

Dokazování a objevování vět v geometrii pomocí metod počítačové algebry

PAVEL PECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

1. Úvod

V poslední třetině dvacátého století byly vyvinuty účinné metody v automatickém dokazování vět elementární geometrie. Pomocí této teorie byly dokázány a dokonce objeveny stovky netriviálních vět.

V semináři, který jsem vedl v posledních letech na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity, jsme pomocí teorie automatického dokazování vět na počítači řešili řadu problémů elementární geometrie. Studenti, kteří tento volitelný seminář navštěvovali, byli většinou ve čtvrtém ročníku studia učitelství matematiky pro základní školy a pro školy střední, t.j. měli znalosti základního kurzu geometrie. Pomocí počítače i klasickým způsobem jsme vyšetřovali řadu úloh – Heronovu formuli pro výpočet obsahu trojúhelníka a její zobecnění – Brahmaguptovu formuli pro výpočet obsahu tětívového čtyřúhelníka pomocí délek jeho stran. Dále Staudtovu formuli, Wallace–Simsonovu větu a její zobecnění, Napoleonovu větu a další podobné problémy.

Zatímco klasická (syntetická) metoda dává lepší vhled do dané geometrické situace a tím umožňuje i lepší porozumění problému a více ukazuje krásu geometrie, pomocí počítačové algebry na druhé straně můžeme řešit složité úlohy, které jsou klasickým způsobem obtížně řešitelné. Pomocí počítačové algebry lze provádět dokazování matematických vět (automatic

theorem proving), odvozování (automatic derivation) a objevování (automatic discovery) nových vět. Lze též provádět konstrukce, které není snadné sestavit pomocí pravítka a kružítka, atd.

V tomto článku podáme stručný přehled této teorie. Pokud je mi známo, v češtině literatura k této problematice neexistuje a tak zájemcům o hlubší studium doporučuji vynikající publikaci [4], viz též [7], [10]. Na několika příkladech elementární geometrie v rovině je ukázáno použití metod počítačové algebry, které je většinou doplněno i klasickou způsobem řešení.

2. Automatické dokazování vět

Nejprve trochu teorie. *Automatické dokazování vět* se zabývá geometrickými tvrzeními, která mají tvar $\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{c}$, kde $\mathbf{H}$ je množina předpokladů a $\mathbf{c}$ je závěr. Prvním krokem je *algebraizace* geometrického problému ve zvolené soustavě souřadnic. Tato fáze je charakterizována sestavením množiny předpokladů $\mathbf{H}$, které mají tvar polynomických rovnic

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, h_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

a závěru $\mathbf{c}$, který je vyjádřen rovnicí

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

kde koeficienty polynomů jsou racionální čísla. Tedy algebraický tvar našeho tvrzení je

$$\forall x \{ (h_1(x) = 0 \wedge h_2(x) = 0 \wedge \dots \wedge h_r(x) = 0) \Rightarrow c(x) = 0. \} \quad (1)$$

Cílem dalšího kroku je ověření pravdivosti neboli *verifikace* tvrzení (1). Máme rozhodnout, zda závěr tvrzení plyne z daných předpokladů, nebo, což je totéž, zda nulová množina závěru $\mathbf{c}$ obsahuje nulovou množinu předpokladů $\mathbf{H}$, tj. zda platí $\text{Zero}(\mathbf{H}) \subset \text{Zero } \mathbf{c}$. K tomu stačí ukázat, že polynom c patří do ideálu $(h_1, \dots, h_r)$. Zde krátce připomeňme definici ideálu. Ideálem I , který je generován polynomy $(h_1, \dots, h_r)$, značíme $I = (h_1, \dots, h_r)$, rozumíme množinu všech polynomů tvaru $c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_r h_r$, kde $c_1, c_2, \dots, c_r$ jsou libovolné polynomy.

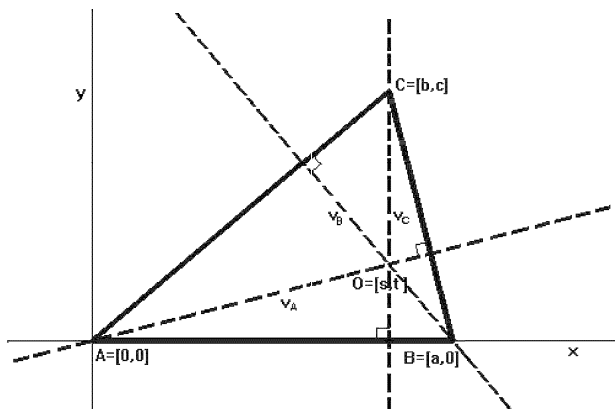
Rozhodnutí, zdali polynom c patří do daného ideálu I bylo ještě nedávna velmi obtížným problémem (tzv. ideal membership problem).

V sedmdesátých letech 20. století tento problém vyřešil Bruno Buchberger z univerzity v Linci použitím algoritmu, který se na počest svého objevitele nazývá *Buchbergerův algoritmus*. Ve většině známých matematických programů (např. Mathematica, Maple) je implementován příkaz $\text{NF}(c, I)$, založený na Buchbergerově algoritmu, pomocí kterého umíme danou otázku rozhodnout. Jednoduše řečeno, příkaz $\text{NF}(c, I)$ nebo též normální forma polynomu c vzhledem k ideálu I dává zbytek při dělení polynomu c polynomy $h_1, \dots, h_r$, kterými je ideál I generován. Pokud $\text{NF}(c, I) = 0$, potom je zbytek roven nule a polynom c náleží ideálu I , tj. lze psát $c = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_r h_r$, kde $c_1, c_2, \dots, c_r$ jsou nějaké polynomy. Celý proces je zobecněním Euklidova algoritmu při dělení polynomu polynomem o jedné proměnné, viz [4], kde je celý problém podrobně vyložen.

Nejjednodušší způsob, jak ukázat podstatu automatického dokazování vět, je demonstrace na příkladu. Mějme následující příklad.

Dokažte, že se výšky trojúhelníka protínají v jediném bodě.

Nejprve zvolíme vhodnou soustavu souřadnic, tj. takovou, aby vztahy, kterými budeme analyticky popisovat geometrickou situaci byly co nejjednodušší, obr. 1.



Obr. 1 Výšky trojúhelníka ABC procházejí jedním bodem – počítačový důkaz

Označme $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [b, c]$ vrcholy trojúhelníka ABC . Nyní vyjádříme rovnice výšek v_a, v_b, v_c :

$$v_a : (b - a)x + cy = 0, \quad v_b : bx + cy - ab = 0, \quad v_c : x - b = 0.$$

Předpokládejme, že se výšky v_b a v_c protínají v bodě $O = [s, t]$, tj. že platí

$$O \in v_b \Leftrightarrow bs + ct - ab = 0, \quad O \in v_c \Leftrightarrow s - b = 0.$$

Chceme ukázat, že výška v_a obsahuje bod O , tj.

$$O \in v_a \Leftrightarrow (b - a)s + ct = 0.$$

Tedy máme dokázat následující tvrzení

$$\forall s, t \{ (bs + ct - ab = 0) \wedge (s - b = 0) \Rightarrow (b - a)s + ct = 0 \}. \quad (2)$$

V tomto velmi jednoduchém případě jsme schopni ukázat, že tvrzení (2) je pravdivé, dokonce ručně – bez užití počítače.

Uvědomme si totiž, že platí

$$(b - a)s + ct = 1 \cdot (bs + ct - ab) - a \cdot (s - b). \quad (3)$$

Vyjádřili jsme polynom závěru $(b - a)s + ct$ jako lineární kombinaci polynomů předpokladů $bs + ct - ab$ and $s - b$. Z platnosti rovnic $bs + ct - ab = 0$, $s - b = 0$ plyne z (3) platnost rovnice $(b - a)s + ct = 0$.

