

Užití Excelu při znázorňování limit funkcí

VÁCLAV MATYÁŠ

Purkyňovo gymnázium, Strážnice

Pojem limity patří k základním matematickým pojmům infinitesimálního počtu a přirozeně odsud plyne snaha znázornit studentům definici a příklady limit funkcí [1]. Podle definice je limita funkce reálné číslo nebo $+\infty$ nebo $-\infty$ a pro její pochopení je velmi důležitá správná představa o pojmu „blížit se“. V příspěvku se na podporu této představy používá tabulkový procesor Excel, který patří k základnímu programovému vybavení, je běžně vyučován na školách a jeho používání je tedy žákům blízké. Bude se jednat o výpočty hodnot funkcí a kreslení průběhu funkcí, přičemž je někdy třeba hodnoty proměnných měnit ve velkém rozsahu, takže je v některých případech vhodné vynášet hodnoty na jedné nebo na obou osách grafu v logaritmickém měřítku. Využití logaritmických stupnic (měřítek) se kdysi vyučovalo [2] a také dnes je lze v praxi považovat za živé.

1. Logaritmické měřítko

Reálné číslo x znázorníme na číselné ose v logaritmickém měřítku vyznačením délky ξ , kterou nazýváme *souřadnice bodu* x a počítáme ji ze vztahu

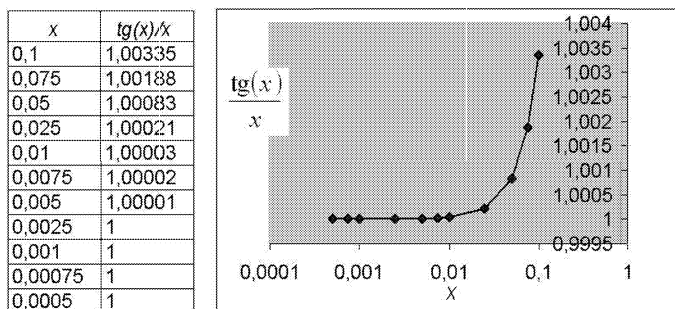
$$\xi = \mu \cdot \log(x), \quad (1)$$

kde $\log$ je desítkový logaritmus. Koeficient μ se nazývá *modul* logaritmického měřítka; je to vzdálenost mezi souřadnicí zvoleného bodu x_0 a souřadnicí jeho desetinásobku. V logaritmickém měřítku se čísla ve velkém rozsahu hodnot zobrazují se stejnou relativní přesností [3].

2. Definice vlastní limity

Podle definice má funkce f , která je definována v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, v bodě a vlastní limitu L zleva (zprava), právě když ke každému ε -okolí bodu L existuje levé (pravé) δ -okolí bodu a tak, že pro všechna $x \neq a$ z levého (pravého) okolí bodu a patří funkční hodnoty $f(x)$ do ε -okolí bodu L .

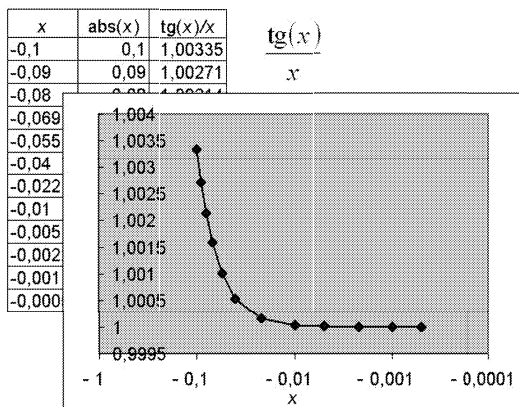
V případě funkce $f : y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, která je v učebnici pro gymnázia [4] užita pro vysvětlení pojmu limita, volíme v tabulce na obr. 1 hodnoty x z pravého okolí bodu 0 a postupně stále bližší tomuto bodu.



Obr. 1 Funkce $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $x \rightarrow 0+$

Obr. 1 vytvoříme v Excelu tak, že v tabulce vyznačíme vykreslovanou oblast, klepneme na ikonu *Průvodce grafem* a v něm zadáme: *Typ grafu XY*, ve volbě *Podtyp grafu* přímkové spojení bodů grafu vykreslených podle tabulky a ve volbě *Názvy* zadáme název grafu a popisy pro volby *Osa x* a *Osa y*. Jakmile zadáme v průvodci grafem *Dokončit*, vykreslí se nám graf s lineárními měřítky na obou osách. Klepneme pravým tlačítkem myši na osu x a ve volbě *Formát osy* na záložce *Měřítko* zadáme *logaritmické měřítko*. Poznamenejme, že podobným způsobem je možno zadat logaritmické měřítko na obou osách (viz např. obr. 11), nebo jen na ose y . Bez ohledu na to, že v tabulce hodnoty argumentu x klesají od prvního k poslednímu řádku, je obr. 1 automaticky vykreslen tak, že hodnoty na ose x rostou zleva doprava, jak je obvyklé, když chceme znázornit přibližování k 0 zprava. Po klepnutí na oblast obrázku si tažením za rohy, resp. strany obrázku tento rozměrově upravíme a posuneme, jak potřebujeme.

