

Výpočetní technika ve výuce matematiky na gymnáziu I

JOSEF KUBEŠ – PETR ZROSTLÍK

Gymnázium, Plzeň, Mikulášské náměstí

Výpočetní technika proniká do řady lidských činností a dostává se také do oblasti vzdělání. Matematika je jedním z předmětů, ve kterém lze vhodné programy účelně využít. Konkrétně jsme si vybrali téma *Úpravy algebraických výrazů a Řešení rovnic a nerovnic*. Na několika úlohách naznačíme možný postup s využitím výpočetní techniky. Naším cílem není zařadit počítač do výuky za každou cenu, ale chceme vybrat takové situace, kdy má podle nás použití počítače smysl.

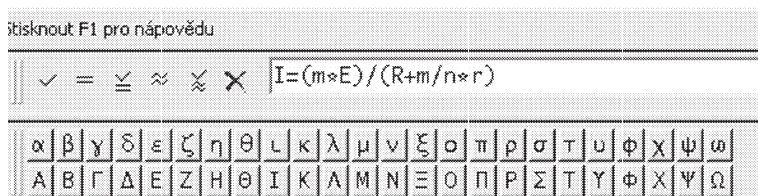
Uvedená dvě témata jsou velmi důležitá a i dále se na ně navazuje. Slouží k posílení numerické zručnosti a techniky výpočtů. Užití programu, který provádí symbolické výpočty, sice právě tyto návyky omezuje, ale přesto je vhodné ukázat na závěr kapitoly některý z programů, který umí zjednodušit výraz, vyjádřit neznámou ze vzorce a vyřešit rovnici či nerovnici. Vybereme úlohu, kterou žáci řešili klasickým výpočtem. Příklady, které budou dále uvedeny, jsou řešeny v programu DERIVE^{*)}, verze 6.

Příklad 1

Ze vzorce $I = \frac{mE}{R + \frac{m}{n}r}$ vyjádřete r , R , m .

^{*)} Zkušební verzi programu lze získat na www.jcu.pf.cz/p-mat, která uživateli umožňuje 30-ti denní plnohodnotný provoz. Na stejné adrese lze získat informace o plnohodnotné verzi a podrobné manuály.

Řešení: Výraz zapíšeme na pracovní plochu programu DERIVE. Zápis provedeme jednoduše do řádky zadání v dolní části obrazovky a potvrdíme tlačítkem $\boxed{\checkmark}$. Vše dokumentuje obr. 1*).



Obr. 1

Vyjádření hledané proměnné provedeme jako řešení rovnice, ve které je hledaná proměnná neznámá a ostatní veličiny chápeme jako konstanty. Použijeme nástroj „řešení rovnic“. Celý postup názorně vysvětluje obr. 2.

Jako negativní vidíme fakt, že řešení úlohy se přetransformuje na dovednost ovládat program. Proto zařadíme úlohu, ve které výsledek vyžaduje další rozbor, neboť je ve tvaru, který žák neočekává. Na takové úloze je třeba demonstrovat důležitost znalostí úprav klasickým způsobem. Jinak řečeno, žák by měl mít určitou představu o výsledku a tuto představu porovnat s tím, co vidí na obrazovce. Takový přístup je velmi důležitý pro budoucí povolání, ve kterém žák bude s největší pravděpodobností výpočetní techniku používat.