Ukázali jsme, že polynom $(b - a)s + ct$ náleží ideálu $I = (bs + ct - ab, s - b)$. V programu CoCoA^{*)}, který budeme používat, napíšeme

```
Use R:=Q[abcst];
I:=Ideal(bs+ct-ab,s-b);
NF((b-a)s+ct,I);
```

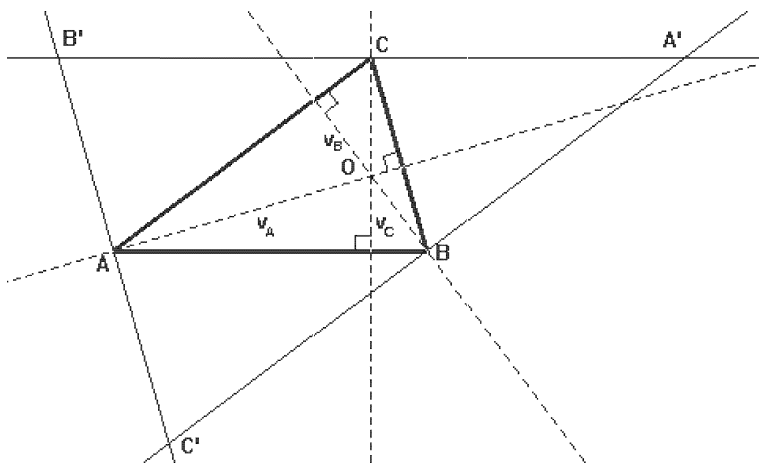
Dostaneme odpověď 0, tj. $\text{NF}((b-a)s+ct, I) = 0$ a tvrzení (2) je pravdivé. „Počítačový“ důkaz je hotov. $\square$

Ukažme ještě klasický důkaz tvrzení, že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě. Můžeme použít následující postup:

Vrcholy A, B, C trojúhelníka vedeme rovnoběžky s protějšími stranami BC, AC, AB , obr. 2. Dostaneme nový trojúhelník $A'B'C'$, v němž výšky v_a, v_b, v_c trojúhelníka ABC tvoří osy stran.

Nyní stačí ukázat, že se osy stran trojúhelníka $A'B'C'$ protínají v jednom bodě. Důkaz tohoto tvrzení přenecháváme čtenáři. $\square$

^{*)} Software CoCoA je zdarma k dispozici na adrese <http://cocoa.dima.unige.it>



Obr. 2 Výšky v_a, v_b, v_c trojúhelníka ABC procházejí jedním bodem – klasický důkaz

K důkazu tvrzení jsme např. mohli použít i Cevovu větu apod.

Klasický důkaz, který jsme právě ukázali, měl kromě řady kladů jeden podstatný nedostatek – potřebovali jsme mít *klíčový nápad*, který vede k řešení problému. Někdy se však může stát, že žádný klíčový nápad nedostaneme.

3. Automatické odvozování vět

V další části se zaměříme na *automatické odvozování vět*, které většinou odlišujeme od automatického objevování vět, o kterém budeme hovořit v další kapitole. Pod automatickým odvozováním vět rozumíme hledání geometrických tvrzení předepsaných vlastností, která plynou z daných předpokladů.

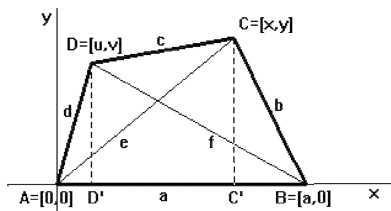
3.1 Staudtova formule

Obvykle začínáme se studenty odvozením Heronovy formule pro obsah trojúhelníka. Protože se však jedná o velmi známý případ, viz. např. [7], ukážeme danou metodu na následujícím méně známém příkladu.

Nechť $ABCD$ je rovinný čtyřúhelník se stranami délek a, b, c, d a úhlopříčkami e, f . Vyjádřete obsah p čtyřúhelníka $ABCD$ pomocí a, b, c, d, e, f .

Ukažme nejprve řešení této úlohy metodou automatického odvozování. Poté ukážeme řešení klasické, abychom mohli obě metody porovnat.

Zvolme systém souřadnic tak že $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [x, y]$, $D = [u, v]$ a označme $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$, obr. 3.



Obr. 3 Obsah čtyřúhelníka $ABCD$, vyjádřený pomocí vzdáleností a, b, c, d, e, f

Pro délky stran a úhlopříček dostaneme: $h_1 : (x - a)^2 + y^2 = b^2$, $h_2 : (u - x)^2 + (v - y)^2 = c^2$, $h_3 : u^2 + v^2 = d^2$, $h_4 : x^2 + y^2 = e^2$, $h_5 : (u - a)^2 + v^2 = f^2$. Obsah p čtyřúhelníka $ABCD$ můžeme vyjádřit s použitím souřadnic vrcholů např. tak, že čtyřúhelník rozdělíme kolmicemi na stranu AB , které procházejí vrcholy C, D na dva pravoúhlé trojúhelníky $AD'D$, $CC'B$ a lichoběžník $D'C'CD$. Potom snadno zjistíme, že pro obsah p platí $h_6 : p = 1/2(ay + xv - uy)$.

Z rovnic $h_1, h_2, \dots, h_6$ budeme eliminovat proměnné x, y, u, v . Jinak řečeno, v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_6)$ hledáme polynomy, které obsahují pouze proměnné a, b, c, d, e, f, p . Mezi těmito polynomy budeme hledat naší formuli. V CoCoA napíšeme

```
Use R ::= Q[xyuvabcdef];
I := Ideal((x-a)^2+y^2-b^2, (u-x)^2+(v-y)^2-c^2, u^2+v^2-d^2, x^2+y^2-e^2,
(u-a)^2+v^2-f^2, p-1/2(ay+xv-uy));
Elim(x..v, I);
```

Jako odpověď dostaneme dva polynomy. Jeden z nich dává po úpravě hledaný vztah

$$16p^2 = 4e^2 f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \quad (4)$$

Tuto formuli, která vyjadřuje obsah čtyřúhelníka pomocí všech šesti vzájemných vzdáleností mezi jeho čtyřmi vrcholy, publikoval *Ch. R. Staudt* v roce 1842, viz [9].

Druhý polynom dává vztah pro vzájemnou závislost mezi všemi šesti vzdálenostmi a, b, c, d, e, f vrcholů čtyřúhelníka. Jak dobře víme, čtyřúhelník je zadán pěti prvky, např. čtyřmi délkami stran a jednou úhlopříčkou (nikoliv jednoznačně). Šest vzdáleností tedy musí být vzájemně závislých, což vyjadřuje právě nalezená Eulerova čtyřbodová relace [6]:

$$e^4 f^2 + e^2 (a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2 + c^2 d^2 - a^2 f^2 - b^2 f^2 - c^2 f^2 - d^2 f^2 + f^4) + a^4 c^2 - a^2 b^2 c^2 + a^2 c^4 - a^2 b^2 d^2 + b^4 d^2 - a^2 c^2 d^2 - b^2 c^2 d^2 + b^2 d^4 - a^2 c^2 f^2 + b^2 c^2 f^2 + a^2 d^2 f^2 - b^2 d^2 f^2 = 0.$$

Eulerova čtyřbodová relace plyne z Cayley–Mengerova determinantu [2] pro objem V čtyřstěnu, známe-li délky jeho všech šesti hran a, b, c, d, e, f

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b^2 & f^2 & a^2 \\ 1 & b^2 & 0 & c^2 & e^2 \\ 1 & f^2 & c^2 & 0 & d^2 \\ 1 & a^2 & e^2 & d^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (5)$$

položíme-li $V = 0$. Vztah (5) se liší od Eulerovy čtyřbodové relace pouze o konstantní násobek 2.

Poznámky:

1) Měli bychom si uvědomit, že Staudtova formule (4) platí při daném označení pro všechny tvary čtyřúhelníka $ABCD$. Tedy např. i v případě, že čtyřúhelník není konvexní nebo dokonce když sám sebe protíná. Obsah p čtyřúhelníka daný formulí h_6 zahrnuje i tyto případy a nazývá se *orientovaný obsah*.

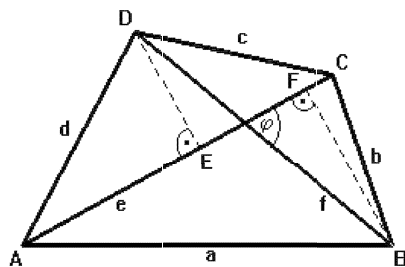
2) Položíme-li v (4) např. $d = 0$ potom se čtyřúhelník změní na trojúhelník a dostaneme Heronův vzorec. Staudtova formule (4) je tedy zobecněním Heronova vzorce. $\square$

Nyní ukážeme klasický způsob nalezení Staudtovy formule (4).