Jak z tabulky, tak z grafu obr. 1 vidíme, že hodnoty funkce $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ jsou pro $x \rightarrow 0+$ postupně stále bližší hodnotě 1. Podle obr. 1 může také žák získat názornou představu o tom, jak lze mezi libovolně malou kladnou hodnotu x z pravého okolí bodu 0 a mezi tento bod 0 vložit libovolně mnoho dalších hodnot (např. násobením poslední konečné hodnoty nejbližší nule číslem 0,1).



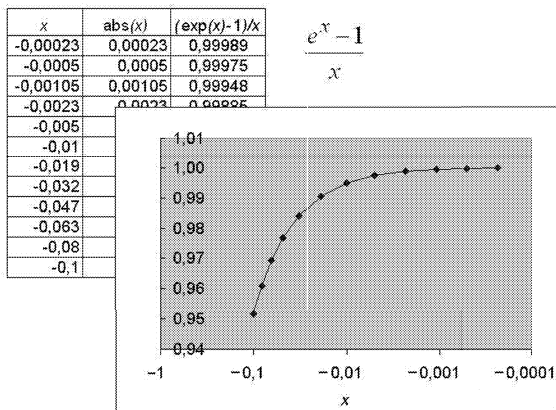
Obr. 2 Funkce $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $x \rightarrow 0+$, $x \rightarrow 0-$

V tabulce a v grafu obr. 2 je ilustrováno přibližování hodnot funkce $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ k 1 pro $x \rightarrow 0-$. Hodnoty funkce ve 3. sloupci tabulky jsou vypočteny pro argument z 1. sloupce. Vykreslení grafu podle 1. a 3. sloupce tabulky, chceme-li na ose x vykreslovat v logaritmickém měřítku, Excel odmítne s tím, že logaritmus záporného argumentu není definován. Nám však jde o ilustraci chování funkce $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, pro $x \rightarrow 0-$ a netrváme striktně na dodržení definice logaritmického měřítka osy x (tj. nevadí, když na ose x nebude vynášeno v logaritmickém měřítku, ale v definované transformovaném logaritmickém měřítku). Ve druhém sloupci tabulky 2 jsou tedy vypočteny absolutní hodnoty $|x|$ argumentu x a graf je zhotoven výše uvedeným způsobem podle 2. a 3. sloupce tabulky. Aby bylo znázorněno, že 0 je větší hodnotou, než všechny vynášené (záporné) hodnoty, je v zadání *Formát osy* po volbě *Logaritmické měřítko* ještě zadána volba *Hodnoty v obráceném pořadí*. Hodnoty (kóty) vynesené na ose x můžeme

buďto po vytisknutí ručně označit znaménkem $-$, nebo obrázek přenést ve schránce z Excelu do Wordu, zvolit ve Wordu v nabídce *Kreslení* (dole na obrazovce) volbu *Textové pole* v něm napsat záporné kóty pro osu x i její popis a umístit je do grafu. Klikneme-li na rámeček textového pole vkládaného do grafu pravým tlačítkem myši, můžeme ve volbě *Formát textového pole* zadat barvu výplně (bílou) a potlačit kreslení rámečku (volba *Bez čáry* v nabídce *Čára, Barva*:).

Funkce $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ je sudá, její hodnoty se hodnotě 1 blíží v levém i v pravém okolí nuly shora a tabulky i obr. 1 a 2 ilustrují větu o existenci limity [4] pro náš příklad, tj. $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

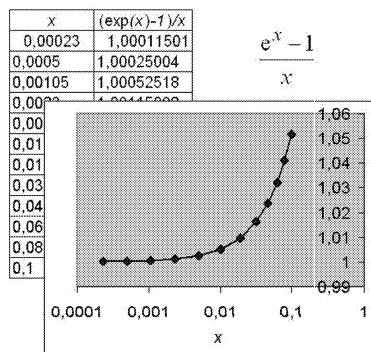
Podobně lze ukázat, jak se hodnoty funkce $y = \frac{e^x - 1}{x}$ pro $x \rightarrow 0+$ i $x \rightarrow 0-$ blíží jedné [3], přičemž hodnoty této funkce se v levém okolí bodu 0 blíží k 1 zdola (obr. 3) a v pravém okolí shora (obr. 4).



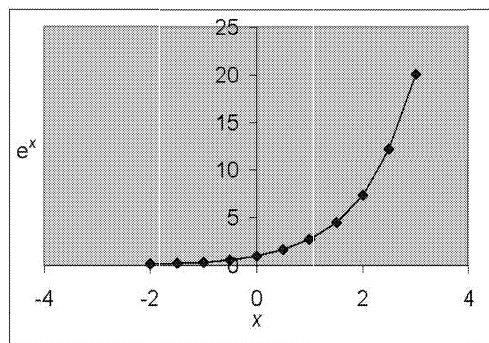
Obr. 3 Funkce $y = \frac{e^x - 1}{x}$, $x \rightarrow 0-$

3. Vzdálenost bodů na grafu

Při zobrazení limitního procesu se u všech obrázků příspěvku jedná o kreslení grafů funkcí. Vynášení bodů těchto grafů s konstantním přírůstkem na ose x je v Excelu snadné a grafy některých funkcí, např. $y = \sin x$ nebo $y = \cos x$ jsou takto dobře zobrazeny [5]. U jiných funkcí je už takové vynášení bodů méně vhodné. Například na grafu funkce $y = e^x$ se v intervalu většího růstu funkčních hodnot mohou body na křivce vzdálit tak,