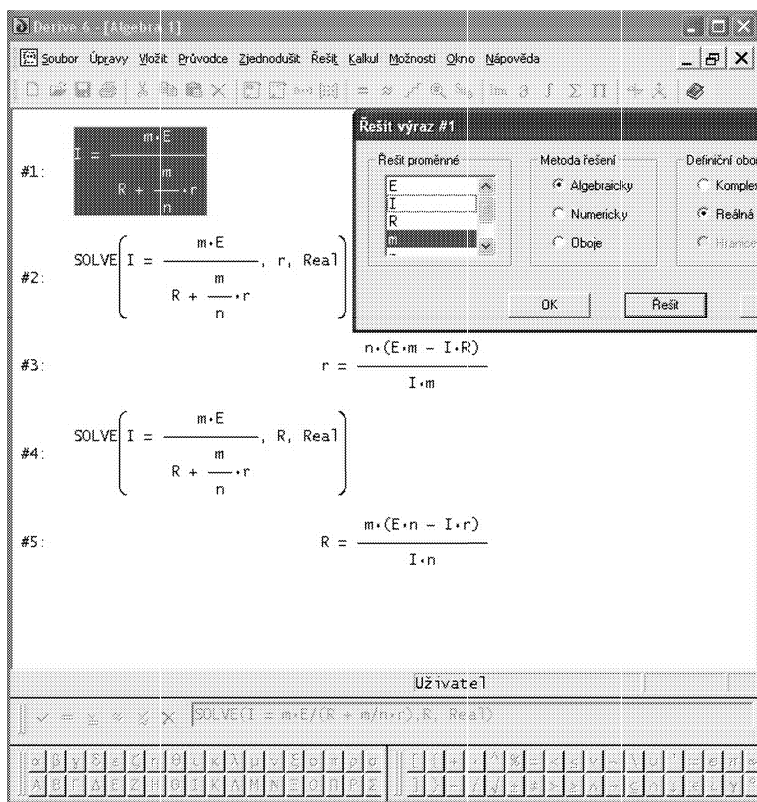
Příklad 2

Upravte výraz
$$\frac{2x}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}.$$

Řešení: Zadaná úloha je poměrně náročná a její výsledek pro $x \neq 0$ je $\frac{x(1+x^2)}{|x|}$. Pochopitelně po stanovení podmínek lze odstranit absolutní

hodnotu. Program DERIVE upraví výraz na tvar $(x^2 + 1)\text{SIGN}(x)$, což je stejný výsledek, ovšem pro žáky je nezvyklý. Buď neznají funkci signum a výsledku nerozumí, nebo je takový zápis překvapí. V tomto okamžiku by měla nastoupit jejich zkušenost z předchozích výpočtů a výsledek by si

*) Program DERIVE je nutné nastavit tak, aby rozlišoval malá a velká písmena. Lze také místo R zvolit jiné písmeno.



Obr. 2

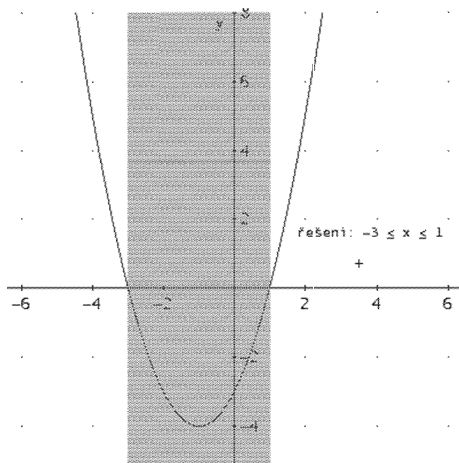
měli správně přetransformovat. Při použití programu je nutné opět nezapomenout na podmínky, které se pochopitelně určují hůře.

Pomocí příkazu *solve* lze řešit všechny možné typy rovnic, proto s ním žáky seznámíme až po zvládnutí řešení klasickým způsobem. Velmi vhodné je předvést také grafické řešení. Dobře se počítač dá použít při řešení kvadratických nerovnic, které nemají žádné řešení, nebo které mají jako řešení celou množinu reálných čísel. Grafické řešení předvedeme na základní úloze, kterou žáci umí řešit výpočtem. Můžeme tak trochu zpříjemnit monotónní výpočty.

Příklad 3

Řešte nerovnice: a) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$, b) $x^2 + x + 1 > 0$.

Řešení: V případě a) klasický výpočet můžeme podpořit graficky a tím ověřit správnost (obr. 3).