Z pravoúhlých trojúhelníků AED a DEC dostaneme

$$|DE|^2 = d^2 - |AE|^2, \quad |DE|^2 = c^2 - |EC|^2$$

a odtud



Obr. 4 Klasický důkaz Staudtovy formule

$$d^2 - |AE|^2 = c^2 - |EC|^2. \quad (6)$$

Analogicky z pravoúhlých trojúhelníků AFB a CFB dostaneme

$$a^2 - |AF|^2 = b^2 - |FC|^2. \quad (7)$$

Sečtení rovností (6) a (7) dává

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = |AF|^2 - |FC|^2 + |EC|^2 - |AE|^2. \quad (8)$$

Pravou stranu (8) můžeme napsat ve tvaru

$(|AF| + |FC|)(|AF| - |FC|) + (|EC| + |AE|)(|EC| - |AE|) = 2e|EF|$, tedy

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4e^2|EF|^2. \quad (9)$$

Dále platí $|EF| = f \cos \varphi$. Dosazení do (9) dává

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4e^2f^2 \cos^2 \varphi. \quad (10)$$

Nyní použijeme formuli pro obsah čtyřúhelníka známe-li délky úhlopříček e, f a úhel φ jimi sevřený, viz např. [1]

$$p = \frac{1}{2} ef \sin \varphi. \quad (11)$$

Konečně dosazením (10) do (11) s použitím vztahu $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ získáme Staudtovu formuli (4). $\square$

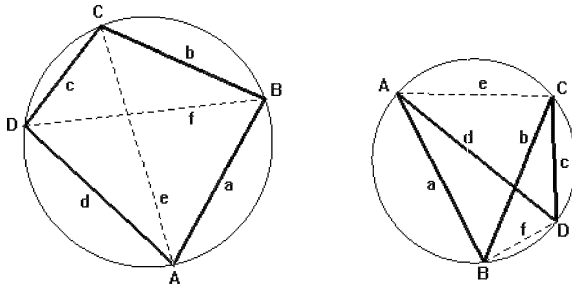
Na tomto příkladu můžeme vidět, že automatické odvození může být v určitém smyslu „snazší“ než při použití klasické metody.

3.2 Brahmaguptova formule

Staudtovu formuli (4), kterou jsme odvodili v předchozí části použijeme k odvození vzorce pro obsah tětívového čtyřúhelníka.

Je dán tětívový čtyřúhelník $ABCD$ (tj. jeho vrcholy leží na kružnici) o stranách délek a, b, c, d . Určete obsah p čtyřúhelníka $ABCD$.

Uvažujme nejprve případ konvexního tětívového čtyřúhelníka, viz obr. 5 vlevo.



Obr. 5 Obsah tětívového čtyřúhelníka vyjádřený pomocí stran a, b, c, d

Podle Ptolemaiovy věty platí vztah $ef = ac + bd$. Přidáme-li tuto podmínku k formuli (4), dostaneme eliminací proměnných e, f hledanou formuli (eliminaci lze provést v tomto případě i ručně pouhým dosazením). V CoCoA zadáme

```
Use R:=Q[abcdefp];
I:=Ideal(16p^2-4e^2f^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)^2,ac+bd-ef);
Elim(e..f,I);
```

Vyjde jediný polynom, který vede na rovnici

$$16p^2 = -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) + 8abcd, \quad (12)$$

nebo

$$16p^2 = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$$

a nebo, což je totéž

$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad (13)$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$. To je známá *Brahmaguptova* formule, (*Brahmagupta*, žil v letech 598 - asi 665 v Indii).

Na obr. 5 vpravo vidíme ještě jiný tvar tětíivového čtyřúhelníka $ABCD$ při *týchž* délkách stran a, b, c, d . V tomto případě podle Ptolemaiovy věty platí $ef = bd - ac$. Přidáme-li tuto podmínku ke vztahu (4), dostaneme eliminací proměnných e, f hledanou formuli pro případ nekonvexního tětíivového čtyřúhelníka. Zadáme

```
Use R:=Q[abcdefp];
I:=Ideal(16p^2-4e^2f^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)^2,
(ac-bd-ef)(ac-bd+ef));
Elim(e..f,I);
```

a dostaneme polynom, který vede na rovnici

$$16p^2 = -(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - 8abcd \quad (14)$$

nebo

$$16p^2 = (a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b + c - d)(-a + b + c - d).$$

Ke stejnému výsledku vede zbývající možnost $ef = ac - bd$.

Poznámka:

Pro volbu $a = 2, b = 1, c = 1, d = 1$ dostaneme pouze jediný tvar čtyřúhelníka, ve vzorci (14) vyjde totiž napravo záporné číslo. Můžeme tedy konstatovat, že pro dané délky a, b, c, d existují *nejvýše dva* čtyřúhelníky s různými obsahy p které vypočteme podle vzorců (12) a (14). $\square$

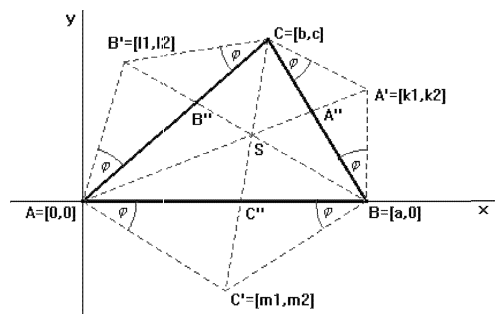
Klasický důkaz vynecháváme. Je možno jej najít např. v [2].

3.3 Kiepertova hyperbola

Automatické dokazování a odvozování si ukážeme ještě v následujícím příkladu.

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojme podobné rovnoramenné trojúhelníky ABC', BCA', CAB' obr. Potom se přímky AA', BB', CC' protínají v jednom bodě.

Zvolme soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0], B = [a, 0], C = [b, c], A' = [k_1, k_2], B' = [l_1, l_2], C' = [m_1, m_2]$, obr. 6.



Obr. 6 Přímky AA' , BB' , CC' se protínají v bodě S

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme podobné rovnoramenné trojúhelníky ABC' , BCA' , CAB' (všechny vně trojúhelníka ABC nebo dovnitř). Rovnoramenný trojúhelník BCA' popíšeme následujícím způsobem. Vrchol A' je koncovým bodem vektoru, jehož počátek je ve středu strany BC o délce $v|BC|$, kde v je nějaké číslo, a má též směr jako vektor $B - C$ otočený o 90° v kladném smyslu, tj. platí $(k_1 - (a+b)/2, k_2 - c/2) = v(c, a - b)$. Analogicky postupujeme u vrcholů B' a C' .

Přímky AA' , BB' , CC' mají po řadě rovnice

$$\begin{aligned} k_1 y - k_2 x &= 0, \\ (l_1 - a)y - (x - a)l_2 &= 0, \\ (b - m_1)(y - m_2) - (x - m_1)(c - m_2) &= 0. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $S = [s_1, s_2]$ je společný bod přímek AA' a BB' . Chceme dokázat, že bod S leží také na přímce CC' . Napišeme

```
Use R::=Q[k[1..2]l[1..2]m[1..2]s[1..2]abcv];
I:=Ideal(2k[1]-a-b-2vc,2k[2]-c-2va+2vb,2l[1]-b+2vc,2l[2]-c-2vb,2m[1]-a,m[2]+va,k[1]s[2]-k[2]s[1],(1[1]-a)s[2]-(s[1]-a)l[2]);
NF((b-m[1])(s[2]-m[2])-(s[1]-m[1])(c-m[2]),I);
```

Odpověď je 0, což znamená, že se přímky AA' , BB' , CC' protínají v jednom bodě. $\square$

Následuje krátký a elegantní klasický důkaz posledního tvrzení, který publikoval *O. Bottema* [3], a který si zaslouží pozornost. Důkaz je založen

na tzv. *areální metodě* [10], viz obr. 6. Platí

$$\begin{aligned} |AC''|/|C''B| &= \text{obsah } \triangle ACC' / \text{obsah } \triangle BCC' = \\ &= |AC||AC'| \sin(A + \varphi) / |BC||BC'| \sin(B + \varphi) = \\ &= |AC| \sin(A + \varphi) / |BC| \sin(B + \varphi) \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} |BA''|/|A''C| &= |AB| \sin(B + \varphi) / |AC| \sin(C + \varphi), \\ |CB''|/|B''A| &= |BC| \sin(C + \varphi) / |AB| \sin(A + \varphi). \end{aligned}$$

Vidíme, že platí

$$\frac{|AC''|}{|C''B|} \cdot \frac{|BA''|}{|A''C|} \cdot \frac{|CB''|}{|B''A|} = 1$$

a výsledek nyní plyne z obrácené Cévy vety. $\square$

Opět si povšimněme, že k tomu, abychom tvrzení dokázali klasickým způsobem, jsme potřebovali klíčový nápad.

Poslední výsledek použijeme k nalezení množiny bodů dané vlastnosti.

Nalezněte množinu bodů S při měnícím se úhlu φ podobných trojúhelníků z posledního příkladu.