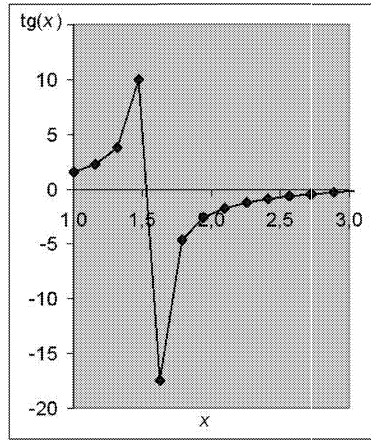
Obr. 4 Funkce $y = \frac{e^x - 1}{x}$, $x \rightarrow 0+$



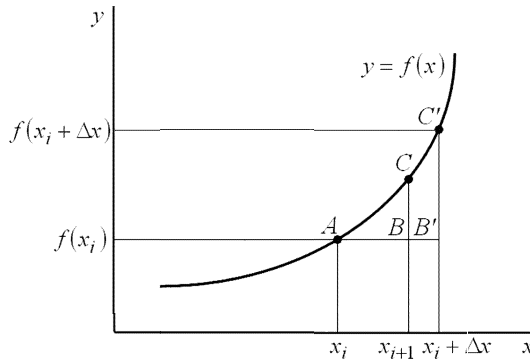
Obr. 5 Funkce e^x , konstantní přírůstek na ose x

že se tato jeví jako lomená čára (obr. 5), nebo na grafu funkce $y = \operatorname{tg} x$ můžeme zanedbat její průběh v blízkém okolí bodu $x = \frac{\pi}{2}$ (obr. 6).

Jednou z možností je pokusit se vynášet body grafu tak, aby vzdálenost ne jejich x -ových souřadnic, ale vzdálenost těchto bodů na křivce byla stejná. V některých případech vystačíme s jednoduchým přibližným modelem. Na obr. 7 jsou x_i , resp. x_{i+1} hodnoty nezávisle proměnné (přičemž první hodnotu x_1 zadáme), $f(x_i)$, resp. $f(x_{i+1})$ jsou pro graf funkce $y = f(x)$ odpovídající požadované hodnoty y -ových souřadnic bodů A , C grafu funkce. Vzdálenost d_{AC} , s níž chceme postupovat po křivce, zadáme a provedeme odhad příslušného přírůstku x jako Δx (tím se dostaneme do bodu C'). Předpokládejme pro jednoduchost lineární měřítka na obou



Obr. 6 Funkce $\operatorname{tg} x$, konstantní přírůstek na ose x



Obr. 7 Odvození kroku

osách. Podle (1) pak můžeme psát $\xi_i = \mu_x \cdot x_i$, resp. $\eta_i = \mu_y \cdot f(x_i)$ pro souřadnice x_i , resp. y_i a podobně pro souřadnice indexované $i+1$ (μ_x , resp. μ_y udávají délku odpovídající velikosti jedničky na ose x , resp. na ose y). Předpokládejme podobnost trojúhelníků ABC a $AB'C'$, takže platí

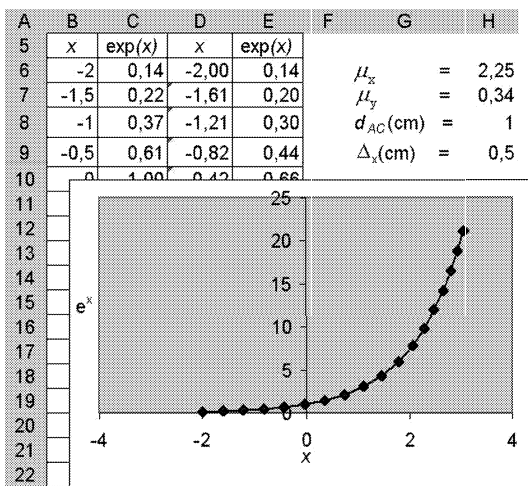
$$\frac{d_{AC}}{\mu_x \cdot (x_{i+1} - x_i)} = \frac{d_{AC'}}{\mu_x \cdot \Delta x}, \quad (2)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \cdot \frac{d_{AC}}{d_{AC'}} \quad (3)$$

Vzdálenost $d_{AC'}$ počítáme ze vztahu

$$d_{AC'} = \sqrt{(\mu_x \cdot \Delta x)^2 + [\mu_y \cdot (f(x_i + \Delta x) - f(x_i))]^2}. \quad (4)$$

Předpoklad o podobnosti trojúhelníků ABC , $AB'C'$ je více či méně dobře splněn v závislosti na zobrazovaném intervalu konkrétní funkce $y = f(x)$ a na zvoleném přírůstku Δx při zadané hodnotě d_{AC} .

