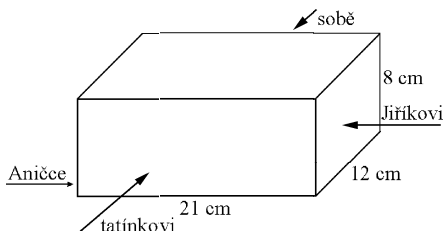
Z5–I–5

Máma stonožka má dvě děti a manžela. Každý z nich má sto nohou a všichni si berou denně čisté ponožky. V sobotu ráno v 6:00 začala máma stonožka prát špinavé ponožky. Najednou se jí do pračky vejde 357 ponožek. Tato jedna várka se vypere za dvě a půl hodiny. Zjisti, kdy skončí s praním, pokud víš, že ponožky pere jenom jednou za týden, uložení ponožek do pračky jí trvá 2 minuty a jejich vyjmutí z pračky 3 minuty.

S. Bednářová

Z5–I–6

Maminka má v lednici cihlu sýra (obr.). Postupně z ní odřezává 1 cm hrubé plátky na smažení. Nejprve odřízla zepředu plátek s rozměry 21 cm, 8 cm, 1 cm pro tatínka. Pak zboku odřízla pro Jiříka, zezadu pro sebe a nakonec z druhého boku pro Aničku. Napiš, jaké rozměry mají jednotlivé plátky. Urči rozměry zbytku sýra.



M. Dillingerová

Zajímavé matematické úlohy

Naše pravidelná rubrika zahajuje již 13. ročník své existence. Byla založena v roce 1993 z podnětu tehdejšího redaktora pro matematiku *Stani-slava Židka* a po dobu prvních jedenácti let její existence se o ni nepřetržitě staral současný redaktor pro matematiku *Jaroslav Švrček*. Od 12. ročníku přebíral péči o tuto rubriku *Pavel Calábek*. Současně upozorňujeme naše čtenáře, že všechny další náležitosti týkající se uvedených rubrik zůstávají v platnosti.

Řešení první dvojice úloh nového ročníku můžete zaslat nejpozději do 20. 10. 2005 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 121

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{x} &= \frac{2}{y^2}, \\y + \frac{1}{y} &= \frac{2}{z^2}, \\z + \frac{1}{z} &= \frac{2}{x^2}.\end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

Úloha 122

Nechť A' , B' , C' jsou průsečíky vnitřků polopřímek AO , BO , CO s kružnicí $k(O; r)$ opsanou ostroúhlému trojúhelníku ABC . Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků ABC' , BCA' a CAB' je roven obsahu trojúhelníku ABC .

Pavel Leischner