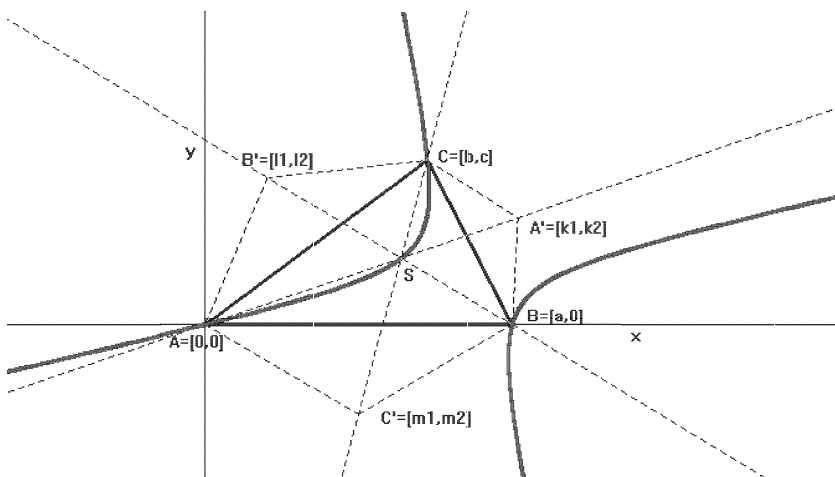
Při označení jako v posledním příkladu, eliminujeme v ideálu I proměnné $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2, v$.

Eliminační ideál bude v tomto případě obsahovat pouze polynomy v proměnných a, b, c, s_1, s_2 . Dostaneme jediný polynom, který dává rovnici kuželosečky (kde píšeme $[x, y]$ místo $[s_1, s_2]$)

$$\begin{aligned} x^2c(a - 2b) + 2xy(a^2 - ab + b^2 - c^2) + y^2c(2b - a) + xac(2b - a) + \\ + ya(c^2 - ab - b^2) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

která se nazývá *Kiepertova hyperbola*, obr. 7.

Body S tedy leží na hyperbole (15). Vyplní body S celou hyperbolu nebo jen její část? Pro libovolný bod $S = [x, y]$ vypočítáme hodnotu v . Po krátkém výpočtu zjistíme, že pro hodnoty $x = b, y = (a - b)b/c$, které odpovídají průsečíku výšek trojúhelníka, hodnota v neexistuje. Hledanou množinou bodů je tedy hyperbola (15) bez průsečíku výšek trojúhelníka ABC .



Obr. 7 Bod S leží na Kiepertově hyperbole

Kiepertova hyperbola má mnoho zajímavých vlastností, např. je to rovnosá hyperbola, která prochází vrcholy trojúhelníka ABC (pro které rovnoramenné trojúhelníky?). Obsahuje také další významné body trojúhelníka ABC jako těžiště, průsečík výšek, vnější a vnitřní Fermatův atd. Kiepertova hyperbola je úzce svázána rovněž s Wallace-Simsonovou přímkou a Feuerbachovou kružnicí.

(Pokračování)

Literatura

- [1] *Bartsch, H. J.*: Matematické vzorce. SNTL, Praha 1983.
- [2] *Berger, M.*: Geometry I. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg 1987.
- [3] *Bottema, O.*: Hoofstukken uit de elementaire meetkunde. Servire, Den Haag, 1944, Epsilon, Utrecht 1987.
- [4] *Cox, D. – Little, J. – O'Shea, D.*: Ideals, Varieties, and Algorithms. Second Edition, Springer 1997.
- [5] *Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.*: Geometry revisited. Toronto – New York 1967.
- [6] *Dörrie, B. H.*: Triumph der Mathematik. Breslau 1933.
- [7] *Hora, J. – Pech, P.*: Using computer to discover some theorems in geometry. Acta Acad. Paed. Agriensis 29 (2002), 67-75.
- [8] *Karger, A.*: Classical Geometry and Computers. Journal for Geometry and Graphics 2 (1998), 7-15.

- [9] *Staudt, Ch. R.*: Über die Inhalte der Polygone und Polyeder. Journal für die reine und angewandte Mathematik **24** (1842), 252-256.
- [10] *Wang, D.*: Gröbner Bases Applied to Geometric Theorem Proving and Discovering. In: Gröbner bases and applications. B. Buchberger, F. Winkler (eds), Lecture Notes of Computer Algebra, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 281-301.
- [11] *Pech. P.*: Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii. Jihočeská univerzita, Č. Budějovice, 2005.

Částka slovy

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Předkládáme další téma vhodné pro programové zpracování. Neklade příliš velké nároky na použití programových prostředků, ale přitom je zajímavě komplikované. Každý, kdo vyplňoval nějaký doklad na předávání peněz, se setkal s požadavkem „(částka) slovy:“ a vypsál např. „jedentisícdvěstědvacetjedna“. A to je náš problém: do programu se na klávesnici zadá částka od 1 do 999 999 a na obrazovku vystoupí příslušné slovní vyjádření (jako jedno slovo, tj. bez mezer).

Jazykové vyjádření může mít různé varianty, my si zvolíme tuto (jde tu vlastně už o analýzu požadovaného výstupu):

- a) 1000 nepojmenováváme „tisíc“, ale „jedentisíc“, 100 ne jen „sto“, ale „jednosto“ (to se u peněz zpravidla vyžaduje);
- b) vyjádření stovek se používá ve tvarech „jednosto“, „dvěstě“, „třista“, „pětset“;
- c) vyjádření počtu tisíc se používá ve tvaru „dvatisíce“, (podobně i „tři-“ a „čtyřitisíce“), ve všech ostatních případech ve tvaru „tisíc“ („jedentisíc“, „pětisíc“, ale i „dvacetdvatisíc“, „stotřitisíc“, apod.);
- d) jednička se interpretuje ve tvaru „jeden“ („jedentisíc“), „jedno“ („jednosto“) a „jedna“ (např. „dvacetjedna“);
- e) dvojka se interpretuje ve tvaru „dvě“ jen ve slově „dvěstě“, jinak ve všech případech jako „dva“ (např. „třicetdva“;

f) pamatujeme na to, že čísla od 11 do 19 mají svá speciální vyjádření, např. 35 je „třicetpět“, 25 je „dvacetpět“, ale 15 není „desetpět“, nýbrž „patnáct“.

A dále:

g) Každé zadané číslo lze rozdělit na dvě části, na počet tisíců a na zbývající počet jednotek, obě části jsou maximálně trojmístné a způsob jejich slovního vyjádření se do značné míry shoduje, ale je tu rozdílné vyjádření jedničky na konci: např. 521 521 je „pětsetdvacet**jed**entisícpětsetdvacet**jed**na“. Pokud tedy bude na zpracování obou částí připravena nějaká společná procedura, musí se tento rozdíl zohlednit.

Dále uvádíme výpis jedné z možností zpracování programu řešícího naši úlohu. Programová analýza je patrná z komentáře, kterým výpis jednotlivých částí programu doprovázíme.

```
program SlovyKc;
```

```
{Slovni vyjadreni castky od 1 do 999 999}
```

```
uses Crt;
```

```
const
```

```
  Jedn: array [0..9] of string =
```

```
    ('', '', 'dva', 'tri', 'ctyri', 'pet', 'sest', 'sedm', 'osm',  
     'devet');
```

```
  Desit: array [0..9] of string =
```

```
    ('', '', 'dvacet', 'tricet', 'ctyricet', 'padesat', 'sedesat',  
     'sedmdesat', 'osmdesat', 'devadesat');
```

```
  Nact: array [0..9] of string =
```

```
    ('deset', 'jedenact', 'dvanact', 'trinact', 'ctrnact',  
     'patnact', 'sestnact', 'sedmnact', 'osmnact', 'devatenact');
```

```
var
```

```
  Castka: Longint;
```

```
  Zaklad: Integer;
```

```
  Slovy: string;
```

```
  Z: array [1..3] of Integer;
```

Vstupní *Castka* se v programu rozdělí na dvě části, tisíce a zbývající jednotky, např. 35 519 na 35 a 519. Tyto dvě hodnoty tvoří *Zaklad* (řekněme

„vyšší“ a „nižší“), který je v proceduře *ZpracujZaklad* postupně pojmenováván a výstup se ukládá do *Slovy*. Proměnná (pole) *Z* zprostředkovává pojmenování stovek, desítek a jednotek a čísel na *-náct*.

Standardní názvy jednotek a stovek jsou uloženy v konstantách *Jedn*, názvy desítek v konstantách *Desit* a názvy čísel od 10 do 19 v konstantách *Nact*.