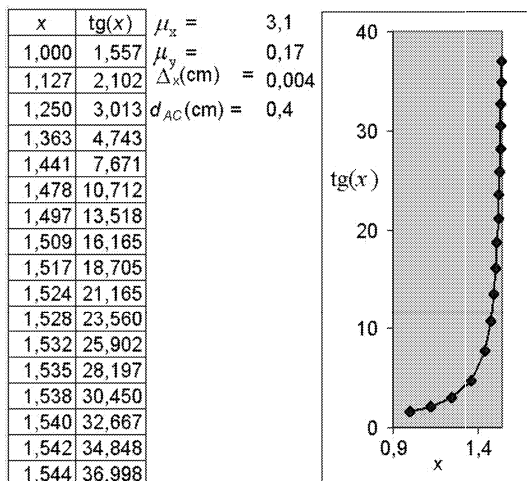


Obr. 8 Funkce e^x , konstantní přírůstek na grafu

Na obr. 8 jsou body exponenciály vyneseny pro souřadnice x vypočtené podle vztahů (3), (4) do tabulky pro $\mu_x = 2,25$ cm, $\mu_y = 0,34$ cm, $d_{AC} = 1$ cm, $\Delta x = 0,5$ cm, $x_1 = -2$. V buňce D6 tabulky je zadána počáteční hodnota x_1 , do buňky D7 je podle vzorců (3) a (4) pro konkrétní zadání $f(x) = \exp(x)$ v symbolice Excelu zapsáno: =D6+\$H\$9*\$H\$8/ODMOCNINA((\$H\$6*\$H\$9)^2+(\$H\$7*(EXP(D6+\$H\$9)-EXP(D6)))^2) a další buňky D8 až D23 jsou vyplněny po vyznačení D6 a tažením za pravý dolní roh buňky stisknutou myší. Body o souřadnicích ze sloupců D, E jsou vyneseny v obrázku 8, body o souřadnicích ze sloupců B, C v obrázku 5 (souřadnice x se ve sloupci B zvětšují s pravidelným přírůstkem 0,5).

Také u grafu funkce $y = \lg x$ bylo podle vzorců (3), (4) možno dosáhnout vykreslení bodů v přibližně stejných vzdálenostech na křivce (a tím

i nárůst hodnot $\operatorname{tg} x$ na téměř svislé křivce v levém okolí bodu $\pi/2$, viz obr. 9), Δx však bylo nutno zvolit relativně tak malé ($\mu_x = 3,1$ cm, $\mu_y = 0,17$ cm, $d_{AC} = 0,4$ cm, $\Delta x = 0,04$ cm, $x_1 = 1$), že znázornění limitního přibližování $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x$ bylo lepší řešit jinak (obr. 10).

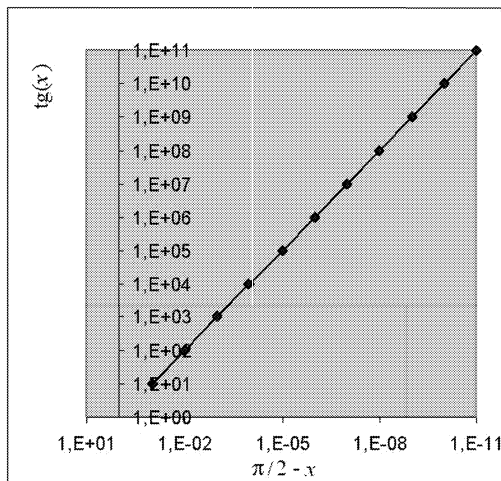


Obr. 9 Funkce $\operatorname{tg} x$, konstantní přírůstek na grafu

Pro rozložení bodů na obrázcích 1 až 4 nedal uvedený model dobré výsledky. Ke zlepšení sice došlo poté, co jsme předpokládali přírůstek Δx_i proměnný během výpočtu (tj. zadané x_1 na začátku výpočtů a po každém výpočtu x_{i+1} ještě vypočítávané $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$). Takový postup by byl ale pro programování vzorců v tabulkách Excelu hodně složitý.

V případech, kdy nejsou zobrazovány rozsáhlé tabulky (a to je u uvedených příkladů splněno vždy), vyplývá jednodušší postup z možnosti ubírat, nebo přidávat, resp. posunovat body na křivce grafu. Kurzor nastavíme na požadovaný řádek tabulky (např. tab. na obr. 1) a z roletové nabídky Excelu zadáme volby *Formát*, *Řádek*, *Skrýt* (pro ubrání bodu v grafu), nebo *Vložit*, *Řádek* a v tabulce zadáme souřadnice $[x; f(x)]$ (při přidávání bodů grafu). Nastavíme-li kurzor na určitý vykreslený bod křivky v obrázku, vypíše nám program, o který řádek se jedná, a malou změnou argumentu x v odpovídajícím řádku tabulky můžeme bodem grafu mírně posunovat po křivce, což v obrázku okamžitě vidíme. Na obr. 1 jsou vyneseny body

$\pi/2 - x$	$\operatorname{tg}(x)$
1,0E-01	1,0E+01
1,0E-02	1,0E+02
1,0E-03	1,0E+03
1,0E-04	1,0E+04
1,0E-05	1,0E+05
1,0E-06	1,0E+06
1,0E-07	1,0E+07
1,0E-08	1,0E+08
1,0E-09	1,0E+09
1,0E-10	1,0E+10
1,0E-11	1,0E+11