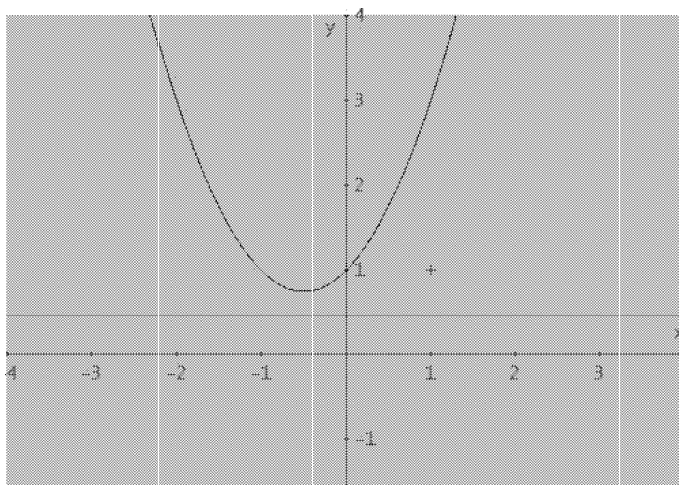
Obr. 3

Případ b) bývá pro žáky méně schůdný. Graficky však pohodlně objasníme, za jakých podmínek nemá kvadratická nerovnice řešení, nebo kdy je řešením množina všech reálných čísel jako v našem případě (obr. 4).

Příklad 4

Rozhodněte o počtu řešení rovnice $|x + 1| - |1 - x| = b$ v závislosti na reálném parametru b .

Řešení: Součástí řešení bez použití výpočetní techniky je také konstrukce grafu funkce $y = |x + 1| - |1 - x|$. Ta sice není náročná, ale určitou dobu vyžaduje. Poté se můžeme soustředit na jádro problému a začít pracovat s funkcí $y = b$, kde b postupně prochází množinou všech reálných čísel. Působením na představivost studentů a naším citem dospějeme k závěru, že pro $b \in \{-2; 2\}$ má rovnice nekonečně mnoho řešení, pro $b \in (-2, 2)$ řešení jediné a v ostatních případech žádné řešení. Použití programu DERIVE nám dovolí se více soustředit na vlastní jádro úlohy, tedy provést



Obr. 4

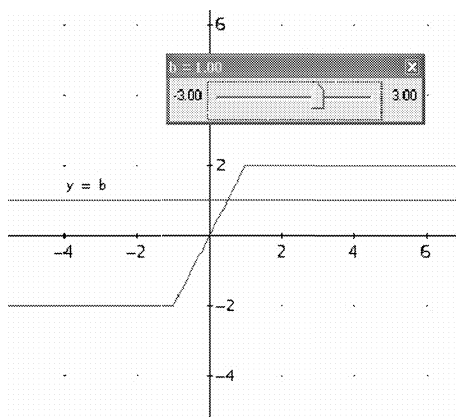
diskusi počtu řešení rovnice vzhledem k parametru b . Necháme vykreslit graf funkce s absolutní hodnotou a dále využijeme možnost zakreslení grafu s parametrem b , který se mění například od -3 do 3 (obr. 5). Posuvníkem postupně nastavujeme příslušnou hodnotu parametru a do obrázku se vykreslí vždy přímka rovnoběžná s osou x , která je grafem funkce $y = b$ pro zvolenou hodnotu parametru. Poté můžeme diskutovat počet řešení zadané rovnice pro každou vybranou hodnotu. Tak lze modelovat jakýkoliv případ a studentům, kteří nemají představu, usnadníme pochopení.

Dále se zaměříme na náročnější úlohu, ve které žáci často chybují.

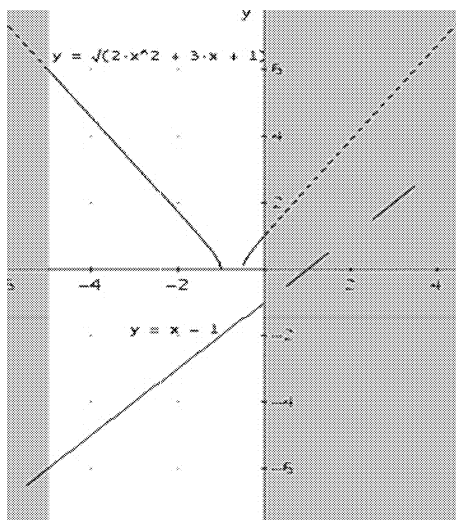
Příklad 5

V oboru reálných čísel řešte nerovnici $x - 1 \leq \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$.

Většina žáků bez většího přemýšlení nerovnici umocní a po úpravě se získá nerovnice $x^2 + 5x > 0$, jejíž řešením je sjednocení intervalů $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$. Tím považují úlohu za vyřešenou. K vyvrácení chybného řešení použijeme opět program DERIVE. Necháme sestavit grafy funkcí $y = x - 1$, $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$ a zobrazíme do téhož obrázku řešení nerovnice (obr. 6). Provedeme rozbor grafu. V první řadě je nutné určit definiční obor nerovnice, tedy musí platit, že $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$. Proto hledáme řešení zadané nerovnice pro x náležející sjednocení inter-



Obr. 5



Obr. 6

valů $(-\infty, -1) \cup \langle -0, 5, +\infty)$. Můžeme také ukázat řešení zadané nerovnice a nerovnice $x^2 + 5x > 0$.