Vidíme, že 0, která není v desítkách, je interpretována jako prázdný řetězec, číslovka 1 se vzhledem k d) f) g) interpretuje individuálně.

```
procedure ZpracujZaklad;
begin
  Z[1] := Zaklad div 100;
  Z[2] := (Zaklad div 10) mod 10;
  Z[3] := Zaklad mod 10;
  case Z[1] of
    1: Slovy := Slovy + 'jednosto';
    2: Slovy := Slovy + 'dveste';
    3, 4: Slovy := Slovy + Jedn[Z[1]] + 'sta';
    5, 6, 7, 8, 9: Slovy := Slovy + Jedn[Z[1]] + 'set';
  end;
  if Z[2] = 1 then
    Slovy := Slovy + Nact[Z[3]]
  else
    Slovy := Slovy + Desit[Z[2]] + Jedn[Z[3]]
  end;
end;
```

Procedura *ZpracujZaklad* nejprve rozdělí základ na stovky, desítky a jednotky. Při pojmenování stovek jsou rozlišeny případy s odlišným vyjádřením. Při pojmenování desítek je zvlášť uvažován nestandardní případ 10 – 19 a zvlášť standard, kde se celkové pojmenování skládá z pojmenování desítek a jednotek; předem je v hlavním programu dosazeno *Jedn*[1] = 'jeden' pro „vyšší“ základ a *Jedn*[1] = 'jedna' pro základ „nižší“.

```
begin {program}
  ClrScr;
  repeat
    Write('Vyjadrit slovy castku (1 az 999 999, 0 = konec):
          ');
  repeat
```

```

    ReadLn(Castka);
    if Castka = 0 then Exit
until (Castka < 1000000) and (Castka > 0);
WriteLn;
Zaklad := Castka div 1000;
Slovy := '';
Jedn[1] := 'jeden';
ZpracujZaklad;
if Zaklad <> 0 then
    Slovy := Slovy + 'tisic';
if (Z[3] in [2,3,4]) and (Zaklad < 10) then
    Slovy := Slovy + 'e';
Zaklad := Castka mod 1000;
Jedn[1] := 'jedna';
ZpracujZaklad;
WriteLn(Castka, ' je ', Slovy);
WriteLn
until false
end. {program}

```

Hlavní program načte vstup, ověří jeho rozsah, vypočte „vyšší“ základ, v proceduře jej zpracuje a pojmenuje, přidá slovo „tisíc“ nebo „tisíce“, vypočte a v proceduře pojmenuje „nižší“ základ a na obrazovku vystoupí výsledek. Pro pohodlí testování programu je program vytvořen jako neko-nečná smyčka, z níž se vyskočí po zadání částky 0.

Zadanou úlohu lze různě pozměňovat, zdokonalovat či komplikovat. Uvedme si některé návrhy:

1. Rozšířit úlohu o zadávání milionů, tj na částky od 1 do 999 999 999.
2. Ve vhodných případech změnit „dva“ na „dvě“.
3. Zadání přijímat jako text, tj. i ve tvaru s mezerou mezi tisíci a stovkami, např. 12 712.
4. Částku přijímat textově i se zadáním označení měny, např. Kč, \$, €. V souvislosti se zadanou jednotkou změnit ve vhodných případech (Kč, €) „dva“ na „dvě“, pro \$ ponechat „dva“.
5. Vytvořit anglickou verzi programu (po zjištění pravidel, jak se slovně vyjadřují částky v angličtině).

ZKUŠENOSTI

Týden v turecké škole

V říjnu minulého roku jsem měl možnost navštívit v rámci vzdělávacího programu EU ARION základní školu Emina Saglamera v tureckém hlavním městě, poznat její klima, materiální vybavení, způsob výuky i vzájemné vztahy žáků a učitelů. Jako učitele fyziky mne zajímala hlavně výuka vztahující se k tomuto předmětu. Jelikož šlo o školu pouze s 1. – 5. ročníkem, tedy jakýsi ekvivalent našemu prvnímu stupni ZŠ, můj zájem se soustředil zejména na přírodovědu ve 4. – 5. ročníku.

Výuka přírodovědy je v Turecku vysoce činnostní. Každý pojem, každý nový poznatek žáci získávají současně prostřednictvím různých smyslů s využitím co největšího množství pomůcek. V jedné hodině přírodovědy jsem mohl např. sledovat, jak žáci poznávají vlastnosti různých vláken tím, že s nimi všelijak experimentují. Měli k dispozici různé nitě, provázky, gumičky a drátky, které různě tvarovali, vázali, namáčeli do barvy a pak zase čistili, současně s materiálem vytvářeli nejrozdílnější ornamenty, rybářské sítě, závěsy, apod. Při zkoumání pevnosti vytvářeli různé provázky z více vláken, které se snažili přetřhnout. Výsledkem byl přehled následujících vlastností: pružnost, pevnost, tvárnost, schopnost nasát a udržet vodu, odolnost proti střihu, apod. současně s možností využití pro konkrétní účely.

Pro výuku přírodovědy měla škola zvláštní učebnu, při stěnách byly prosklené skříně s velmi kvalitním vybavením zejména fyzikálního a přírodopisného zaměření (obr. 1). Žák 5. ročníku již měří voltmetrem, pracuje s váhami, laboratorním

sklem, funkčními elektrickými zařízeními (nízkonapěťovými motory, induktory), modely částí lidského těla apod.



Obr. 1

Turecké učebnice přírodovědy jsou opravdu pěkné. Jsou poměrně silné (asi 100 stran formátu 25×20 cm), obsahují velmi mnoho obrázků, ale překvapil mne i poměrně značný rozsah textu vzhledem k věku dětí. Z důvodů jazykových jsem jen z grafiky mohl usuzovat na jejich věcný obsah. Učivo v nich obsažené u nás bývá v tomto rozsahu zařazeno až na 2. stupni ZŠ v jednotlivých přírodovědných předmětech.

Jako příklad si dovoluji uvést učivo o vesmíru. Turečtí pátáci se učí poměrně hodně o pohybu Měsíce, o jeho fázích a dále pak o zatmění. Na to navazují poznatky o Slunci, oběžích planet, galaxiích. Jde se i do takových detailů, jako je existence a pohyb meziplanetární hmoty a důsledky jejího dopadu na planety (měsíce), popř. na Zemi. Rozsah tohoto učiva mne velmi překvapil – v naší výuce je mu věnováno na ZŠ jak ve fyzice, tak i v zeměpise podstatně méně.

Ve volných dnech jsem si podrobně prohlédl region školy – periferní část hlavního

města. Jako turista, kterého nevedou průvodci, jsem se podíval i do velmi chudých čtvrtí. Tam jsem pozoroval nuzně oblečené děti – některé žebrající, a jen z oprýskaných fasád domů a nezasklených oken jejich domovů, jsem odhadoval jejich domácí podmínky pro vzdělávání. Velmi dobrý motiv pro školní debaty. Tyto děti vypadají ve škole zcela jinak. Svoje pouliční šaty vymění za čisté stejnokroje, v nichž se nepochybně cítí lépe. Škola je pro ně zřejmě velmi zajímavé prostředí, které jim otevírá mnoho možností. Tyto děti neznající vysílání televize a hraní si s mobily si hrají ve škole s věcmi, které budou pro ně jednou snad užitečné. Získal jsem dojem, že právě tyto chudé rodiny si školy velmi váží.



Obr. 2

O to víc mne ve škole překvapilo, jaké úkoly děti dostávají domů. Jsou to především úkoly experimentální povahy, k jejichž splnění ovšem potřebují jen předměty z běžného denního života. V době mé návštěvy měli žáci na svépomocně zhotoveném modelu předvést činnost plic. Tematicky učivo souviselo s chápáním tlaku vzduchu a se stavbou těla savců. Chlapec na obr. 2 použil velkou PET láhev, jejíž dno nahradil balónkem. Zátkou vedl dovnitř trubičku (dýchačí cesta), která se uvnitř rozduvovala a každý z jejích konců ústil do balónku (pravá a levá plice). Pohybem balónku na místě dna PET láhve žák ukazovat rozpínání nebo stlačování hrudníku (popř. břicha), což se projevovalo změnou objemu vzduchu v balóncích uvnitř (vlastní dýchání). Z reakce učitelky jsem vyčetl, že chlapec celou činnost plic velmi dobře také popsal a vysvětlil. Zajímavé bylo, že tento model si do školy přinesl každý žák. Jak jsem se mohl přesvědčit, celý model byl z hlediska nutné těsnosti velmi pečlivě zhotoven.

Ač jsou ve škole děti z velmi různých sociálních prostředí, z jejich chování to nelze vyčíst. Jejich slušivé stejnokroje je sbližují. Prý si navzájem nezávidí, ani si neubližují, jen se všechny (zejména během přestávek) projevují poněkud hlasitěji než u nás.

S dětmi jsem hovořil v rámci velmi omezené anglické slovní zásoby. Měly však snahu mluvit a domluvit se, tedy snažily se cizí jazyk užít v maximální možné míře. Jejich spontánnost a aktivita je pro mne jedním z nejceněnějších suvenýrů z Turecka.