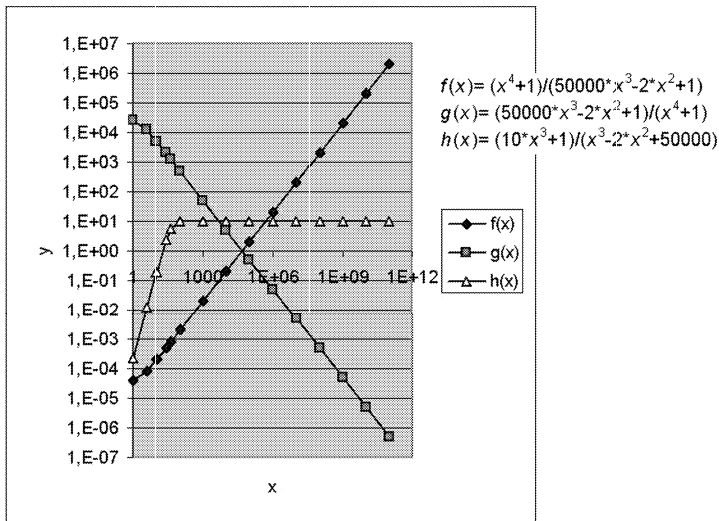
Obr. 10 Funkce $\operatorname{tg} x$, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-$

tak, jak byly (zkusmo) zadány v tabulce. V tabulce obr. 2 jsou vytištěny souřadnice bodů upravené už pro podle prvotního vzhledu obrázku výše uvedeným způsobem.

4. Nevlastní limita

Vraťme se k ilustraci limity $\lim_{x \rightarrow \pi/2-} \operatorname{tg} x = +\infty$. Na osu x budeme v logaritmickém měřítku vynášet vzdálenost x od hodnoty $\frac{\pi}{2}$ pro proměnnou x z levého okolí $\frac{\pi}{2}$, tj. $t = \frac{\pi}{2} - x$, a na osu y v logaritmickém měřítku hodnoty $\operatorname{tg} x$ (obr. 10). Poznamenejme, že tedy v grafu nejsou vynášeny body o souřadnicích $[x; \operatorname{tg} x]$ nebo $\left[\frac{\pi}{2} - x; \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$, ale v logaritmických škálách na obou osách jsou vyneseny body $[t; \operatorname{tg} x]$, přičemž velikost t zleva doprava klesá k nule a hodnota argumentu funkce $\operatorname{tg} x$ se tím blíží k $\frac{\pi}{2}$, tj. přibližování $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ odpovídá $t \rightarrow 0+$ a namísto limitního procesu $\lim_{x \rightarrow \pi/2-} \operatorname{tg} x$ zobrazujeme $\lim_{t \rightarrow 0+} \operatorname{tg} x$. Můžeme graficky opět ukázat, že mezi libovolně zvolenou konečnou hodnotou blízkou $\pi/2$ a hodnotu $\pi/2$ lze vložit libovolný počet bodů (tj. $t = \pi/2 - x$ lze zvolit a v logaritmické škále zobrazit libovolně malé) a také můžeme zobrazit vcelku libovolně velkou hodnotu $\operatorname{tg} x$, pokud nedojde k přeplnění počítače.

5. Limity v nevlastním bodě



Obr. 11. Racionální lomená funkce

Na obrázku 11 jsou vykresleny grafy racionálních lomených funkcí

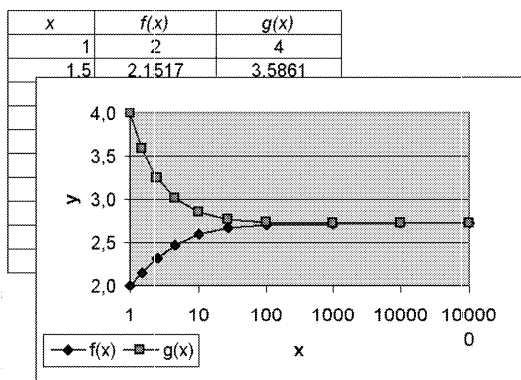
$$f: y = \frac{x^4 + 1}{50\,000x^3 - 2x^2 + 1},$$

$$g: y = \frac{50\,000x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 + 1} \text{ a}$$

$$h: y = \frac{10x^3 + 1}{x^3 - 2x^2 + 50\,000},$$

přičemž hodnoty argumentu x i funkční hodnoty jsou vykreslovány v logaritmickém měřítku. Vidíme, že průběh všech tří funkcí je pro dosti velká x v bilogarithmickém grafu lineární. Pro dostatečně velká x totiž můžeme u polynomů v čitateli i ve jmenovateli racionální lomené funkce zanedbat všechny členy kromě těch, které určují řád polynomu (členy s největším exponentem). Pak například pro funkci $y = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{5x^5 + x^4 - 2x + 50\,000}$ můžeme psát $y \approx \frac{2x^3}{5x^5}$ a $\log y = -2 \cdot \log x + \log \frac{2}{5}$. Rozdíl řádů polynomů

v čitateli a ve jmenovateli tedy určuje směrnici přímky a poměr koeficientů u členů s nejvyššími exponenty určuje posunutí této přímky. Tomu, je-li směrnice přímky kladná, resp. záporná, resp. nulová, odpovídá limita příslušné racionální lomené funkce, která je rovna $+\infty$, resp. $-\infty$, resp. reálnému číslu rovnému poměru koeficientů u členů s nejvyššími exponenty polynomu v čitateli a ve jmenovateli.



