

Logika

HASHIM HABIBALLA – LIBUŠE PAVLISKOVÁ – TIBOR KMEŤ

Přírodovědecká fakulta OU, Ostrava – Gymnázium Olgy Havlové, Ostrava–Poruba –
Fakulta přírodních vied UKF, Nitra

Logika je oproti jiným disciplínám teoretické informatiky vědou velmi starou a její kořeny lze najít již ve starověku. Tehdy byla spjata spíše s filozofickými otázkami než s rodící se matematikou. Přesto otázky, které byly v té době aktuální, jsou v mnohém stejné jako je uplatnění logiky v informatice. Na logiku je možné se dívat v kontextu mnoha věd a výsledný pohled může být velmi odlišný. Touto vědou se zabývají filozofové, právníci, matematici i informatici a jejich zájem a cíl bývá velmi odlišný. Čtenář může sám posoudit, jak odlišné mohou tyto pohledy být – stačí si pročíst například filozoficky a informaticky orientovanou knihu o logice. Přesto lze najít společnou snahu o **modelování lidského úsudku**. I když matematik logiku spíše používá k formulaci a dokazování vlastností matematických objektů, pro informatika je logika nejen nástrojem, ale i plnoprávnou disciplínou zkoumanou v rámci teoretické informatiky.

Přístupy při modelování úsudku založené na logice patří do rodiny symbolických přístupů, existují pak také tzv. konekcionistické přístupy (např. umělé neuronové sítě), ale těmito přístupy se nebudeme zabývat (viz [8]). Tyto přístupy se často inspirojí biologickými procesy a snaží se je modelovat matematicky. Často se objevují také velmi úspěšné kombinace obou přístupů.

Díky své bohaté historii je samozřejmě logika velmi širokým oborem a v tomto článku bychom se chtěli zabývat několika důležitými otázkami z informatického pohledu.

1. Reprezentace znalostí klasickou logikou – výroková a predikátová logika.
2. Automatizovaná dedukce – formální systémy pro dokazování vět.

3. Vícehodnotová logika – možnosti modelování neurčitosti pomocí fuzzy logiky.

Chceme opět jako v předchozích článcích zdůraznit, že nám nejde o vytvoření rigorózní monografie, ale o text, který čtenáři přinese chuť do dalšího studia i do výuky logiky. Doporučujeme velmi inspirativní a přitom vysoce odbornou infromatickou monografii [4].

1. Reprezentace znalostí klasickou logikou

Klasickou logikou myslíme formalismus, který je v různých podobách znám již stovky let. Lidé jsou schopni komunikovat a formulovat své myšlenky v přirozeném jazyce a dále je zpracovávat a **dedukovat závěry**. Právě přirozený jazyk je však poměrně složitý pro stroje, které by měly simulovat tento způsob reprezentace znalostí. Proto logika nabízí různé úrovně zjednodušení formulace znalostí do co nejmenšího množství exaktně definovaných symbolů. Druhou stránkou je motivace, abychom z těchto statických znalostí reprezentovaných symboly dokázali také odvozovat závěry. K tomu slouží různé symbolické metody, z nichž některé si popíšeme v tomto článku. Provedme analogii s právními předpisy. Samotné zapsané zákony jsou sice velice užitečné, ale k čemu by nám byly, pokud by nebylo možné je interpretovat a zjišťovat, zda se například některý subjekt nedopustil porušení zákona. To můžeme provést jedině tak, že dedukujeme závěr (zda někdo jedná protizákonně nebo ne) z předpokladů (fakta popisující situaci a dané zákony).

Nejjednodušším formalismem vhodným pro reprezentaci znalostí je výroková logika. U každé logiky si musíme uvědomit, že má svou **syntaxi** a **sémantiku**. Zjednodušeně můžeme říci, že syntaxe je definicí symbolů a jejich používání (bez ohledu na význam těchto symbolů). Sémantika je pak chováním těchto symbolů s ohledem na smysl daných znalostí (např. pravdivost daných tvrzení). Právě možnost oddělit syntaxi a sémantiku, po formulaci a dokázání potřebných vztahů mezi nimi, dává logice význam v informatice a pro automatizaci úsudku.

Syntaxe výrokové logiky pracuje se symboly zastupujícími elementární výroky (např. $a, b, c, \dots$), logické konstanty (pravda a nepravda – $\top, \perp$) a dále je umožňuje spojovat do složitějších formulí pomocí symbolů logických **spojek** a pomocných symbolů (např. $\wedge$ konjunkce, $\rightarrow$ implikace). Sémantika pak popisuje smysl těchto použitých symbolů a pojmy, které souvisejí s popisem tohoto smyslu (tzv. interpretací formulí – v případě

klasické logiky to může být buď formule pravdivá nebo nepravdivá). Jednotlivým výrokům můžeme přiřadit logickou hodnotu podle toho, jak se tyto syntaktické elementy chovají v našem modelovaném případě z reality, příp. to můžeme udělat také zcela nesmyslně. V obou případech pak můžeme uvažovat jaká bude interpretace celých složených formulí. Zaleží to na použitých unárních a binárních spojkách. Čtenář se zřejmě setkal se spojkami jako je negace $\neg$ (opak ve smyslu pravdivosti), konjunkce $\wedge$ (současná platnost výroků), disjunkce $\vee$ (platnost alespoň jednoho z výroků), implikace $\rightarrow$ (podmínka), ekvivalence $\leftrightarrow$ (identická pravdivost výroků). Binárních spojek existuje samozřejmě více – v elektrotechnice se kupříkladu používají spojky jako je negace konjunkce (nand). Formule tedy v tomto případě platí (je interpretována jako pravdivá), pokud neplatí dva výroky současně (jinak řečeno pokud alespoň jeden neplatí). Druhým případem, který se zase vyskytuje často v reálných situacích je tzv. vylučovací nebo. V přirozené řeči často používáme výrok typu „buď ... anebo ...“, který spíše odpovídá situaci, že musí platit alespoň jeden z výroků, ale zároveň nesmí platit oba současně. Nejde tedy o disjunkci, ale spojku, kterou někdy také označujeme jako negaci ekvivalence. Interpretaci logických spojek můžeme přehledně realizovat pomocí tabulky, ve které jsou vypsaný všechny možné kombinace ohodnocení pravdivosti elementárních výroků. Interpretaci pravda označíme 1 a nepravda 0.

Podívejme se na příklad identického chování negace ekvivalence a vylučovacího nebo.

výrok A	výrok B	vylučovací nebo	ekvivalence	negace ekvivalence
0	0	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0

V klasické logice existuje pouze konečný (a navíc velmi omezený) počet spojek. Stačí se zamyslet nad všemi možnostmi, které mohou nastat a dojdeme k tomu, že pro 2 výroky ohodnocené 4 možnostmi pravda/nepravda existuje 2^4 možností dvouhodnotové interpretace tedy 16 možných spojek.

Sémantika jazyka výrokové logiky umožňuje na základě interpretace formule definovat další důležité pojmy.

Pokusme se nyní na příkladu namodelovat pomocí výrokové logiky jednoduchou situaci.

Příklad 1:

K soudu byli předvedeni tři podezřelí z loupeže – A, B a C. Při výslechu se zjistily tyto skutečnosti:

1. Do případu nebyl zapleten nikdo jiný než A, B a C.
2. A pracuje vždycky alespoň s jedním společníkem.
3. C je nevinen.

Nejprve si musíme stanovit, co jsou elementární výroky. Jelikož se vyjadřujeme k vině a nevině podezřelých, bude rozumné pomocí výroků A , B a C symbolizovat, že daný podezřelý je vinen nebo nevinen. Pak můžeme zapsat větu 1. jako složený výrok vyjadřující pomocí disjunkce, že alespoň jeden z podezřelých je vinen. Druhá věta může být popsána formulí pomocí implikace (podmínky), která říká, že je-li vinen A, pak musí být vinen také alespoň jeden z podezřelých B, C. Výsledné formule výrokové logiky jsou tedy následující:

1. $A \vee B \vee C$, 2. $A \rightarrow (B \vee C)$, 3. $\neg C$

Samotná reprezentace znalostí je pouze polovičním úspěchem při pokusu o modelování úsudku. Dalším nevyhnutelným krokem je možnost ověřovat, zda nějaké tvrzení vyplývá z daných předpokladů. K tomu si nejprve musíme definovat další pojmy sémantiky. Jde o tzv. **splnitelnost** (nesplnitelnost) a **platnost** formulí. Splnitelná formule je laicky řečeno taková, která má vůbec smysl pro určité ohodnocení výroků. Tedy taková formule musí alespoň pro nějakou kombinaci ohodnocení výroků pomocí pravda/nepravda dávat interpretaci pravda. Jinak je taková formule nesplnitelná resp. v logice se takové formulí říká kontradikce. Pokud bychom se obrátili zpátky na interpretační tabulku, pak by tabulka ve sloupci interpretace splnitelné formule musela mít alespoň v jednom řádku symbol 1. Některé ze splnitelných formulí pak mohou být ještě na vyšším sémantickém stupni a mohou být pravdivé pro všechna možná ohodnocení. Takovým formulím se pak říká platná formule resp. v logice je zažitý pojem tautologie. Podívejme se na příklad.