František Jáchim

ZPRÁVY

Jak učit matematice žáky ve věku 11 – 15 let

Konference s výše uvedeným názvem má dlouhou tradici, která započala v Hradci Králové a postupně se konala ve Frýdku-Místku a v Litomyšli, aby se letos uskutečnila – s mezinárodní účastí – ve dnech 13. – 15. října opět v Hradci Králové. Na uspořádání konference se podílela Jednota českých matematiků a fyziků, Společnost učitelů matematiky JČMF, Centrum vzdělávání Královéhradeckého kraje, Katedra matematiky pedagogické fakulty Univerzity Hradec Králové, Střední zdravotnická škola Hradec Králové a Střední odborné učiliště obchodní Hradec Králové. Na konferenci se setkala zhruba 150 účastníků, kteří byli zejména učители základních škol a nižších stupňů víceletých gymnázií, ale i vysokoškolské pedagogy a pracovníci pedagogických center a výzkumných ústavů z České republiky a Slovenska.

Zaměřením konference byly metody práce učitele matematiky (Rozvoj učitelových a žákovských kompetencí ve vyučování matematice). Téma je vzhledem k probíhající kurikulární reformě spojené s povinností škol vytvářet své vlastní školní vzdělávací programy nanejvýš aktuální.

Zaměření konference bylo pojednáno z různých úhlů pohledu v plenárních vystoupeních, kterým byl věnován program ve čtvrtek. Zde vystoupil s pohledy obecného didaktika *Otto Obst* z Pedagogické fakulty UP v Olomouci s příspěvkem „Metody práce učitele matematiky z hlediska obecné didaktiky“, pohledy didaktiků matematiky na případná úskalí aktuální situace ve školách nastínil ve svém referátu

„Kultivace kompetencí ve vyučování matematice“ *František Kuřina* z pořádající Univerzity Hradec Králové. „Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe“ byly obsahem referátu *Nadi Stehlíkové* z Pedagogické fakulty UK v Praze. Z téhož pracoviště byl i *Václav Sýkora*, který se zabýval konkretizací pojmu kompetence ve vyučování matematice.

Výtečnou možností pro vzájemnou výměnu zkušeností mezi učiteli je účast na hodinách některých svých kolegů a následná diskuse přímo na školách. Proto byla taková možnost účastníkům organizátory nabídnuta a setkala se s vřelým přijetím. V pátek dopoledne jsme navštívili vybrané školy v Hradci Králové a je na místě poděkovat všem ochotným a obětavým učitelům, kteří si ukázkové hodiny pro kolegy nachystali.

Páteční odpolední i sobotní jednání bylo věnováno jiné formě výměny a prezentace zkušeností – proběhly dílny, kulaté stoly a v samém závěru bylo plénum seznámeno s několika krátkými sděleními souvisejícími s tématy jednání. Potěšujícím konstatováním je skutečnost, že vedení dílen a diskusí se ujali nejen pracovníci a studenti vysokých škol, ale i kantoři ze základních a středních škol.

Jednání konference bylo doprovázeno prodejními výstavkami pedagogických nakladatelství v čele s Prometheem, zájemci měli možnost seznámit se a vyzkoušet interaktivní tabuli.

Za uspořádání velmi zdařilé akce patří dík všem jejím organizátorům, zejména však paní *Lence Takáčové* z Centra vzdělávání Královéhradeckého kraje.

Jiří Dittrich

12. Mezinárodní seminář z dějin fyziky

Ve dnech 22. až 24. září 2005 proběhl v Trenčianských Teplicích pod patronací Slovenské společnosti pro dějiny věd a techniky při SAV a Slovenské fyzikální společnosti při SAV 12. Mezinárodní seminář z dějin fyziky (MESDEF 2005) za účasti slovenských a českých zájemců o dějiny fyziky. Navázal na tradici dřívějších československých seminářů, které od r. 1984 až do rozdělení federace probíhaly střídavě na Slovensku a v českých zemích. Po rozdělení se pak konaly jen na různých místech Slovenska, naposledy v září 2002 v Žilině. Další dva semináře opět proběhly na území ČR (Lednice 2003, Brno 2004). Z každého semináře jsou vydávány sborníky referátů, takže zatím poslední XXII. Sborník dějin fyziky (Bratislava 2005, 207 s.) přináší s ročním opožděním příspěvky přednesené na 11. MESDEFu, který se konal ve dnech 9. až 11. září 2004 v Brně v prostorách pobočky Českého hydrometeorologického ústavu, Křofтова 43 (viz zprávu v MFI roč. 14 (2004), č. 4, s. 253 – 255).

V úvodu semináře doc. RNDr. Elena Ferencová, CSc. připomenula osobnost a dílo vzácného člověka, dlouholetého aktivního účastníka seminářů RNDr. Alberta Hlaváče (1919 – 2005). Vyzvedla jeho velmi úspěšnou pedagogickou činnost na středních školách, významnou a mnohokrát oceněnou organizační činnost v Jednotě slovenských matematiků a fyziků (JSMF), především jeho podíl na vypracování a následném uskutečňování koncepce Fyzikálně pedagogické sekce JSMF, založené v r. 1970. Pod vedením A. Hlaváče se konaly četné přednášky a instruktáže pro učitele středních škol zaměřené na modernizaci, zvýšení kvality a přitažlivosti výuky fyziky na školách. Připomenula jeho četná vystoupení na seminářích, která by-

la zaměřena na slovenské učebnice, používané v průběhu 19. století na národních školách a na gymnáziích. Hlaváč v nich hodnotil z pedagogického a odborného hlediska obsah, rozsah, přístupnost a aktuálnost obsažených fyzikálních poznatků, způsob výkladu látky a upozorňoval na přínosy jednotlivých autorů (J. Bežo, J. Fuchs, C. Gally, I. Györfy, M. Jalovecký, G. Kordoš, P. Michalko, J. Pribicer, A. Radlinský, P. Uhrín, I. B. Zoch). Přitom vždy zdůrazňoval, do jaké míry autoři přispěli ke zvýšení vzdělanosti a obecně kulturní úrovně slovenského lidu. Velkou část svých příspěvků potom zahrnul do souborné práce „Desať vetiev slovenského fyzikálneho stromu v druhej polovici minulého storočia“ (SAP – Slovak Academic Press, Bratislava 1994, 179 s.). A. Hlaváč také na seminářích uváděl i přínosy svých významných vrstevníků, které blíže poznal z četných setkání, především na půdě JSMF (P. Baláž, J. Fischer, J. Chrapan, D. Ilkovič, J. Krmešský, I. Stariček, S. Usačev, J. Vanovič). Z rozhodnutí ÚV JSMF se stal v r. 1970 členem Komise pro zpracování historie JSMF, která u příležitosti 15. výročí vzniku JSMF vydala publikaci „Jednota slovenských matematiků a fyziků, vznik – poslanie – činnosť“ (Žilina 1985, 228 s.), na jejíž přípravě a vydání měl významný podíl. Později již jako předseda zmíněné Komise měl hlavní zásluhu na vydání publikace „Matematici, fyzici a astronómovia na Slovensku“ vydané k 25. výročí vzniku JSMF (Ediční centrum MFF UK, Bratislava 1995, 128 s.). Tento soubor obsahuje 102 jmen osobností, které se narodily nebo žily na území dnešní Slovenské republiky. Kromě životopisných údajů zde nacházíme zhodnocení jejich pedagogické, odborné a vědecké činnosti. Velký zájem o knihu způsobil, že A. Hlaváč se svým kolektivem (J. Čížmár, E. Ferencová, M. T. Morovics, J. Šebesta) připravil v krátké době nové, pod-

statně doplněné a rozšířené vydání, které obsáhlo již 255 jmen osobností („Matematici, fyzici a astronómovia na Slovensku II“. Ediční centrum MFF UK, Bratislava 1999, 213 s.). Velkou oblibu nejen na Slovensku, ale i v českých zemích si svého času získala Hlaváčova populárně vědecká kniha, určená zejména mládeži a širokému okruhu zájemců o přírodní jevy, s názvem „Bojíte sa blesku?“ (Alfa, Bratislava 1986, 205 s.). O kvalitě publikace svědčí i skutečnost, že byla v krátké době přeložena do ruštiny. Albert Hlaváč se svou obsáhlou pedagogickou, organizátorskou a publikační činností právem zařadil k těm slovenským matematikům a fyzikům, o nichž často a velmi rád přednášel a psal.