Obr. 12 Funkce $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ a $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

V tabulce a v grafu obr. 12 jsou vypsány a vykresleny hodnoty funkce $f : y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ a $g : y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ pro x rostoucí k $+\infty$. Z tabulky vidíme, že již pro $x = 100\,000$ je hodnota funkce f i hodnota funkce g velmi blízká Eulerovu číslu $e = 2,71828\dots$ a neliší se od tabulkové hodnoty 2,7183 dle [6]. Všimněme si, že funkce f je rostoucí a funkce g klesající.

Literatura

- [1] *Votava, M.*: Ilustrace definice limity funkce na grafickém kalkulátoru. MFI roč. 12 (2002/03), č. 9, s. 560.
- [2] *Vencálek, F. – Navara, F. – Vicovský, K.*: Matematika pro III. Ročník středních průmyslových a středních zemědělských technických škol. Praha, SPN 1965.
- [3] *Rektorys K. a kol.*: Přehled užití matematiky. Praha, Prometheus 2003.
- [4] *Hrubý, D. – Kubát, J.*: Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet. Praha, Prometheus 1997.
- [5] *Hvorecký, J.*: Tabulkové kalkulátory a grafy. MFI roč.3 (1993/94), č. 1, s. 41.
- [6] *Mikulčák J. a kol.*: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. Praha, SPN 1988.

Logika

HASHIM HABIBALLA – LIBUŠE PAVLISKOVÁ – TIBOR KMEŤ

Přírodovědecká fakulta OU, Ostrava – Gymnázium Olgy Havlové, Ostrava-Poruba –
Fakulta přírodních vied UKF, Nitra

(Dokončení)

3. Vícehodnotová logika

Pro modelování situací v reálném světě je klasická logika poměrně chudá. Přes všechny její přednosti je zásadním problémem především dvouhodnotová logická interpretace. Již dlouhou dobu existují formalismy zavádějící například logiku trojhodnotovou, kde třetí logická hodnota kromě pravda/nepravda je „nevím“. Různé pokusy o zobecnění například pomocí pravděpodobnosti byly zastíněny v šedesátých letech 20. století tzv. fuzzy matematikou. Fuzzy matematika vychází z principu fuzzy množiny, která narozdíl od klasické množiny, jež buď obsahuje nebo neobsahuje prvek, může prvek obsahovat na určitém stupni příslušnosti. Prvky tedy mohou být v množině buď zcela nebo vůbec, ale také „jen trochu“. Čtenář již měl možnost získat základní informace o fuzzy množinách v článku [7]. **Fuzzy logika** pak tento princip využívá tím, že rovněž interpretace formule nemusí být jen pravda nebo nepravda, ale může to být pravda v určitém stupni.

I když myšlenka fuzzy logiky je velmi prostá, lehce pochopitelná a tudíž implementovatelná do různých automatizovaných systémů, je potřeba se při jejím používání držet některých vlastností. I v běžném životě se můžete setkat s aplikacemi fuzzy logiky. Například elektrospotřebiče – pračky – mají dnes často na sobě nápis „Fuzzy-logic“. Tím se může myslet například schopnost dávkovat automaticky prací prostředky nikoliv v přesně vymezených mantinelech podle váhy prádla (např. pro 1 kg prádla přidej přesně 10 g pracího prostředku), ale pouze vágními pravidly (např. je-li prádla málo, přidej pracího prostředku málo). Termínem fuzzy logika se označuje schopnost pracovat s neurčitou (vágní) informací, ale samozřejmě pojem fuzzy logika ve smyslu matematicko-informatickém je mnohem složitější. Základním problémem často bývá živelné používání množin stupňů příslušnosti bez ohledu na to, že musí existovat přímá souvislost také s používanými logickými spojkami. Proto je nezbytné, aby množina stupňů příslušnosti (pravdivosti) formule byla některou ze zavedených algeber.

Množinou bývá v praktických aplikacích většinou interval $[0, 1]$, i když teorie fuzzy množin a fuzzy logika má teoretické výsledky i pro mnohem složitější struktury. Tyto algebry mají vždy své výhody a nevýhody podle toho, jaké interpretace spojek na intervalu $[0, 1]$ použijeme. Tyto spojky musí být ještě navzájem v souvislosti tj. použijeme-li určitou konjunkci předurčuje to již použití ostatních spojek. Nevýhodou algeber pak může být například nespojitost interpretačních funkcí spojek, neplatnost některých zásadních logických pravidel (zákonů) tak, jak je známe z klasické logiky. Pravděpodobně nejlepším kompromisem je tzv. Łukasiewiczova algebra pojmenovaná po významném polském logikovi. Tato algebra je následující struktura:

$$\mathcal{L}_L = \langle [0, 1], \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1 \rangle$$

kde $[0, 1]$ je interval reálných čísel mezi 0 a 1, což jsou nejmenší a největší hodnota (nepravda, pravda). $\wedge$ a $\vee$ jsou operace infima a suprema (resp. na uvedené množině je lze ztotožnit s minimem a maximem). Definice standardních a odvozených operátorů je následující:

$$\begin{aligned} a \otimes b &= 0 \vee (a + b - 1) & a \rightarrow b &= 1 \wedge (1 - a + b) \\ a \oplus b &= 1 \wedge (a + b) & \neg a &= 1 - a \end{aligned}$$