Příklad 2:

Mějme platné tvrzení: „Pokud prší, беру si deštník.“ Jestliže namodelujeme tvrzení, že „prší“ pomocí P a „беру si deštník“ pomocí D , pak výsledná formule je následující: $P \rightarrow D$

Uvažujme nyní o výroku: „Pokud si neberu deštník, neprší.“ Je takové tvrzení ekvivalentní prvnímu? Platí-li první tvrzení, mohu ho brát jako

postulát, kterému se každý musí podřídít. Zdá se tedy logické, že když si deštník neberu a dodržuji přitom postulát, pak nemůže pršet. Mnohem formálněji bychom tento vztah mohli dokázat právě pomocí pojmu tautologie. Druhá forma tvrzení se dá zapsat jako $\neg D \rightarrow \neg P$. Pak využijeme spojky ekvivalence, která interpretuje jako pravdivé dvě formule se stejnou pravdivostní hodnotou a tedy vlastně popisuje ekvivalentní chování dvou formulí z hlediska pravdivosti. Sestrojíme tedy takovou formuli a prokážeme, že je to tautologie pomocí interpretační tabulky. Implikace je nepravdivá pouze pro případ, kdy první formule je pravdivá a druhá nepravdivá – to je v souladu s naším chápáním podmínky. Pokud je splněn předpoklad podmínky, pak závěr musí platit – jinak by nebyla formule pravdivá. V případech kdy podmínka splněna není, může i nemusí závěr platit a v obou případech je to v pořádku. Jelikož sestavená ekvivalence obou formulí je pravdivá ve všech interpretacích, můžeme konstatovat, že jde opravdu o tautologii.

P	D	$P \rightarrow D$	$\neg D$	$\neg P$	$\neg D \rightarrow \neg P$	$(P \rightarrow D) \leftrightarrow (\neg D \rightarrow \neg P)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Nyní se již konečně dostáváme ke klíčovému pojmu tzv. **logického důsledku** množiny předpokladů. Máme-li množinu předpokladů a závěr, můžeme se ptát, zda tento závěr je logickým důsledkem (vyplývá z) předpokladů. To platí v případě, že pro každé ohodnocení výroků s interpretací pravda pro všechny formule z množiny předpokladů je pravdivá také formule reprezentující závěr. Jde tedy o chování podobné implikaci. Závěr nebude logicky vyplývat z předpokladů, jen pokud se najde takové ohodnocení výroků, kdy všechny předpoklady jsou pravdivé a závěr není pravdivý. Tato činnost, kdy odvozujeme závěry, se nazývá dedukce. Důležitým faktorem pak ještě zůstává tzv. konsistence předpokladů. Jde o to, že formulovaná vlastnost vyplývání degraduje na triviální situaci, pokud předpoklady nemají žádné ohodnocení, ve kterém by byly současně pravdivé. Takovéto množiny předpokladů jsou sporné (nekonsistentní) a z hlediska definice důsledku, je důsledkem této množiny jakákoliv formule. To samozřejmě v realitě není zcela odpovídající. Jednalo by se například o situaci, kdy

určitý balík zákonů obsahuje dvě navzájem protichůdná nařízení a podle této množiny by pak jakékoliv jednání bylo v souladu s tímto zákonem.

Příklad 3:

Pokusme se nyní jednoduše pomocí tabulky prověřit, zda z množiny předpokladů z příkladu 1. vyplývá vina či nevina některého z podezřelých. Můžeme vyloučit podezřelého C, protože jeho nevina je přímo obsažena v předpokladech a tudíž musí vyplývat z množiny předpokladů a zároveň nemůže vyplývat jeho vina, pokud není množina předpokladů sporná. Postačí tedy sestavit tabulku pro jednotlivé předpoklady a pro formule $A, \neg A, B, \neg B$ ověříme, zda nesplňují vlastnost důsledku. V tabulce se vyskytuje také sloupec s hvězdičkami, který zvýrazňuje ohodnocení, kde jsou všechny předpoklady platné a tedy v těchto řádcích musíme kontrolovat interpretaci potenciálního důsledku. U závěrů pak vyznačujeme pomocí hvězdičky resp. lomítkem, zda skutečně splňuje resp. nesplňuje formule podmínku důsledku. Pokud ji splňují všechna zvýrazněná ohodnocení jde skutečně o vyvoditelný logický důsledek.

A	B	C	$A \vee B \vee C$	$A \rightarrow (B \vee C)$	$\neg C$		A		$\neg A$		B		$\neg B$	
0	0	0	0	1	1		0		1		0		1	
0	0	1	1	1	0		0		1		0		1	
0	1	0	1	1	1	*	0	/	1	*	1	*	0	/
0	1	1	1	1	0		0		1		1		0	
1	0	0	1	0	1		1		0		0		1	
1	0	1	1	1	0		1		0		0		1	
1	1	0	1	1	1	*	1	*	0	/	1	*	0	/
1	1	1	1	1	0		1		0		1		0	

Z tabulky je patrné, že jediný logický důsledek z prověřovaných závěrů je, že B je vinen. O podezřelém A nemůžeme konstatovat na základě předložených předpokladů ani jeho vinu ani nevinu. Vezmeme-li v úvahu možnost, že A je vinen, pak by musel být vinen i B. Pokud A vinen není, zároveň C vinen není dle předpokladu a někdo vinen být musí, pak padá vina na B. B je tedy vinen v každém případě a o A nás ale nic neopravňuje to tvrdit.

Na uvedeném příkladu dedukce může ilustrovat hned několik klíčových otázek a problémů, které s logikou a naším článkem souvisí.

1. Pomocí přesně definovaných postupů jsme schopni dedukovat důsledky zcela automatizovaně a to zvládnou nejen lidé, ale zejména je to vhodné pro stroje (počítače). Už námi řešený příklad nemusí být pro každého člověka jednoduchý a složitost dedukce roste jednak s počtem výroků a jednak s počtem předpokladů. Už z těchto důvodů nejsou prostředky logiky zbytečné.

2. Problém automatizované dedukce lze řešit různě efektivní metodami. V tomto článku jsme se setkali prozatím jen s tabulkovou metodou, která je sice velmi triviální a dokonce si asi čtenář dokáže představit, že by takovýto algoritmus dokázal naprogramovat, nicméně její jednoduchost je také její slabinou. Už na příkladu 2 a 3 můžeme vidět, že rozsah tabulky roste exponenciálně vzhledem k počtu elementárních výroků. S ohledem na poznatky teorie vyčíslitelnosti a složitosti [3] víme, že exponenciální časová a prostorová složitost je pro klasické deterministické počítače prakticky nepoužitelná. Už pro 10 výrokových proměnných je možností ohodnocení přes 1000, pro 20 přes milion atd . . . Proto bylo a stále je vyvíjeno mnoho různorodých metod a celých formálních systémů, které jsou schopny automatizovat dedukci mnohem efektivněji.

3. Klasická výroková logika je jednou z nejjednodušších logik, což má své výhody i nevýhody. Výhodou je její transparentnost, pochopitelnost a především vlastnost rozhodnutelnosti [3]. Rozhodnutelnost ve smyslu schopnosti o dané formulaci říci jednoznačně, zda je splnitelná nebo ne na základě algoritmu, je důležitou vlastností pro automatizaci dedukce. Složitější logiky tuto vlastnost mít nemusejí. Nevýhodou výrokové logiky je naopak neschopnost rozlišit objekty a vztahy mezi nimi, nemožnost kvantifikovat vztahy, pojmut proměnlivost pravdivosti v čase a podobně. V neposlední řadě je u klasických logik nevýhodou jejich „černobílé vidění světa“. Myslíme tím neschopnost zachytit jinou než absolutní pravdivost nebo nepravdivost. V reálném životě je mnoho situací, které nelze popsat jednoznačně. Například to zda je člověk spokojený, lze stěží popsat jen výrokem pravdivým nebo nepravdivým. Člověk může být spokojený v určitém stupni spokojenosti. Proto se v tomto článku chceme dotknout i tématu vícehodnotových logik, které jsou nyní velmi intenzivně zkoumány.