Na semináři byly předneseny následující příspěvky:

Karel Mačák (KAM TU, Liberec): Christian Johann Doppler (1803 – 1853) a výuka teorie pravděpodobnosti v českých zemích;

Miroslav Randa (PdF ZČU, Plzeň): František Josef Smetana (1801 – 1861) – život a dílo;

Jana Mešterová (Slovenské technické muzeum, Košice): Ernst Chladni (1756 – 1827) – fyzik se slovenskými kořeny;

Miroslav T. Morovics (HÚ SAV, Oddělení dějin věd a techniky, Bratislava): Chladniho obrazce v podání Karola Antolíka (1843 – 1905); Snahy o aplikaci elektromagnetických jevů v díle Štefana Aniana Jedlíka (1800 – 1895);

František Čudziš (Liptovský Mikuláš): Podstatné momenty v průběhu historického vývoje tepelných motorů;

Rudolf Kolomý (Moravská Třebová): Počátky studia elektromagnetických jevů. Vznik Ampérovy elektrodynamiky;

Karel Krška (ČHMÚ, Brno): Kvantifikace v agrometeorologii jako fyzikální a technický problém v historickém přehledu;

Drahomír Dušátko (Vojenský geografický a hydrometeorologický úřad, Dobruška): Určování výšek ve fyzikálním prostoru tělesa Země;

Josef Hubeňák (Pdf UHK): Od uhlíkové žárovky k moderním zdrojům světla (přednáška s demonstrací);

Vladimír Štefl (KTF a AF PpF MU, Brno): K určování dráhy Saturna v geocentrické a heliocentrické soustavě;

Ingrid Hympánová (FMFI UK, Bratislava): Legenda šikmé věže;

Andrej Šperka (HÚ SAV, Oddělení dějin věd a techniky, Bratislava): Dissertatio historico-physica de montibus Hungariae (1714) – jedna z nejstarších z Trnavské univerzity;

Elena Ferencová – Elena Kukurová (LF UK, Bratislava): Karol Otto Moller (1670 – 1747) – významný slovenský lékař, průkopník lázeňské léčby, uznávaný farmaceut a všestranný přírodovědec, podporovatel hornického podnikání na Slovensku;

J. Chrapan (Fakulta ekologie a environmentalistiky TU, Zvolen): Atom na Slovensku. Výuka, výzkum a aplikace atomové a jaderné fyziky;

Július Suja-Žiak (Martin): Profesor Ján Fischer (1905 – 1980). Uplynulo sto let od narození předního slovenského teoretického fyzika a významného pedagoga.

Z uvedeného přehledu přednášek je zřejmé, že tematický záběr semináře se rozšířil, objevily se např. matematicky, astronomicky a technicky orientované příspěvky, což bylo podle vyjádření účastníků vítaným zpeřtřením náplně celého řídenního zasedání.

Jako každoročně, tak i letos byla součástí semináře exkurze. Tentokrát se účastníci za odborného vedení blíže seznámili s historií a současnou situací v místních lázeňských zařazeních, která pro své nadprůměrné léčebné výsledky patří na Slovensku k velmi vyhledávaným.

Za přípravu a zdárný průběh celého semináře zaslouží srdečné poděkování Odborná skupina dějín a metodologie fyziky Slovenské fyzikální společnosti pod vedením RNDr. Miroslava T. Moravice, CSc.

Podle předběžné dohody by se příští seminář měl uskutečnit v první polovině září r. 2006 ve Slovenském technickém muzeu v Košicích. Bližší informace o termínu a místě konání podá RNDr. Ingrid Hympanová z KZDF FMFI UK Mlynská dolina, 842 15 Bratislava 4 – (hympanova@fmph.niba.sk).

Všichni zájemci o tuto problematiku jsou srdečně zváni.

Rudolf Kolomý

... aby fyzika žáky bavila ... 2

Ve dnech 19. – 22. 10. 2005 se ve Vlachovicích (u Nového Města na Moravě) konal jubilejní 10. seminář, pořádaný OS pro vyučování fyzice na ZŠ při FPS JČMF. Semináře se zúčastnilo přes 80 učitelů základních, středních i vysokých škol, včetně kolegů ze Slovenska a Polska.

V úvodu semináře seznámila účastníky zástupkyně ČEZU M. Dufková s aktuální nabídkou výukových materiálů, programů a exkurzí pro školy. Součástí semináře byly i prodejní výstavky učebnic nakladatelství Prometheus a Prodos.

Během semináře si učitelé vyměňovali zkušenosti a nápady. Cílem účastníků je poskytovat dětem i sobě stále živou a zajímavou výuku fyziky. Dle aktuálního zájmu pedagogů byly příspěvky rozděleny do několika okruhů. Kromě výstupů měli učitelé možnost vzájemně prezentovat žákovské práce a další materiály a tak získávat nové náměty pro práci s dětmi.

Zajímavé pokusy v úvodu semináře předvedli L. Dvořák a Z. Ondráček. O. Janda prezentoval možnosti využití

elektrotechnických modulů. E. Svoboda, S. Ciemuchowska a Z. Pinkavová seznámili účastníky s výsledky výzkumů zájmů žáků a jejich oblibou předmětu fyzika v České republice, Polsku a Itálii. D. Mandíková zaujala posluchače problematikou intuitivních představ, se kterými by měli učitelé počítat při výuce fyziky.

Velmi zajímavé podněty k zamyšlení – proč by se měli žáci učit fyziku a k čemu jim tyto znalosti jsou – přinesly příspěvky O. Lepila a J. Dirlbecka.

Stále aktuální otázkou je, jak vhodně začlenit internet a počítačové programy do výuky. Se svými zkušenostmi se podělili kolegové L. Dvořák, R. Holubová a E. Müllerová.

Netradiční úlohy či způsoby zadání prezentovali J. Janás, P. Horváth, J. Salák, J. Tesař, I. Volf. Velmi inspirativní byly i příklady zpestření hodin fyziky anagramy (L. Lepík) či fyzikálními detektivkami (M. Veselý). Na to, že v pedagogické praxi má stále své místo i projektová výuka, upozornili P. Čerňanský a R. Horylová. Příklady zpestření výuky zajímavými pokusy nabídli V. Bďínková, M. Baráková, J. Reichl, I. Koudelková, L. Dvořák.

Poměrně velký zájem měl okruh Soutěže, kde kolegové A. Míček, Z. Polák, L. Lepík, L. Štýbnarová a V. Piskač prezentovali rozličné způsoby školních i mežiškolních soutěží.

Seminář se věnoval i nejaktuálnějším problémům v českém školství. Proto byly se zájmem očekávány výstupy na téma Školní vzdělávací programy, kdy se se svými zkušenostmi s tvorbou a ověřováním ŠVP podělili kolegyně H. Tesařová a V. Karásková. Ne méně inspirativní výstupy na toto téma přednesli I. Volf, R. Kolářová, E. Hejnová a V. Votruba.

Po letech k nám na seminář zavítal i zástupce MŠMT. Jsme velmi rádi, že I. Jupa vystoupil s problematikou rovněž v praxi poměrně neznámou, jak sepsat úspěšný

grant, jaké má možnosti základní škola získat grant v rámci Evropských sociálních fondů. Jeho vystoupení bylo doplněno praktickými zkušenostmi kolegyně V. Karáskové.

Učitelé se od fyziky neodloučili ani při zdánlivých odpočinkových večerních aktivitách.

Jeden večer jsme si mohli dle vlastního zájmu vybrat z nabízených dílen: fyzikální software (J. Dirlbeck), hrátky z magnety (Z. Polák), výroba fyzikálních samohybů (V. Piskač), fyzikální zvířata – papírová mechanika, výroba (V. Bdinková), molekulová fyzika s pouťovými balónky (M. Jílek), fyzika hrou (J. Reichl). Původně se z časových důvodů každý zájemce měl účastnit jen jedné dílny (probíhaly současně). Pro velký zájem pokračovali vedoucí dílen i nad vymezený čas, aby si mohli pokusy a výrobky vyzkoušet i ti, kdo se do prvního kola nevešli, či byli v jiné dílně.



Obr. 1

Další odpoledne bylo věnováno fyzikální vycházce pořádanou Z. Polákem a V. Piskačem. Během ní jsme si v praxi zkoušeli měření radiačního pozadí, tlaku, teploty, přetahování pomocí kladek a kladkostrojů. Na závěr vycházky nám V. Piskač předvedl vypouštění horkovzdušného balónu z mikrotenového sáčku (obr. 1).

Závěrečný společenský večer byl zpestřen fyzikálními hrátkami, které připravili V. Bdinková a V. Piskač.