Použijeme nástroj pro řešení rovnic a nerovnic (nástroj *solve*) a necháme vyřešit obě nerovnice a získáme stejný nesoulad jako z grafů (obr. 7).

$$x - 1 \leq \sqrt{(2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1)}$$

$$x^2 + 5 \cdot x \geq 0$$

$$\text{SOLVE}(x - 1 \leq \sqrt{(2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1)}, x, \text{Real})$$

$$x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{SOLVE}(x^2 + 5 \cdot x \geq 0, x, \text{Real})$$

$$x \leq -5 \vee x \geq 0$$

Obr. 7

Nyní je pravý okamžik k zopakování pojmu ekvivalentní úpravy nerovnice. Tedy po stanovení definičního oboru musíme ještě zajistit před umocněním nezápornost výrazu $x - 1$, tedy $x \geq 1$. Za těchto podmínek můžeme umocnit a řešíme nerovnici $x^2 + 5x > 0$. Výsledkem je interval $(1, +\infty)$.

Pro $x < 1$ je levá strana nerovnice vždy záporná a pravá strana je pro definované hodnoty kladná. Tedy pro x ze sjednocení intervalů $(-\infty, -1) \cup \langle -0, 5; 1)$ je zadaná nerovnice splněna. Výsledné řešení získáme jako sjednocení obou případů, tedy sjednocení intervalů $(-\infty, -1) \cup \langle -0, 5, +\infty)$.

Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých nezpůsobuje větší problémy. Pokud má soustava pouze jediné řešení, výpočet je mechanický a nevyžaduje náročné úvahy. Situace začne být zajímavá v okamžiku, kdy soustava má nekonečně mnoho řešení. Musíme rozebrat případy, kdy se v řešení objeví jeden parametr, případně dva parametry. Většina žáků nemá o výsledku žádnou představu, proto jsme jim pomohli graficky. Bez větších problémů se studenti nechali přesvědčit, že grafickým znázorněním každé z rovnic je v trojrozměrném prostoru se zavedenou kartézskou soustavou souřadnic rovina. Výsledek řešení tří rovnic o třech neznámých je vlastně určen vzájemnou polohou rovin. Je třeba si uvědomit, že řešení soustavy je zařazeno před kapitolou Analytická geometrie v prostoru. Právě když řešení soustavy obsahuje jeden parametr, tvoří všechny trojice vyhovujících reálných čísel přímku. Tento fakt můžeme opět ukázat výpočetní technikou.

Příklad 6

V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic:

$$2x - y + z = -7$$

$$3x + 2y - 3z = 0$$

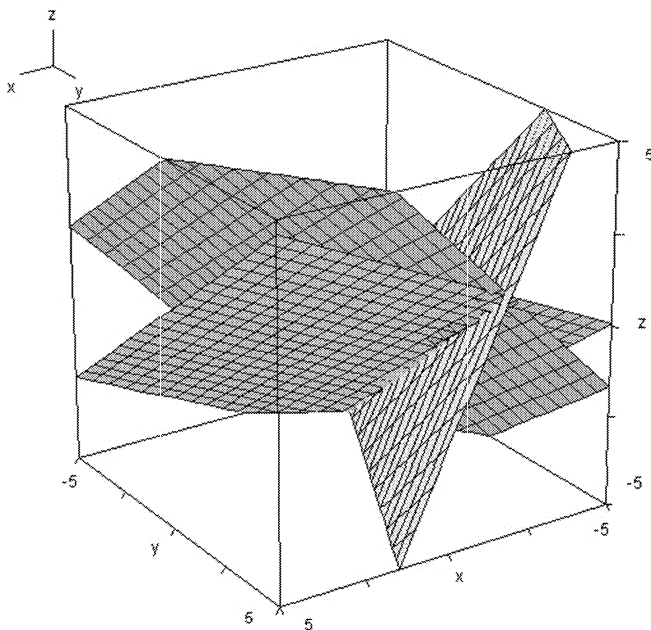
$$-5x - 8y + 11z = -14.$$

Řešíme ji v programu DERIVE.