Ještě než se budeme blíže zabývat otázkou automatizace dedukce, chtěli bychom také stručně popsat logiku predikátovou. Predikátová logika je v podstatě zobecněním logiky výrokové a dává ji schopnost pracovat nejen s elementárními výroky, ale také rozlišit objekty a jejich vztahy. Na syntaktické úrovni se zavádí pojem termu a formule. Termem může být buď symbol zastupující objekt (konstanta) nebo funkci (funktor) nebo proměnná, za kterou lze dosadit libovolný term. Klíčovým pojmem je predikát, který jako argumenty může mít termy a tím vlastně umožňuje vytvářet vazby mezi termy. Například bychom chtěli prostřednictvím predikátu zachytit vazby mezi rodiči a jejich dětmi. Zavedli bychom predikát s názvem dítě, který má dva argumenty – dítě a jeho rodiče. Samozřejmě pracujeme se symboly, takže skutečnými argumenty jsou pouze konstanty reprezentující objekty – konkrétní děti, rodiče atd. Konstanty jsou nejjednoduššími termy. Termy tedy nevyjadřují rozdíl od predikátů vazby, ale zastupují symbolicky objekty modelované reality. Takovými konstantami by mohla být například jména dětí a jejich rodičů. Tedy bychom mohli sestavit velmi jednoduchou formuli dítě(johana, lucie), která by měla pomocí predikátu vyjadřovat znalost, že mezi symbolem reprezentujícím objekty johana a lucie je vztah dítěte a rodiče. Termy mohou být však složitější a to funktory a proměnné. Funktory jsou symbolickými ekvivalenty pro nám dobře známé funkce. Funkce může mít několik argumentů (opět termů) a její interpretací je pak požadovaná hodnota. Například goniometrická funkce $\cos$ by pro argument – symbol 0 (intepretovaný číslem 0) – vracela číslo 1 ($\cos(0) = 1$). Proměnné pak jsou symbolickým prvkem, do kterých mohou být dosazeny jiné termy. Jelikož interpretace termů a predikátů zaleží (rozdíl od logických spojek) na uživateli predikátové logiky, mohl by si sémantiku uživatel uzpůsobit dle svých požadavků. Mohl by tedy vytvořit absurdní intepretace, kde by například funkce s názvem $\cos$ byla interpretována pro argument – číslo 0 – třeba číslem 333 nebo zcela nečíselným objektem. Chceme tím říci, že predikátová logika je velmi flexibilní a je potřeba mít stále na paměti rozdíl mezi syntaxí a sémantikou. Symboly mají své interpretace (sémantiku), kterou v případě logiky predikátové značně ovlivňuje ten, kdo ji používá. A i pod zcela totožnými symboly se tak může skrývat (nekonečně) mnoho různých významů.

Predikát může ze sémantického hlediska nabývat opět hodnotu pravda nebo nepravda. Jeho sémantickým operátorem je relace. Od úrovně predikátů výše se pak formule chovají jako ve výrokové logice a můžeme je tedy spojit pomocí logických spojek. Jediným rozdílem je, že můžeme formule

kvantifikovat a to buď univerzálním ($\forall x$) resp. existenčním ($\exists x$) kvantifikátorem. Ty pro zvolenou proměnnou pak zaručují, že kvantifikovaná formule bude pravdivá pro všechny resp. alespoň jeden objekt dosaditelný za proměnnou x .

Příklad 4:

Chtěli bychom pomocí predikátové logiky namodelovat situaci, kdy libovolné dítě je šťastné, pokud má otce i matku. Zavedli bychom si predikátové symboly pro vlastnosti objektů – stastny, muz a zena a dále pro vztah být dítětem někoho – dite. Pomocí formule 1. pak můžeme vyjádřit, že pro každé dítě, ke kterému existuje objekt, jenž je ženou a zároveň dítě je dítětem tohoto objektu a zároveň platí totéž pro objekt typu muž, pak platí, že toto dítě je šťastné. Mnohem jednodušší je pak vyjádřit, které objekty jsou dítě, žena atd.. (např. johana je dítě lucie – formule 2. – 5.).

1. $\forall X [\exists Y [dite(X, Y) \wedge zena(Y)] \wedge \exists Y [dite(X, Y) \wedge muz(Y)] \rightarrow stastny(X)]$.
2. $dite(johana, hashim)$.
3. $dite(johana, lucie)$.
4. $muz(hashim)$.
5. $zena(lucie)$.

Můžeme pozorovat, že predikátová logika má mnohem vyšší expresivitu (vyjadřovací schopnost) než logika výroková. Zásadní je především možnost modelovat vazby mezi objekty pomocí predikátů. Silným prvkem je rovněž schopnost modelovat existenci. Formule 2. – 5. z příkladu mohou připomínat řádky relační databáze. Relační databáze jsou založeny na prezentaci znalostí v relacích, které modelují rovněž vztahy mezi objekty. Skutečně bychom našli jistou analogii mezi tabulkou databáze (např. tabulka dětí) a jejich atributy (kdo je dítětem koho). Zkuste si představit databázovou tabulku studentů s atributy jméno, příjmení, bydliště, ročník. Taková tabulka relační databáze se dá vyjádřit predikátem student. Databáze by pak obsahovala třeba následující řádky (a jejich ekvivalentní vyjádření v predikátové logice):

jan, novák, ostrava, 3 $\sim$ formule: student(jan, novák, ostrava, 3)

jan, veselý, ostrava, 4 $\sim$ formule: student(jan, veselý, ostrava, 4)

jiří, novák, ostrava, 1 $\sim$ formule: student(jiří, novák, ostrava, 1)

...

petr, novotný, praha, 2 $\sim$ formule: student(petr, novotný, praha, 2)

Klasické relační databáze jsou ale velmi úzkou podmnožinou způsobu reprezentace pomocí predikátové logiky. V databázích nemáme možnost používat proměnné a zejména logické spojky. Ty dokáží ušetřit mnoho prostoru – co by se muselo v databázi vyjádřit explicitně (třeba tisíci relacemi), lze elegantně zapsat jedním pravidlem a aplikovat dedukci. Samozřejmě, že již dávno začaly snahy o přibližování databázové technologie a logiky a to v tzv. deduktivních databázích (např. systém Datalog). Jde o inteligentní databáze, které kromě klasického explicitního vyjmenování vztahů umožňují také používání omezených logických prostředků a dedukce.

Jak už to ale bývá téměř všude v reálném životě, za výhody se platí určitými nevýhodami. Zatímco u výrokové logiky lze vždy rozhodnout (různě efektivně) o splnitelnosti dané formule, v predikátové logice je tento problém pouze částečně rozhodnutelný. Hlavním viníkem je potenciální možnost pracovat s nekonečnými doménami objektů (např. množina přirozených čísel – lze dosazovat za proměnné jakékoliv číslo). Potenciálně existuje možnost vytvořit také o něco složitější interpretační tabulku jako u logiky výrokové, ovšem takováto tabulka může být nekonečná. V případě univerzální kvantifikace formule musí tato formule platit pro všechny možné dosaditelné konstanty. Těch ale může být ve vztahu k nekonečným doménám také nekonečně mnoho a tudíž bych dostali tabulku s nekonečným počtem řádků. Proto existují snahy predikátové logice „něco vzít“, tj. odebrat jí některé vyjadřovací schopnosti při zachování některých výhod tak, aby se stala rozhodnutelná a zároveň existovaly efektivní algoritmy pro dedukci.

Literatura

- [3] *Habiballa, H. – Kmeť, T.*: Vyčíslitelnost a složitost. MFI 15 (2005 – 06), č. 2 a 3.
- [4] *Lukasová, A.*: Formální logika v umělé inteligenci. Computer Press, Brno, 2003.
- [8] *Volná, E.*: Umělá inteligence ve výuce informatiky. Sborník konference ICTE 2001, Rožnov pod Radhoštěm, 2001.

(Pokračování)

Dělení polynomů

REDAKCE

Dělení polynomů $P(x)$, $Q(x)$ s racionálními (celými) koeficienty je jedna z běžných algebraických úloh. Jde tedy o vyjádření $P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$, neboli

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je (neúplný) podíl a $R(x)$ zbytek stupně menšího než je stupeň dělitele $Q(x)$.

Tato úloha se vyskytuje třeba v matematické analýze při integrování racionálních lomených funkcí. Máme-li např. vypočítat $I = \int \frac{2x^3 - 5x^2 + 12}{x^2 - 4} dx$, kde tedy

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12, \quad Q(x) = x^2 - 4,$$

provedeme dělení $(2x^3 - 5x^2 + 12) : (x^2 - 4)$. Dostaneme podíl $A(x) = 2x - 5$ a zbytek $R(x) = 8x - 8 = 8(x - 1)$ a daný integrál se tak převede na integrování

$$I = \int (2x - 5) dx + 8 \int \frac{x - 1}{(x - 2)(x + 2)} dx$$

Nám však nyní půjde o vytvoření počítačového programu pro dělení polynomů. Každý polynom n -tého stupně lze vyjádřit jako $(n + 1)$ -tici koeficientů, např. v našem příkladu lze $P(x)$ vyjádřit jako čtveřici $(2, -5, 0, 12)$, podobně lze vyjádřit i $Q(x)$ jako trojici $(1, 0, -4)$ a ovšem i výsledky $A(x)$ a $R(x)$ zde jako dvojice $(2, -5)$, $(8, -8)$. Formulujeme úlohu:

Sestavte program, který z klávesnice načte koeficienty (typu Integer) polynomů (dělitele i dělence) vždy od nejvyšší mocniny po absolutní člen a to tak, že oddělovacími znaky koeficientů budou mezery a absolutní člen ukončíme klávesou Enter. Program pak vypočte a zobrazí koeficienty podílu a zbytku dělení. Neprovádět kontroly a volit minimální konverzaci.