Děkujeme všem, kdo se podíleli na realizaci a organizaci semináře i zpracování příspěvků. Oceňujeme práci těch, kteří přišli se zajímavými výstupy, náměty a aktivitami pro své kolegy. Rádi bychom poděkovali ČEZu a nakladatelství Prometheus za poskytnutí dáreků pro účastníky. V neposlední řadě patří dík i všem účastníkům, kteří aktivně přinášeli nové nápady a ochotně se dělili o své zkušenosti v diskusích, byli ochotni spolupracovat (si i hrát) a problematice efektivního vyučování se věnovali i v rozhovorech probíhajících mimo oficiální program. Vzájemná spolupráce všech zúčastněných pomohla vytvořit příjemnou tvořivou atmosféru a snad dodala řadě z nás elán do dalších dnů školního roku.

Všechny přednesené příspěvky budou shromážděny ve sborníku, který bude dostupný i dalším zájemcům. O vydání sborníku a možnosti jeho zakoupení budeme na stránkách MFI v nejbližší době informovat.

Zdeňka Pinkavová

LITERATURA

Michal Křížek, Florian Luca, Lawrence Somer: *17 lectures on Fermat numbers: From number theory to geometry*, CMS Books in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 2001, xxiv+257 stran.

Recenzovaná monografie je věnována francouzskému matematikovi Pierru de Fermatovi (1601–1665) k jeho 400. narozeninám. V předmluvě, kterou napsala Elena Šolcová, je Fermat představen jako jeden ze zakladatelů moderní teorie čísel, diferenciálního a integrálního počtu, variačního počtu, teorie pravděpodobnosti a analytické geometrie. Dovedl např. vy počítat určitý integrál z polynomu mnohem dříve než Isaac Newton či Gottfried Wilhelm Leibniz.

V první kapitole autoři připomínají, že se Fermat proslavil zejména Velkou Fermatovou větou, kterou až o 350 let později dokázali A. Wiles a R. Taylor. Zanechal nám ale i jeden důležitý problém, který dodnes není vyřešen. V roce 1640 prohlásil, že všechna čísla tvaru $F_m = 2^{2^m} + 1$ pro $m = 0, 1, 2, \dots$ (tzv. Fermatova čísla) jsou prvočísla. Prvních pět členů této posloupnosti 3, 5, 17, 257 a 65 537 jsou skutečně prvočísla. V roce 1732 však L. Euler zjistil, že číslo F_5 je složené. Vznikla tak přirozená otázka, která dosud není zodpovězena, zda existuje nekonečně mnoho Fermatových prvočísel.

Až do roku 1796 byla Fermatova čísla považována spíše za matematickou kuriozitu. Pak ale zájem o ně dramaticky vzrostl, neboť C. F. Gauss objevil překvapivou nutnou a postačující podmínku,

kteřá dává do souvislosti Fermatova prvočísla s eukleidovsky konstruovatelnými pravidelnými mnohoúhelníky (tj. pomocí kružítka a pravítka).

V kapitolách 2 a 3 jsou uvedeny základní vlastnosti Fermatových čísel a nejdůležitější tvrzení teorie čísel (např. Eukleidova prvočíselná věta, základní věta aritmetiky, Malá Fermatova věta, Čínská věta o zbytcích), která jsou doplněna velkým množstvím obrázků. Čtenář tak snadno získá geometrickou představu o tom, co je největší společný dělitel, nejmenší společný násobek, Eukleidův algoritmus, pojem kongruence aj.

Čtvrtá kapitola je věnována nejkrásnějším tvrzením o Fermatových číslech. Začíná Goldbachovou větou, která tvrdí, že Fermatova čísla jsou vzájemně nesoudělná. Dále je ukázáno, jak jsou eukleidovsky konstruovatelné pravidelné mnohoúhelníky ukryty v Pascalově trojúhelníku a jak to vše souvisí se Sierpiňského fraktální množinou. Připomíná se Abelova věta, která na základě vlastností Fermatových prvočísel říká, kdy lze rozdělit lemniskátu u pomocí pravítka a kružítka na stejně dlouhé díly. Je též uvedena Lucasova věta, která určuje obecný tvar dělitelů Fermatových čísel.

V 5., 6. a 7. kapitole jsou shrnuty nejdůležitější věty týkající se prvočíselných rozkladů Fermatových čísel. Jedním z nejužitečnějších tvrzení je tzv. Pepinův test, který udává nutnou a postačující podmínku pro prvočíselnost F_m . Nedávno byl použit k počítačovému důkazu toho, že číslo F_{24} , které má přes 5 milionů cifer, je složené.

Kapitoly 8 až 13 se zabývají dalšími speciálními vlastnostmi Fermatových čísel. Je ukázána např. souvislost Heronova trojúhelníku (jehož všechny strany i obsah jsou celočíselné) s Fermatovými prvočíslly. Vyšetřuje se pojem pseudoprvočísla a superpseudoprvočísla, zavádějí se zobec-

něná Fermatova čísla aj. Ve 14. kapitole je podán přehled známých otevřených problémů týkajících se Fermatových čísel.

Nejdůležitější praktické aplikace Fermatových čísel jsou obsahem 15. kapitoly. V celočíselné aritmetice se definuje Fermatova transformace, která je analogií Fourierovy diskrétní transformace. Zavádí se binární aritmetika modulo Fermatovo číslo, která umožňuje podstatně snížit počet operací při násobení dvou velkých čísel. Fermatova prvočísla lze použít i pro konstrukci generátorů pseudonáhodných čísel. Na závěr jsou ukázány zajímavé souvislosti mezi teorií chaosu, Mandelbrotovou fraktální množinou a Fermatovými čísly.

V 16. kapitole je podán podrobný důkaz Gaussovy věty o konstruovatelnosti pravidelných mnohoúhelníků pomocí pravítka a kružítka. Poslední 17. kapitola obsahuje návod, jak lze eukleidovsky zkonstruovat pravidelný sedmnáctiúhelník. Je pozoruhodné, že k tomu stačí umět řešit kvadratické rovnice.

Kniha je doplněna tabulkami prvočinitelů Fermatových čísel, základními výsledky o Mersennových číslech, ale i řadou fotografií Fermatových soch, obrazů aj. V závěru se uvádí velké množství dostupné literatury o Fermatových číslech (z toho 20 článků napsali autoři knihy). Recenzovaná monografie podává ucelený přehled o současném stavu výzkumu v oblasti Fermatových čísel. Lze ji vřele doporučit všem zájemcům o elementární teorii čísel. Její vesměs pozitivní recenze vyšly v Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 2002b.01702, v Mathematical Reviews 2002i:11001 aj.

Na knize si nejvíce cením důrazu, který je kladen na geometrickou interpretaci číselně-teoretických pojmů, což je ostatně obsaženo i v jejím podtitulu: Od teorie čísel ke geometrii.

Jiří Bajer: *Mechanika 1 a 2*, 1. vyd. Univerzita Palackého, Olomouc 2004, brožovaný výtisk 322 + 458 stran.

Osvědčenou vstupní branou do úspěšného studia fyziky je klasická mechanika. Proto je předmětem zájmu vysokoškolského studia fyziky hned v prvních semestrech; jak se posluchač naučí a jaký vztah získá k mechanice, tak bude později přistupovat k oborům dalším i k celé fyzice. Proto je třeba právě jí věnovat maximální pozornost, ale také udělat vše pro získání intelektu i srdce nastupující generace. Tato recenze dvoudílné „Mechaniky“ mladého univerzitního profesora Univerzity Palackého v Olomouci, *RNDr. Jiřího Baje*ra, *CSc.*, chce především upozornit na fakt, že toto nové dílo splňuje všechny uvedené požadavky svrchovaným způsobem, neboť z každé stránky je patrná jak mimořádná matematická erudice autora, tak hluboké filozofické a historické pojetí celé problematiky, což činí látku oproti tradičním učebnicím nejen velmi srozumitelnou, ale i neotřelou a zajímavou.

První svazek obsahuje 1. *Úvod do fyziky*, kapitoly 2. *Prostor, čas a hmota*, 3. *Vektory a souřadnice*, 4. *Kinematika*, 5. *Statika* a 6. *Dynamika hmotného bodu*. Tématika druhého svazku je patrná z názvu kapitol 7. *Relativita pohybu a setrvačné síly*, 8. *Dynamika soustavy hmotných bodů*, 9. *Dynamika tuhého tělesa*, 10. *Srážky a rázy*, 11. *Analytická mechanika*, 12. *Úvod do astronomie*, 13. *Planety a modely kosmu*, 14. *Gravitace*. Na uvedené svazky v budoucnu naváže Mechanika 3, jež má pokrývat mechaniku kontinua a nauku o vlnění s akustikou.

(Dokončení na s. 273.)

Aleš Kropáč