Na základě této algebry bychom pak mohli vytvořit příslušnou fuzzy výrokovou nebo predikátovou logiku. Zavést bychom museli kromě standardních logických spojek konjunkce a disjunkce $\wedge, \vee$ (jejichž interpretační funkce by byly totožné s operacemi infima a suprema) také nové Łukasiewiczovy spojky a to Łukasiewiczova konjunkce ($\&$) a disjunkce (∇). Jejich interpretační funkce jsou operace $\otimes$ a $\oplus$. Implikace a negace se připouští interpretovat pouze na základě operátorů této algebry.

Příklad 5:

Pomocí fuzzy logik můžeme lehce vyřešit paradoxy, se kterými si klasická logika neumí poradit. Můžete se setkat s různými formulacemi, ale v zásadě jsou všechny totožné. Známy je tzv. paradox hromady. Jde o to, že bychom v klasické dvouhodnotové logice chtěli namodelovat situaci hromady, ke které přidáváme kameny. Víme, že hromada bez kamenů je rozhodně malá. Dále je rozumný předpoklad, pokud máme malou hromadu kamenů, pak hromada s přidaným jedním kamenem bude stále malá. V klasické logice, kde jsou formule pravdivé nebo nepravdivé, by pak každá

hromada byla paradoxně malá. Můžeme totiž potenciálně nekonečnou sekvencí implikací vždy dokázat, že hromada s počtem kamenů o x větším je stále malá. Ve fuzzy logice můžeme díky pravdivosti s určitým stupněm příslušnosti namodelovat tuto situaci dvěma formulemi (použijeme predikát $malahromada(t)$, kde t je počet kamenů v hromadě):

1. $malahromada(x) \rightarrow malahromada(x+1)$ – pravdivá ve stupni 0.999
2. $malahromada(0)$ – pravdivá ve stupni 1

Formule 1. není narozdíl od klasické logiky pravdivá zcela a díky tomu nedojde k paradoxní dedukci. Díky omezené pravdivosti bude při dedukci s každou aplikací formule 1. při navyšení počtu kamenů o 1 klesat pravdivost vyvozeného predikátu $malahromada$ o 0,001. Chtěli bychom například ověřit stupeň pravdivosti důsledku $malahromada(1)$ z předpokladů 1. a 2. Platí-li formule 1. na 0,999 a formule 2. na 1, pak můžeme na základě definice operátoru $\rightarrow$ interpretace (I) implikace a platného vztahu:

$$I(malahromada(0)) = 1$$

sestavit rovnici:

$$0.999 = 1 \wedge (1 - 1 + I(malahromada(1))) \Rightarrow I(malahromada(1)) = 0.999$$

Pro $malahromada(2)$:

$$0.999 = 1 \wedge (1 - 0.999 + I(malahromada(2))) = 0.001 + I(malahromada(2)) \\ \Rightarrow I(malahromada(2)) = 0.998$$

A tak dále pro zvětšující se počet kamenů, až pro $malahromada(1000)$ bychom došli ke stupni pravdivosti 0.

Fuzzy logika umožňuje pracovat s neurčitou informací a je zobecněním klasické logiky. Klasická logika je vlastně speciální případ fuzzy logiky. Stejně jako mnoho jiných zobecnění, přináší i fuzzy logika řadu problémů, které klasická logika nemá. Například používání rezolučního pravidla je zde velmi omezeno, protože neexistuje univerzální postup převodu do formy klauzulí. Jde o problém aktuálně řešený například i na Ostravské Univerzitě (viz [1]). Čtenář s hlubším zájmem se může na počáteční výzkumy v této oblasti informovat v elektronicky dostupném článku (doporučujeme zejména příklady).

Zajímavé jsou také aplikace teorie fuzzy množin a fuzzy logiky, například existuje přístup s využitím tzv. lingvistických proměnných (viz [5]). Tyto proměnné mohou místo klasických číselných hodnot nabývat hodnot blízkých přirozenému jazyku jako jsou například lingvistické výrazy typu: „velmi malý“, „zhruba střední“ atd. Pomocí těchto proměnných pak lze

modelovat velmi srozumitelně a podobně jako člověk reálné situace. Například lze popisovat řízení auta, kde dvě z pravidel by mohla znít: **KDYŽ** na semaforu svítí jen žluté světlo **A ZÁROVEŇ** vzdálenost od křižovatky je **malá** **A ZÁROVEŇ** rychlost auta je **malá** **PAK** sešlápní brzdu **střední** silou

KDYŽ na semaforu svítí jen žluté světlo **A ZÁROVEŇ** vzdálenost od křižovatky je **velmi malá** **A ZÁROVEŇ** rychlost auta je **střední** **PAK** sešlápní plyn **velkou** silou