Uvádíme dále jedno z možných řešení:

```
program DelPol;  
{Deleni polynomu s celymi koeficienty}
```

```

var
  P, Q, A, R: array [0..20] of Integer;
  N, M, I, J, K: Integer;

begin
  Write('Deleni polynomu: ');
  N := -1; {nacteni delence}
  while not Eoln do
    begin
      Inc(N);
      Read(P[N]); R[N] := P[N]
    end;
  ReadLn;
  Write('Polynomem: ');
  M := -1; {nacteni delitele}
  while not Eoln do
    begin
      Inc(M);
      Read(Q[M])
    end;
  ReadLn;
  if N >= M then {provedeni deleni}
    begin
      for I := 0 to N - M do
        begin
          A[I] := R[I] div Q[0];
          for J := I to M + I do
            R[J] := R[J] - A[I] * Q[J - I]
          end
        end;
      end;
  K := -1; {zjisteni formatu zbytku}
  repeat
    Inc(K)
  until (R[K] <> 0) or (K = N);
  Write('Podil: '); {vystup vysledku}
  if N >= M then
    for I := 0 to N - M do Write(A[I], ' ')
  else Write(0);

```

```

WriteLn;
Write('Zbytek: ');
  for I := K to N do Write(R[I], ' ');
WriteLn;
ReadLn
end.

```

Vyzkúšajte, zda by někteří z vašich studentů našli zde použitý nebo i jiný algoritmus pro dělení polynomů. Seznamte je s tímto programem, mohou pak přicházet s nápady, jak tento program doplnit či vylepšit. Například se mohou pokusit doplnit ve výpisu mocniny x , takže by náš hořejší příklad vystoupil na obrazovku takto:

$$(2x^3 - 5x^2 + 12) : (x^2 - 4) = 2x - 5, \text{ zbytek } 8x - 8$$

Jaké úpravy by byly zapotřebí, kdyby se požadovaly koeficienty typu Real?

$$e^x + x$$

JOZEF HVORECKÝ

City University Bellevue, Bratislava

V ľudskom živote sú chvíle, keď zo zdanlivo nepatrného podnetu sa začne pochybovať o účinnosti celého systému. Niečo také sa mi stalo nedávno a začalo to úplne nevinne.

V rámci matematiky sa na vysokých školách ekonomického typu preberajú funkcie. Hoci úroveň študentov je rôznorodá, pretože pochádzajú z niekoľkých typov škôl, najlepším z nich nerobí žiaden problém vyriešiť ktorúkoľvek úlohu z učebnice. Preto som nezaváhal, keď som v nej našiel úlohu: „Načrtnite graf funkcie $y = e^x + x$ “ a zaradil som ju do písomky.

Na moje prekvapenie úlohu nikto nevyriešil. Mnohí študenti (počas analýzy úlohy) správne načrtli grafy funkcií $y = e^x$ aj $y = x$, ale k zobrazeniu ich súčtu sa nedopracoval nikto. Na najbližšej hodine sme preto úlohu začali riešiť. Vyzeralo to asi takto: „Ide nám o náčrt, takže nepatrné rozdiely v hodnotách funkcie zanedbáme.“ (Súhlas). „Pozrime sa najprv vľavo na

číselnú os. Ak je exponent záporný, e^x je veľmi malá kladná hodnota, takže do súčtu nijako podstatne neprispieva.“ (Spontánny súhlas.) „Teda, až po nulu sa suma oboch funkcií rovná prakticky x .“ (Súhlas, zďaleka však nie už tak spontánny. Reakciu naň som si však odložil na neskôr.) „Pozrieme sa teraz viac doprava. Funkcia e^x rastie veľmi rýchlo – už e^3 je zhruba 20. Ak k tomu pripočítame 3, dostaneme 23 – vzhľadom na to, že ide o náčrt, opäť nepatrný rozdiel.“ (Prebudenie klesajúceho záujmu, ďalší spontánny súhlas.) „S rastúcimi kladnými hodnotami x rastie e^x čoraz rýchlejšie. Príspevok od x je teda čoraz menej podstatný a preto súčet funkcií v kladnej časti osi x je prakticky zhodný s e^x .“ (Údiv, nepochopenie, protesty.)

Bol najvyšší čas začať reagovať. Zobral som laptop, ktorý si nosím na každú prednášku, spustil Excel a ukázal „dobrú zhodu“ mnou propagovaných dát s priebehom funkcie $y = e^x + x$ všade okrem veľmi blízkeho okolia nuly. Teda to, že pre záporné čísla je funkcia prakticky zhodná s funkciou $y = x$, kým pre kladné čísla je takmer zhodná s funkciou $y = e^x$. Už na intervale $(-10, 10)$ sú výsledky dostatočne presvedčivé a s rastúcou veľkosťou intervalu sa rozdiely v okolí nuly nedajú na grafe ani spozorovať.

Zdá sa mi, že to študenti aj pochopili, mne však ostala v ústach pachuť. Študenti ekonómie (ale nielen ekonómie) by mali mať o matematike širšiu predstavu než akú im dáva súčasná škola. Domnievam sa, že hlavnou prekážkou pri pochopení hlavnej myšlienky riešenia, ktoré som od nich očakával, bolo niečo, čo by som expresívne opísal ako „posadnutosť absolútnou presnosťou“. V bežnom živote je často dôležitejšie vedieť výsledok „rýchlo, hoci približne“, než „presne, ale neskoro“. Platí to nielen v ekonomike, ale aj v technických vedách. Súčasné matematické vzdelávanie nevytvára návyky vytvárať spontánne – aj keď nie úplne presné – riešenia.

Fakt, že na správaní súčtu funkcií sa v okolí nuly prejavuje vplyv funkčných hodnôt každej z nich, je nepopierateľný fakt. Zároveň však zastiera iný fakt: všade inde je príspevok jedného z činiteľov zanedbateľný voči veľkosti druhého príspevku. Na rýchle približné zistenie správania funkcie je dokonca tento fakt oveľa dôležitejší.

Matematika na základnej a strednej škole si však viac všíma nepatrné rozdiely než veľké podobnosti. Takáto príprava neskôr bráni študentom tieto podobnosti objavovať. Dôvody tohto chápania matematiky sú predovšetkým historické. Manuálne výpočty s číslami z okolia nuly sú oveľa rýchlejšie než manuálne výpočty s veľkými číslami – a podstatne menšia je aj chybovosť. Keďže škola sa orientuje najmä na manuálne výpočty, okolie

nuly nadobudlo v očiach študentov oveľa väčší význam, než aký v reálnom svete naozaj má. Ostáva len dúfať, že skôr či neskôr začnú kalkulačky a počítače hrať v školách natoľko podstatnú úlohu, že výpočty pomocou nich, ako aj zobrazovanie výsledkov pomocou počítačovo kreslených grafov, sa bude považovať za prirodzenú zložku výučby. Vtedy sa práca s veľkými číslami (a teda aj sledovanie priebehu funkcií v oveľa širších číselných intervaloch) stane pevnou súčasťou všeobecného matematického vzdelávania. Vtedy budeme musieť žiakov upozorniť aj na to, že ak sa pozrieme na graf na rozsiahlom intervale, globálny pohľad nemusí presne opisovať situáciu v istej špecifickej podoblasti.

Čo keby sme s tým začali už teraz?

ŽÁCI SE PTAJÍ

Dotaz

Vlétne-li elektron do homogenného magnetického pole kolmo ke smeru indukčných čiar, pohybuje sa po kružnici. Podľa druhého pohybového zákona pritom platí

$$F = ma_d = m \frac{v^2}{r} = Bev, \quad (1)$$

kde F je veľkosť magnetickej dostredive sily a a_d veľkosť dostrediveho zrychleni.

V literatúre venovanej speciálnej teorii relativity sa uvádi (viz např. [1], s. 92), že jestliže elektron vlétne do magnetického pole relativisticou rychlostí, je třeba do druhého pohybového zákona (1) dosadit za hmotnost m relativisticou hmotnost elektronu

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

Proti tomuto postupu je však možné namítnout, že ve speciální teorii relativity nelze vyjádřit druhý pohybový zákon

v klasickém tvaru $F = ma$, kde $m = \gamma m_0$ je relativisticá hmotnost částice, ale pouze ve tvaru $F = dp/dt$, kde $p = \gamma m_0 v$ je její relativisticá hybnost. Není proto použítí druhého pohybového zákona v klasickém tvaru (1) pro elektron pohybující se v magnetickém poli relativisticou rychlostí chybné?