`SOLVE([2.x-y+z=-7, 3.x+2.y-3.z=0, -5.x-8.y+11.z=-14],
[x, y, z])`

$$\left[x = -\frac{z}{7} = -1 \wedge y - \frac{9 \cdot z}{7} = 3 \right]$$

Výsledek vypadá nezvykle, proto jej nepatrně upravíme. Vyhovují všechny uspořádané trojice $\left[-2 + \frac{z}{7}, 3 + \frac{9z}{7}, z\right]$, $z \in \mathbb{R}$. Grafickou interpretaci dokumentuje obr. 8.



Obr. 8

Literatura

- [1] *Janeček, F.*: Algebraické výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy. Prometheus, Praha 1991.
- [2] *Charvát, J. – Zhouf, J. – Boček, L.*: Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice. Prometheus, Praha 1999.

Multimediální výukový materiál na téma elektřina a magnetismus

JAROMÍR KEKULE

Gymnázium Jana Nerudy, Praha

Počítač připojený k internetu se stal už i na většině českých škol vítaným pomocníkem ve výukovém procesu. I když se z důvodů nedostatečného technického vybavení nepoužívá třeba přímo při výuce, učitelé vyhledávají na webu aktuality přispívající k obohacení jejich hodin. Také žáci zde hledají podklady pro referáty, zejména ti s hlubším zájmem o předmět i odpovědi na otázky, které je zajímají a na něž ve vyučovacích hodinách nezbývá čas. Proto je potřebné mít na internetu stránky, které poskytnou učitelům i žákům příslušné materiály v dobré kvalitě a nejlépe i v ucelené formě. Z tohoto důvodu jsem vytvořil v rámci své doktorandské práce ucelený web věnovaný obsáhlému středoškolskému tématu – elektřině a magnetismu (se zvláštním důrazem na elektroniku), který bych zde rád blíže představil. Na internetu jej najdete na adrese: <http://lucy.troja.mff.cuni.cz/~tichy/elektross/index.html>

Obsah a struktura webu

Web se skládá z téměř třiceti kapitol, z nichž dvacet obsahuje materiály pokrývající veškeré požadované učivo gymnaziálního tématu „Elektřina a magnetismus“ včetně doporučeného rozšiřujícího učiva a některých dalších vybraných témat. Ve zbývajících kapitolách najdeme rejstříky, shrnutí apod.

Celý web je zaměřen prakticky. Kapitoly nejsou uspořádány ve stylu klasické učebnice, ale jsou převážně věnovány nějaké praktické aplikaci fyziky (např. televizor, rádio, elektromotor, princip blesku, ...) a příslušné učivo je podáno jako látka potřebná k pochopení těchto praktických přístrojů a jevů.

Stránky jsou vytvořeny jako technicky velmi jednoduché pomocí editoru Microsoft FrontPage 2000. Snažil jsem se o přehlednost, proto je prostor obrazovky rozdělen na dvě okna. V levém jsou názvy kapitol, v pravém se pak objevuje vlastní text. V záhlaví většiny stránek konkrétní kapitoly je její obsah (obr. 1). K přehlednost přispívá abecední rejstřík se všemi důležitými pojmy. Uvažuji též o fulltextovém vyhledávání.