Tato pravidla jsou pak interpretována pomocí fuzzy logiky a můžeme díky nim velmi lehce modelovat a zejména automatizovat postupy z mnoha oblastí života. Existují systémy, které se v praxi skutečně používaly a používají jako je systém LFLC (Linguistic Fuzzy Logic Controller) vyvinutý rovněž na Ostravské Univerzitě. Pomocí něj se modelovaly například technologické procesy v hutích a oproti klasickým prostředkům jsou velkým vylepšením. Lze totiž na rozdíl od klasických regulačních technik, které vyžadují složitou matematiku jako jsou diferenciální rovnice a se kterými může pracovat jen velmi úzká skupina odborníků, tyto systémy svěřit i poučenému laikovi. Ten dobře zná například svůj technologický proces, který ručně obsluhoval dlouhou dobu a je schopen formulovat slovně své akční zásahy. Ty pak stačí naformulovat a odzkoušet a máme ve velmi krátkém čase funkční automatizaci daného procesu, založenou na fuzzy logice.

4. Závěr

Logika, problém dedukce a její automatizace se vyskytuje v mnoha oblastech života. Je nedílnou součástí matematiky a informatiky a proto by se výuka logiky měla odrazit nejen ve výuce matematiky na středních školách, ale právě díky problému automatizace dedukce by měla být alespoň v omezeném rozsahu i součástí informatické výuky. Výroková logika a systémy dedukce pro ni nejsou pro středoškolské studenty nedostupné, jak jsme se snažili ukázat na teorii i příkladech. S pomocí počítačových programů si student navíc může mnohem rychleji osvojit principy dokazování důsledků a to na populárních příkladech.

Logika, a to nejen vícehodnotová, ale i klasická, není v žádném případě ustrnulá disciplína. Právý opak je pravdou a i jejich teorie se dynamicky vyvíjí právě v této době. Aplikace založené na vícehodnotové logice se dostávají již do civilního života. V současné době je velmi aktuální problém, jak lépe reprezentovat znalosti na Internetu. V současnosti zavedené možnosti reprezentace a vyhledávání informací jsou spíše syntaktického cha-

rakteru a postrádají tedy svůj smysl. Takzvaný projekt sémantického webu má za cíl dát jazyk a metody pro dedukci, které dokáží dát webovským stránkám i smysl – logiku. Jeden z nadějných pokusů je založen právě na tzv. Deskripční logice, která je v principu „odlehčenou“ verzí predikátové logiky. I proto tuto aktuálnost a perspektivitu si logika a dedukce zaslouží své místo ve výuce.

Literatura

- [1] *Habiballa, H.*: Non-clausal resolution theorem proving for fuzzy predicate logic. výzkumná zpráva Ústavu pro výzkum a aplikace fuzzy modelování OU č. 70, 2005, dostupné na: <http://ac030.osu.cz/irafm/ps/rep70.ps.gz>
- [2] *Habiballa, H.*: Prolog. studijní text, Ostravská Univerzita, 2004, dostupné na: <http://www.volny.cz/habiballa> (odkaz Výuka → PROLOG).
- [3] *Habiballa, H. – Kmeř, T.*: Vyčíslitelnost a složitost. MFI 15 (2005 – 06), č. 2 a 3.
- [4] *Lukasová, A.*: Formální logika v umělé inteligenci. Computer Press, Brno, 2003.
- [5] *Novák, V.*: Základy fuzzy modelování. BEN-technická literatura, Praha, 2000.
- [6] *Pavlíšková, L.*: Principy dedukce ve výrokové logice – výukový program. diplomová práce, Ostravská Univerzita, 2003.
- [7] *Talašová, J.*: Fuzzy množiny – nástroj matematického modelování vágnosti. MFI 7 (1997 – 98), č. 9 a 10.
- [8] *Volná, E.*: Umělá inteligence ve výuce informatiky. Sborník konference ICTE 2001, Rožnov pod Radhoštěm, 2001.

(Dokončení ze s. 576)

Profesor Poggendorff v časopise „*Poggendorff's Analen*“ komentoval Ohmův omyl poznámkou: „Bylo by žádoucí, aby si autor našel volnou chvíli a podnikl svá vyšetření pomocí termoelektrického článku, jehož působení je mnohem stálější...“ Ohm v roce 1826 této rady uposlechl a provedl řadu měření proudů ve vodičích různých délek a z různých kovů, připojených na termočlánek měď – vizmut.

Teprve po deseti letech jako jeden z prvních ocenil přínos Ohmova objevu, vedle E. Lenze v Rusku a J. Henryho

v Americe, právě vlivný berlínský učenec, člen Berlínské AV a člen-korespondent Petrohradské AV, J. Ch. Poggendorff. On sám se zabýval především otázkami elektrických měření (vnitřního odporu článků, elektromotorických sil aj.) a pro tyto účely zkonstruoval a zdokonalil různé elektromagnetické měřicí přístroje, jejichž princip je využíván dodnes: kolem roku 1821 to byl jehlový galvanoměr (měřič proudu) a v roce 1841 vynalezl první použitelný ohmmetr, ale také sinusovou a tangentskou buzu, multiplikátor aj.

Bohumil Tesařík