Odpověď

Vztahy používané v relativisticé dynamice nelze skutečně získat ze vztahů klasických tím, že v nich pouze nahradíme klasickou hmotnost m_0 relativisticou hmotností $m = \gamma m_0$. Tak např. nahradíme-li v klasickém vzorci pro kinetickou energii $E_k = 1/2 m_0 v^2$ klasickou hmotnost m_0 relativisticou hmotností $m = \gamma m_0$, nedostaneme správný relativisticý vztah pro kinetickou energii $E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1)$. Také druhý pohybový zákon nelze ve speciální teorii relativity použít ve tvaru $F = ma$, kde $m = \gamma m_0$ je relativisticá hmotnost částice, ale jen ve tvaru $F = dp/dt$.

Při aplikaci druhého pohybového zákona na pohyb nabitě částice, která vlétne relativisticou rychlostí do homogenného magnetického pole kolmo ke směru indukčních čiar, nastává však poněkud jiná

situace. Magnetická síla $\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ je v tomto případě kolmá ke směru okamžité rychlosti $\mathbf{v}$, a proto je velikost rychlosti částice pohybující se v magnetickém poli po kružnici konstantní. V důsledku toho platí

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Obě rovnice (1) a (2) lze tedy v tomto případě použít.

Ke stejnému výsledku můžeme také dospět jiným způsobem. Z druhého pohybového zákona vyplývá

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \\ &= \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Poněvadž částice pohybující se stálou velikostí rychlosti má podle vztahu (2) také stálou hmotnost, platí tedy $dm/dt = 0$ a vztah (3) lze psát ve tvaru $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \gamma m_0 \mathbf{a}$. Použití tohoto vztahu pro nabitou částici pohybující se v homogenním magnetickém poli po kružnici relativistickou rychlostí není proto nesprávné.

Závěrem si ještě povšimněme, že podle vztahu (3) je směr síly $\mathbf{F}$ působící na částici obecně jiný než směr jejího zrychlení $\mathbf{a}$. Z rovnice $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \gamma m_0 \mathbf{a}$ však vyplývá, že v případě, kdy se částice pohybuje po kružnici rychlostí o stálé velikosti, je směr těchto vektorů stejný.

Literatura

- [1] Teoretické úlohy celostátního kola 46. ročníku FO. MFvŠ, roč. 15 (2005), č. 2, s. 92.

- [2] Šedivý, P.: Kapitoly ze speciální teorie relativity. MAFY, Hradec Králové 2003.

Karel Bartuška

ZKUŠENOSTI

„To nemyslíte vážně, pane učiteli! To máme hádat?!“

Ve své knize „To nemyslíte vážně, pane Feynmane!“ popisuje slavný americký fyzik *Richard Feynman* doučování svého bratrance. Oba tehdy ještě chodili do školy, a ačkoli byl bratranec starší, nevěděl si rady s řešením jednoduché lineární rovnice. Feynman výsledek uhádl, načež jeho bratranec roztrpčeně poznamenal, že výsledek taky vidí, jenže v hodinách matematiky musí řešit rovnice úpravami, a on neví, jak na to ...

Feynman vzpomínku uzavírá konstatováním, že bratranec se řešit rovnice nikdy nenaučil. Nepochopil totiž, že jejich smyslem je nalézt výsledek. A použití algebraických úprav je jen prostředkem k dosažení tohoto cíle!

Obávám se, že podobně je na tom i mnoho studentů v našich školách. Dáteleli studentům úkol „uhádnout“ výsledek, může se stát, že jejich úspěšnost bude lepší než v případě, že budou úlohy řešit standardním postupem! Složitý postup nebo stereotyp dokáže mnohdy zatemnit mozek natolik, že studenti nevidí výsledek, který „bije do očí“ ...

Pokud tomu nevěříte, zkuste s jednou polovinou třídy výsledky následujících úloh hádat (to znamená „počítat je v hlavě“, přičemž je povoleno zapsat si na papír pouze nějaký mezivýsledek, mezisou-

čet apod.) a s druhou polovinou třídy řešte úlohy standardním postupem.

Vybrané příklady jsou z prvního ročníku střední školy:

1) Zjednodušte výraz

$$\frac{xy}{x^2 - y^2} \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right).$$

2) Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$2(x - 3) + x = 6x - 6.$$

3) Zjednodušte výraz

$$\frac{c + d}{c^2 - d^2} : \frac{c^2 + cd}{2c^2 - 1d^2}.$$

4) Řešte slovní úlohu: Z místa A, vzdáleného 360 km od místa B, vyjel v 7:00 osobní vlak stálou rychlostí 40 km/h. Současně s ním vyjel po stejné trati z místa B do místa A rychlík stálou rychlostí 80 km/h. Určete, v kolik hodin a v jaké vzdálenosti od A se oba vlaky potkají.

5) Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$\sqrt{3x - 8} = 5.$$

6) Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$x + y = 4,$$

$$x + 2y = 5.$$

Pokud i vy zjistíte, že studenti nedosahují (výrazně) lepších výsledků použitím obvyklých, ve škole mnohokrát zažitých postupů, stálo by za zamyšlení zkusit alespoň občas řešit v hodinách matematiky (snazší) úlohy trochu jinak, netypicky, třeba hádáním, i když se vás studenti budou zpočátku nevěřícně ptát, jestli to opravdu myslíte vážně ...

Můžete také studenty vyzvat k tomu, aby řešení objevili nějakou vlastní metodou! Sami uvidíte, že je řešení takové úlohy zaujme mnohem víc. A možná budete

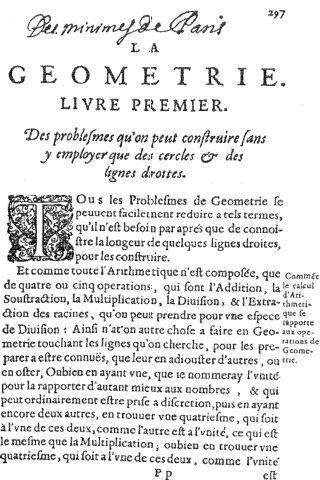
příjemně překvapeni tím, co všechno vaši žáci vymyslí (...)

Jiří Mazurek
Gymnázium Orlová

Z HISTORIE

Matematické drobnosti René Descarta (1596 – 1650)

Descartův odkaz je i po staletích předmětem zájmu filozofů i historiků exaktních věd. V tomto drobném článku nabízím čtenáři několik poznámek o Descartově příspěvku k matematice.

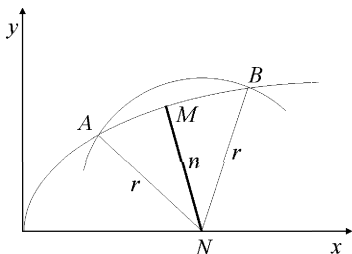


Obr. 1

K matematice se R. Descartes dostal přes filosofii, tedy po cestě gnoseologické.

Východiskem pro jakékoli poznání mu byly pravdy mající charakter přesných matematických výpovědí s odkazem na pravdu prvotní, základní jistotu vyjádřenou prosulým rčením „myslím, tedy jsem“. Roku 1637 vydal *Rozpravu o metodě na správné vedení rozumu a hledání pravdy ve vědách* (*Discours de la methode pour bien conduire sa raison et la cherche la verité dans les sciences*, Leida) s dodatky Dioptrika (*La dioptrique*), Meteory (*Les météores*) a Geometrie (*La geometrie*), obr. 1.

Hlavní myšlenky geometrické části spisu jsou tyto: Geometrické úlohy lze řešit také algebraickou metodou, přičemž nalezl způsob, jak některé z křivek popsat rovnicí. Poměrně speciálním úkolem je pro něj nalezení kolmice ke křivce, tzv. úkol tangentový.



Obr. 2

Descartův postup nalezení normály n ke křivce v bodě M vychází z obr. 2. Z bodu N je opsána kružnice, která danou křivku protíná ve dvou bodech A a B . Souřadnice bodů A , B lze určit řešením soustavy rovnic křivky a kružnice. Při určitém poloměru r však body A a B splynou, přejdou v bod M . Pro danou souřadnici bodu N na ose x je třeba nalézt příslušný poloměr r . Descartes jako ilustrační příklad uvádí výpočet polohy normály pro parabolu $y = \sqrt{px}$. Rovnice dotykové kružnice se středem v $N[x_0, 0]$ je $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$. Bod M kružnice musí

vyhovovat i rovnici paraboly, proto po dosazení za $x = y^2/p$ do rovnice kružnice dostáváme $(y^2/p - x_0)^2 + y^2 = r^2$ a po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$y^4 + (p^2 - 2px_0)y^2 + p^2x_0 - p^2r^2 = 0. \quad (1)$$

Protože hledáme dotyk, musí být diskriminant rovnice (1) roven nule, tj.

$$\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - 4px_0 + r^2} = 0,$$

a to nastává pro

$$r^2 = px_0 - \frac{p^2}{4}.$$

Dosazením za $y^2 = px$ po úpravě dostáváme

$$(x - x_0)^2 + p(x - x_0) + \frac{a^2}{4} = 0,$$

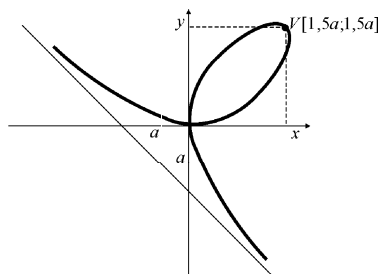
resp.

$$\left(x - x_0 + \frac{p}{2}\right) = 0,$$

z čehož plyne

$$x_0 = x + \frac{p}{2}. \quad (2)$$

Jestliže chceme v bodě $M[x, y]$ paraboly sestavit její normálu MN , nalezneme podle (2) její druhý bod $N[x_0, 0]$.



Obr. 3

Grafickým vyjádřením rovnic vznikly některé zajímavé křivky. Na obr. 3 je tzv. Descartův list (*folium Cartesii*). Dnešní matematickou symbolikou lze Descartův předpis vyjádřit rovnicí

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \quad (3)$$

a přímku v obrázku rovnicí $y = -x - a$. Obsah smyčky s vrcholem $V[1,5a; 1,5a]$ je roven obsahu části ohraničené asymptotou a křivkou v 1. a 3. kvadrantu a má hodnotu $1,5a^2$.

Sestrojit křivku podle rovnice (3) není nijak snadné. Pokud bychom rovnici (1) upravili na funkční tvar $y = f(x)^*$, nevyhnu-li bychom se řešení kubické rovnice. V. Jarník doporučuje v [1] užít k bodové konstrukci parametrických rovnic pro $t \neq -1$

$$x = 3at : (1 + t^3),$$

$$y = 3at : (1 + t^2).$$

Přínosem algebry je Descartem objevené pravidlo pro stanovení počtu kořenů rovnice vyššího stupně: Jestliže platí $a_k \neq 0$ pro $k = 1, 2, 3, \dots, m$ a jestliže polynom obsahuje i z znaménkových změn a n nezměn ($z + n = m$), pak rovnice

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

má nejvýše z kořenů kladných a n kořenů záporných.

Podle toho závěru má např. rovnice

$$x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 83x - 60 = 0 \quad (4)$$

tři kladné kořeny a jeden záporný, neboť při postupování zleva doprava mění sousední členy polynomu třikrát znaménko a jedenkrát nikoli.

*) Tak abychom získali obraz jedné větve, neboť křivka jako celek není zobrazením funkce.

Descartes jako jeden z prvních pracoval s anulovanými rovnicemi a formuloval rovněž základní větu algebry o rovnosti počtu kořenů stupni rovnice. U rovnice vyššího stupně užíval rozkladu na součin dvojčlenů a tím v určitých speciálních případech dovedl kořeny nalézt. Např. rovnici (4) lze psát jako součin dvojčlenů

$$(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x + 5) = 0,$$

z čehož plynou kořeny 1; 3; 3; -5.

Descartova *Geometrie* nebyla spisem příliš srozumitelným. Některé pokrokové myšlenky zůstávaly ukryty za poměrně komplikovaným vyjádřením. Aspoň tak vnímal toto Descartovo dílo *Franz van Schooten* (1615 – 1660), profesor matematiky v Leidenu, který Descartovu *Geometrii* s komentářem vydal roku 1649 v dalším vydání.

Nenalezneme v ní to, čemu se říká kartézská soustava souřadnic. Polohu bodu v rovině Descartes stanovil pomocí velikosti úseků na rovnoběžkách vedených ve stejných krocích k základní přímce (ne nutně kolmých k ní). Zatímco hodnoty na ordinátě mohly být jak kladné, tak i záporné, hodnoty nezávislé proměnné po základní přímce byly pouze kladné. Myšlenku dovedl do systému dvou os s nulou v jejich průsečíku *Pierre de Fermat*.

Literatura

- [1] Jarník, V.: Diferenciální počet, díl I. Praha, Academia 1974, str. 368.
- [2] Studnička, F. J.: O zásluhách Descartových v oboru věd exaktních. In. Slavnost pořádaná na paměť 300letých narozenin Renée Descarta v Praze dne 6. prosince 1896. Praha, JČMF 1897.
- [3] Studnička, F. J.: Bohatýrové ducha. Praha, Šimáček 1898.

- [4] *Luhan, E.:* Matematika a její předmět. Sborník Pedagogické fakulty v Č. Budějovicích. Praha, SPN 1986.
- [5] *Bečvář, J.:* René Descartes. Praha, Prometheus 1998.
- [6] *Struik, D. J.:* Dějiny matematiky. Praha, Orbis 1963.

František Jáchim

O jednom velkém snu

(K 250. výročí narození Františka Josefa Gerstnera)

Myšlenka propojit vodní cestou českou část Šumavy s bavorským územím pochází ze 14. století. Jak zmiňuje kronikář *Jan Dubravius*, za vlády Karla IV. byli prý na Šumavu vysláni měřiči, aby takovou věc posoudili. Roku 1626 předložil frýdlantský vévoda *Albrecht z Valdštejna* návrh na průplavní propojení mezi řekou Mühl (vlévající se do Dunaje) a Vltavou. V 18. století – roku 1706 – procestoval za stejným účelem šumavskou krajinu *L. Vöge-mont* a podal císaři Leopoldu I. několik variant návrhu na stavbu průplavu (např. spojení Malše s řekou Aist, nebo Lužnice s řekou Kamp). Za vlády Marie Terezie zpracovali příslušné studie *A. Stendhahl* (1768), *J. B. Bréquin* a *J. Walcher* (1773). Všechny tyto návrhy se ukázaly na svoji dobu jako nerealizovatelné. Na konci 18. století se objevil nový motiv i větší technické možnosti. Významným odběratelem dříví ze Šumavy se stávala Vídeň, která byla ochotna platit mnohem více než místa v Čechách. Do úvah technických vstoupily nyní zájmy ryze obchodní. Snad i proto se ujala snaha *Josefa Rosenauera*, který alespoň v malém ukázal možnost výstavby plavebního kanálu přes evropské rozvodí. Podrobnosti o této pozoruhodné, dodnes zčásti zachované stavbě – Schwarzenberském kanálu – čtenář nalezne např. v [1].

Profesor pražské polytechniky *František Josef Gerstner* (1756 – 1832) se myšlenky obchodního spojení obou částí Šumavy ujal jako matematik, technik i jako ekonom. Roku 1807 byli on a stavební rada Pakassy pověřeni zhodnotit starší návrhy a navrhnout nejkratší a přitom nej-jednodušší plavební cestu z Českých Budějovic přes Vyšší Brod do Lince. Na Gerstnerově přístupu k problému je nejzajímavější to, že k jeho řešení přistoupil s duší matematika, který hledá extrém – najít nejvýhodnější *jakékoli* dopravní spojení, tedy nejen vodní, a to nejen z hlediska nákladů na stavbu a provoz, ale i s ohledem na technické vlastnosti.

František Josef Gerstner se narodil 23. února 1756 v Chomutově v rodině řemě-náře. Vystudoval jezuitské gymnázium a současně poznal řadu řemeslných profesí v chomutovských dílnách. Na pražské univerzitě absolvoval matematiku u prof. *S. Vydry* a *J. Tesánka* a astronomii u *J. Steplinga*. V roce 1781 odešel do Vídně studovat lékařství, ale na podnět slovenského fyzika *Maxmiliána Hella* se dále věnoval fyzice. Od roku 1788 přednášel po Tesánkovi matematiku na pražské univerzitě. Technická erudice a vynikající teoretické znalosti potřebné pro inženýrské obory ho přivedly roku 1795 do dvorské studijní komise a v ní připravil reformní návrh přírodovědných studií. Císař František II. Gerstnerův návrh ocenil slovy: „*Očekávám, že při reorganizaci filosofického studia bude také vypracován podrobný plán vyššího technického institutu, jehož znamenitý užitek vysvítá z předložené skici.*“ O rok později Gerstner předkládá návrh vysoké technické školy podle vzoru pařížské École polytechnique. Pro výuku mechaniky sepsal rozsáhlou učebnici [2] obsahující tehdy známé poznatky pro inženýrskou praxi. Dekretem z 14. března 1803 školu císař založil jako *Královské stavovské technické učiliště*, výuka se čtyřmi

profesory a dvěma adjunktů začala 10. listopadu 1806.

Pokud jde o hlavní myšlenku tohoto článku – dopravní cesty mezi oběma částmi Šumavy, F. J. Gerstner posuzoval spojení vodní, silniční i železniční. Rozbor problému provedl ve studii [3] s jednoznačným závěrem: Nejlepším řešením bude po všech stránkách spojení železnicí. Rozumějme železnicí, kde „tažný stroj“ bude kůň. Podívejme se nyní, co ho k takovému závěru vedlo.

Pro posouzení možnosti plavební cesty celý region výškově proměřil^{*)} a zjistil, že nejnižší rozvodní přechody jsou asi 350 – 550 m nad hladinou Dunaje. Překonat tak velký výškový rozdíl plavebním kanálem bylo sice technicky možné výstavbou velkého počtu zdymadel, ale stavba by se tím velice prodražila při současném snížení rychlosti dopravy a zvýšení náročnosti obsluhy. Na základě tohoto zjištění se do jeho zorného pole dostaly úvahy o variantě silniční a železniční.

Při rozhodování mezi silniční a železniční dopravou zvolil jako hlavní kritéria valivý odpor kol, který předurčuje nutnou tažnou sílu, tedy sílu koní, která je limitovaná. Ke tření v čepích kol (je dáno součinem součinitele smykového tření a tíhy vozu) přistupovalo tření na jejich obvodu vyvolané stykem s vozovkou (dlažbou, kolejí). Pro velikost třecí síly mezi kolem a vodorovnou upravenou vozovkou odvodil vztah

$$F_v = \frac{4v^2hm}{eD}, \quad (1)$$

v němž v je rychlost, h výška nerovnosti na vozovce, m hmotnost vozu, e vzdále-

nost mezi sousedními nerovnostmi (kameny) na vozovce, D průměr kola. Pro tažnou sílu na dlažbě překonávající tření nalezl vztah

$$F_d = \frac{v^2em}{2r^2}, \quad (2)$$

kde e je vzdálenost středů dvou sousedních dlažebních kostek, r je poloměr kružnice, která se dotýká dvou sousedních kostek (poloměr kola).

Z porovnání vztahů (1) a (2) plyne, že síla k překonání tření na dlažbě je významně menší než na silnici. Významným zjištěním byla závislost na čtverci rychlosti. To znamenalo, že jakékoli zvýšení přepravní rychlosti v budoucnosti si vyžádá velmi podstatné zvýšení tažné síly. Ze vztahů (1) a (2) plynulo pro konstrukci vozů, že je nutné volit kola s co největším průměrem a nejmenším průměrem osy, neboť jen co největší silový moment na obvodu kola eliminoval tření v ose. Vozovka by měla být tvrdá, nejlépe dlážděná, rovná. Nejlepší vozovkou je tedy tvrdá rovná plocha – železniční kolej.

Další Gerstnerova práce se soustředila na pokusy s modelem železničních vozů v měřítku 1 : 12. Na vodorovném modelu trati měřil koeficient valivého tření. Při pokusech navinoval vlákna na osy kol modelů a na konec vlákna zavěšoval přes kladku závaží, taková, aby rozvíjením vlákna bylo dosaženo rovnoměrného pohybu vozu po modelové lavici. Závěr byl proti pohybu po silnici opačný: Zatímco na silnici je větší valivý odpor na obvodu kola než tření v ose, u železnice je tomu právě naopak. Hlavní jízdní odpor ale mohl v tomto případě být snížen co nejslabším kvalitním a dobře mazaným osním čepem.

Podle Gerstnera mohl kůň po vodorovné koleji utáhnout vůz s nákladem o celkové hmotnosti asi 10 tun. S ohledem na nezbytná stoupání doporučil jako nejvyšší stoupání trati 18 %. Tento sklon mohl být

^{*)} Nadmořské výšky určoval opakovaným měřením atmosférického tlaku. Přesnost měření byla 10 sáhů (≈ 19 m), což pro zásadní posouzení problému plně postačovalo.

totiž překonáván bez připřahování dalších koní. Za malý sklon se ale platilo délkou trati. Bylo samozřejmé, že trať bude delší než kterákoli stávající silniční spojení, ale z hlediska provozních nákladů (které také Gerstner velmi pečlivě počítal) byla železniční cesta neefektivnější.

Ve prospěch vodní dopravy i při vysokých nákladech na stavbu kanálu přece jen svědčily relativně malé provozní náklady, ale jen pro určitý objem přepravy. F. J. Gerstner do celkové bilance zahrnul i náklady ve vztahu k množství zboží. Jestliže uvažoval m hmotnost přepraveného zboží za rok, U_v zúročení vloženého kapitálu a náklady na 1 míli kanálu (U_z pro železnici), N_v náklady na koně a obsluhu na plavebním kanálu (N_z pro železnici), potom dopravní výlohy na jednotku hmotnosti, míli a rok jsou u vodního kanálu $N_k + U_v/m$, u železnice $N_z + U_z/m$. Z rovnosti obou vztahů lze určit mezní hmotnost m , kdy převládá efektivita jednoho způsobu dopravy nad druhým

$$m = \frac{U_v - U_z}{N_z - U_v}.$$

Při vložení údajů o celkové roční hmotnosti dříví a cenách lidské práce a dalších nákladech, zjistil, že při přepravě větší než 112 000 tun dříví za rok je nejvýhodnější plavební cesta, pro interval 112 000 až 8 400 t je výhodnější doprava železniční. Pro dopravu menší zůstává výhodná silnice, resp. stávající síť bez nároků na další stavební investice. Gerstner měl k dispozici údaje o přepravě soli (asi 20 160 t) i ostatního zboží přepravovaného po silnici (1 120 t). Odhadl, že ani i při podstatném zvýšení dopravy celková roční hmotnost nepřekročila 28 000 tun. Jako neefektivnější se tedy jevilo spojení železniční.

Roku 1821 začal F. J. Gerstner s přípravným projektem 129 km dlouhé koňské železnice mezi Českými Budějovicemi a Lincem. O čtyři roky později na základě

císařského privilegia (pro delší trať Mautausen – České Budějovice) stavba trati s rozchodem 1 106 mm začala. Český úsek až k rozvodí byl budován velice solidně – malá stoupání, velké poloměry oblouků, kamenné traťové lože. Na čas tu byl stavbyvedoucím profesorův syn *František Antonín Gerstner*. Po vyčerpání finančních prostředků převzal stavbu Gerstnerův žák *M. Schöner*. Ten musel stavět laciněji, úsek byl „měkký“, poloměry oblouků menší a tak při přechodu na parní trakci musel být budován znovu, zatímco českobudějovický úsek pro lokomotivní provoz plně vyhovoval. Po dokončení stavby provoz na trati zajišťoval českobudějovický *Vojtěch Lanna* s osmi sty koňmi, k nimž připřahal vozy zkonstruované pražským technikem *Josefem Božkem*.

Úvahy F. J. Gerstnera, které vyústily ve stavbě koněspřežky (první na našem kontinentě), jsou příkladné svoji šíří pohledu, matematicko-fyzikálním zpracováním a propojením s ekonomickými činiteli.

František Josef Gerstner zemřel 25. července 1832, pohřben je v Mladějově u Jičína.

Literatura

- [1] *Hons, J.*: Schwarzenberský plavební kanál na Šumavě. Dějiny věd a techniky 23 (1991), 193 – 208.
- [2] *Gerstner, F. J.*: Handbuch der Mechanik. Praha – Vídeň, 1832 – 34.
- [3] *Gerstner, F. J.*: Zwei Abhandlungen über Frachtwägen und Strassen und über die Frage. Gesellschaft der Wissenschaften, III. díl, sv. 4, Praha 1813.
- [4] *Kroupa, J.*: Gerstnerovy úvahy k dopravnímu spojení Vltavy s Dunajem. Dějiny věd a techniky 16(1983), 129 – 151.

- [5] *Hons, J.*: Dějiny dopravy na území ČSSR. Bratislava, Alfa 1975.
- [6] *Jilek, F., Lomič, V.*: Dějiny ČVUT, I. díl, svazek 1. Praha, ČVUT 1973.

František Jáchim

William Thomson a pokroky v nauce o elektřině



W. Thomson

Když *William Thomson* (1824 – 1907, od roku 1892 *lord Kelvin*) bilancoval svůj vědecký život, pronesl tato slova: „*Moje největší úsilí o pokrok ve vědě, které jsem vytrvale vynakládal 55 let, je charakterizováno jediným slovem – neúspěch. O elektrické a magnetické síle, o vztahu mezi éterem, elektřinou a hmotou, nebo o chemické afinitě nevím nic víc, než jsem věděl a snažil se učit své studenty přírodní filozofie před 50 lety v prvním semestru své profesury.*“

Okolnost, že Thomsonovo jméno se v dějinách fyziky vyskytuje velice často,

svědčí ale o něčem jiném. Ač nespokojen sám se sebou, patří W. Thomson do galerie největších fyziků 19. století. Napsal 18 knih, 661 původních článků a na své vynálezy dostal 70 patentů. Velmi ovlivnil vývoj termodynamiky i elektřiny. Jeho přínos k později Maxwellem vybudované teorii elektromagnetického pole je obecně méně znám než výsledky jeho práce v termodynamice.

Zjednodušeně řečeno Thomson vytvořil spojovací most mezi M. Faradayem a J. C. Maxwellem. Zatímco anglický fyzik a chemik *Michael Faraday* (1791 – 1867) objevoval v laboratoři, *James Clerk Maxwell* (1831 – 1879) vybudoval ucelenou teorii elektromagnetických sil, kterou zkoncentroval do čtyř proslulých rovnic.

K poznávání vlastností elektrického pole se Faraday dostal na konci svých pokusů s elektrolyzou. Nahradil-li mezi nabitými vodivými deskami elektrolyt látkou nevodivou (např. petrolejem nebo sklem), zjistil, že na kovových deskách se indukuje jisté množství náboje, o jehož velikosti rozhoduje nejen obsah a vzdálenost desek, ale také prostředí mezi nimi – dielektrikum. Soudil, že náboje na sebe nepůsobí na dálku (jak uvažoval Newton o gravitaci), nýbrž silový účinek se přenáší z částičky na částičku obecně po křivkách, které nazval indukční elektrické siločáry, a to konečnou rychlostí. Velikost elektrické síly je dána právě hustotou siločar. Faraday jakoby tušil, že soustava siločar je jakousi pavoučí sítí, po níž se přenáší konečnou rychlostí impulzy od zdroje pole. Zastával názor působení do blízka.

Motivován objevem zákona zachování energie *Helmholtzem* roku 1853, začal se W. Thomson zabývat kondenzátorem a jevy v jednoduchých obvodech. Roku 1853 publikoval spis *Elektromagnetické kmity a vlny*, v němž mj. uvádí, že vybíjením kondenzátoru přes cívku vznikají oscilace

s dobou kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

(Thomsonův vztah).

S mimořádným úsilím se W. Thomson snažil Faradayovy elektrické a magnetické indukční siločáry popsat matematicky. Tušil, že takový popis bude patrně ucelenou teorií elektromagnetického pole. Faraday si Thomsonova zájmu velice cenil. Ve svém deníku si poznamenal: „*Jen málokterí rozumějí fyzikálním siločarám. Thomson z Glasgowa je, jak se zdá, jediný, kdo je chápe.*“ Thomson se pokusil o matematické vyjádření Faradayových siločar, ale ucelenou teorii elektromagnetického pole se mu vytvořit nepodařilo. Pokoušel se přistupovat k elektrickému proudu obdobně jako k tokům tepla. Když poznal, že se dostal do slepé uličky, svěřil se s potížeji svému příteli J. C. Maxwellovi. Ten již měl v tu chvíli svoji velkou životní vizi: „*... Můj velký plán ... je plán hledání a zmocňování se nebo přepracování a opravování výzkumů. Každé území ležící ladem musí být prozkoumáno a musí následovat uspořádaný systém změn.*“ A jako pracovní pole se tu nabízel pochopení elektromagnetizmu jako celku. Mladý Maxwell je ovšem zatím v metodice také bezradný. Věděl sice, že problémy se zabývá A. M. Ampère i M. Faraday, ale přece jen se v jejich závěrech prozatím orientovat nedovedl. Dopisem z 20. února 1854 se ptal Thomsona, (majícího pověst výborného matematika), jak má do lákavé oblasti vstoupit. Thomson mu doporučil v první řadě studium Faradayovy knihy *Experimentální výzkumy v elektřině (Experimental Researches in Electricity)* z let 1832 – 1852. O tom, že Thomson poradil dobře, se Maxwell zmiňuje nejprve ve svém spise *O Faradayových siločarách* (1855) a o dvacet let později ve svém hlavním díle *Pojednání o elektřině a magneti-*

zmu (Treatise on Electricity and Magnetism 1873).

Ke spojování poznatků o teple s naukou o elektřině W. Thomson jistě důvody přece jen měl. Roku 1854 se zabýval teorií termočláneků a přitom zjistil, že elektromotorické napětí vzniká i na koncích jednoho vodiče, je-li v něm teplotní spád. Velikost potenciálového rozdílu na obou koncích je úměrná délce vodiče a rozdílu teplot mezi nimi (Thomsonův jev).

William Thomson má velké zásluhy o kabelové spojení Evropy a Ameriky. Nejen že se přímo podílel na kladení kabelů, ale snažil se nalézt i jejich konstrukční řešení, aby ztráty v nich byly co nejmenší. V rámci teorie dlouhého vedení našel roku 1855 pro časový průběh napětí ve vedení tzv. difúzní rovnici obsahující odpor a kapacitu jednotkové délky vedení

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Ta vyhovovala pro délky do cca 300 km. Její zobecnění pro větší vzdálenosti provedl až roku 1881 O. Heaviside (1850 – 1925).

Williamu Thomsonovi se dostalo neobyčejně hojných a vysokých poct. Mezi ty nejvýznamnější jistě patří jmenování členem *Royal Society* roku 1851, jejímž byl v letech 1890 – 95 prezidentem. Když byl královnou Viktorií roku 1892 jmenován peerem, zvolil své jméno podle říčky Kelvin obtékající glasgowskou univerzitu. Pohřben je na anglickém „slavném“ – ve Westminsterském opatství.

Literatura

- [1] *Bürke, T.*: Převratné objevy fyziky. Praha, Academia 1999.
- [2] *Mayer, D.*: Michael Faraday – filozof experimentu. Čs. čas. fyz. 51(2001), 330 – 337.

- [3] Mayer, D.: Pohledy do minulosti elektrotechniky. Č. Budějovice, Kopp 2004.
 [4] Koryta, J.: Michael Faraday. Praha, Orbis 1972.

František Jáchim

ZPRÁVY

Devátá podzimní škola – „Praha, 2005“

Devátá podzimní škola – „Praha, 2005“

Jako tradiční významná vzdělávací akce pro středoškolské profesory s přírodovědnými aprobacemi se uskutečnila již devátá „Podzimní škola Praha, 2005“. Její hlavní část patřila fyzice právě s ohledem na skutečnost, že rok 2005 byl vyhlášen Mezinárodním rokem fyziky. Paritními organizátory Podzimní školy byly Katedra fyziky FEL ČVUT v Praze – jmenovitě *doc. Ing. Josef Rosenkranz, CSc.* a Česká společnost pro biochemii a molekulární biologii společně s Ústavem biochemie a mikrobiologie VŠCHT v Praze – jmenovitě *Ing. Irena Krumlová*, tajemnice České společnosti pro biochemii a molekulární biologii a pracovnice VŠCHT v Praze, byl zásadní akcent kladen i na vzájemné vazby mezi přírodními vědami a jejich vybranými oblastmi.

9. Podzimní škola se konala od 22. 10. do 28. 10. 2005. Celkem se jí zúčastnilo padesát mimopražských a třicet pražských profesorů. Pro pražské účastníky to pak byla bezprostřední aktivita v nově realizovaném projektu Otevřená věda, jehož hlavním partnerem je Akademie věd ČR. Tento projekt, který je určen pro pražské profesory a nadané studenty v předmětech fyzika, chemie a biologie, si dává za

cíl seznámit je společně jednak s nejnovějšími objevy v daných oborech a především umožnit výrazně poznatkově obohatit stávající výuku. Podzimní škola proběhla za významné finanční podpory ČEZ a grantu MŠMT ČR v rámci programu INGO, náklady pražských účastníků pak byly hrazeny z již zmiňovaného projektu Otevřená škola.

Slavnostní zahájení Podzimní školy provedli: předseda Akademie věd ČR a předseda České společnosti pro biochemii a molekulární biologii *prof. RNDr. V. Pačes, DrSc.*, *prof. RNDr. M. Kodíček, CSc.*, hospodář České společnosti pro biochemii a molekulární biologii a profesor Ústavu biochemie a mikrobiologie VŠCHT v Praze a *doc. RNDr. T. Bůlek, CSc.*, proděkan pro magisterské studium FEL ČVUT v Praze.

Odborný program Podzimní školy zahrnul následující přednášky:

Doc. MUDr. M. Stiborová, DrSc.: Studium enzymů jako nástroj pro konstrukci nových protinádorových léčiv, *prof. RNDr. J. Chýla, CSc.*: Počátky kvantové mechaniky, *RNDr. V. Novák, CSc.*: Paměťové slitiny, *prof. Ing. J. Moravcová, CSc.*: Úloha sacharidů v živém organismu, *RNDr. M. Jirsa, CSc.*: Vysokoteplotní supravodivost, *doc. Ing. K. Melzoch, DrSc.*: Lihoviny jako „zdravotně nezávadné“ kapaliny, *prof. RNDr. V. Hořejší, DrSc.*: Jak funguje (a někdy nefunguje) imunitní systém, *doc. RNDr. P. Chvosta, CSc.*: Od Maxwellova démona k Brownovým motorům, *prof. Ing. K. Demnerová, DrSc.*: Geneticky modifikované organismy, *doc. Ing. M. Hron, CSc.*: Jaderná energetika, *doc. RNDr. B. Vyskot, CSc.*: Epigenetická dědičnost, *RNDr. V. Mornstein, CSc.*: Paranormální jevy a alternativní medicína z pohledu přírodovědce, *prof. Ing. V. Gruber, DrSc.*: Recyklace elektronických odpadů.

(Dokončení na s. 423)