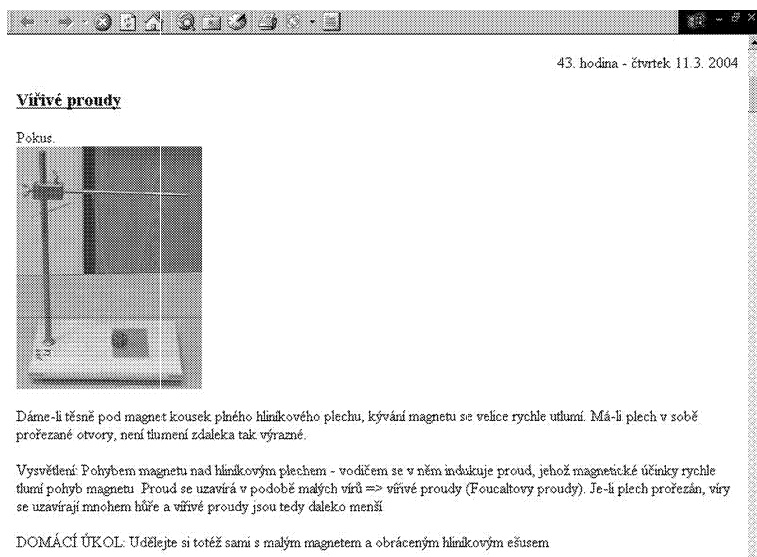


Obr. 1

Pro lepší orientaci ve vícevrstevném textu jsou odkazy barevně rozlišeny. Bude-li se uživatel držet modrých odkazů, projde stránky ve stejném pořadí jako při výuce. Zelené odkazy vedou na doplňující stránky nebo na to, co se už probíralo nebo se bude probírat později. Pod hnědými odkazy najdete fyzikální tabulky a pod fialovými návody na pokusy, které si můžete sami udělat. Všechny odkazy jsou doplněny znakem „□“, který se chová jako běžný hypertextový odkaz a tudíž podle něho uživatel pozná, zda už danou stránku navštívil nebo ne.

Jedna kapitola obsahuje jakési „Zápisy do sešitu“ neboli výtahy z probrané látky, které mohou studentům sloužit místo jejich vlastních poznámek (obr. 2).

Text je doplněn řadou obrázků, schémat a fotografií. Některá témata jsou vyložena dvojím způsobem, napřed vysvětlena slovně a pak na obrázcích. Doufám, že tento přístup pomůže studentům s různými styly učení. Pro zajímavost, dvě třetiny dotázaných studentů se vyjádřily, že preferují „obrázkový“ přístup, zbývajících třetina pak lépe chápe věci vysvětlené slovně. Důležité pokusy jsou zahrnuty ve formě videoukázek. Web obsahuje i Java applety, které simulují pokusy a u kterých se dají nastavovat parametry.



Obr. 2

Materiál obsahuje množství vlastních textů i odkazy na jiné texty zabývající se daným tématem, odkazy na stránky výrobců elektronických součástek i pracovišť, která se zabývají výzkumem a vývojem atd. Pro pokročilejší studenty a zájemce je web doplněn o odkazy na obsáhlá hypertextová skripta „Elektronika“ vytvořená na MFF UK a sbírku úloh k nim.

Použití materiálu

Mou představou je používat materiál přímo při vyučovací hodině. Každý učitel si jej může upravit podle svého uvážení a přizpůsobit jej tak svým potřebám (web se dá stáhnout a používat off-line). Žáci mající materiál k dispozici si pak nemusí dělat poznámky do sešitů a mohou se plně koncentrovat na předkládanou látku, což umožňuje výrazně efektivnější studium než při častém přístupu, kdy si žák při hodině pouze udělá poznámky a teprve doma se snaží látku pochopit a naučit.

Doma si pak student může látku opakovat, řešit úlohy a zamýšlet se nad problémy. Též se může znovu podívat na experimenty prováděné při hodině, jejichž průběh je zachycen na videoukázkách. K ověření svých znalostí pak může použít obsažené testy.

Závěr

Uvedený materiál jsem používal v loňském roce při běžné výuce jedné třídy na gymnáziu. Studenti jej pak na konci roku hodnotili. Z hodnocení je patrná jejich převažující spokojenost, více než tři čtvrtiny z nich se vyjádřily, že používají web raději než klasickou papírovou učebnici. Též zajímavost a srozumitelnost podání látky je podle nich dobrá. Doufám tedy, že uvedené skutečnosti se také promítnou do zvýšeného zájmu o fyziku jako vědu a o studium technických oborů na vysoké škole.

(Dokončení ze s. 256.)

Pro fyziku mají tyto přesné spektroskopické metody také zvláštní význam k ověřování přesnosti hodnot univerzálních konstant.

Najdou se i další možné dosud nepoužité aplikace v nejrůznějších oborech (např. v telekomunikacích). Ukazuje se totiž, že existence ze přesnějších metod měření vede i k dalším novým objevům, a to jak ve fyzice, tak v přírodovědě a technice.

Více informací najde čtenář na adrese <http://www.nobelprize.org/physics/laureates/2005/index.html>

Literatura

- [1] *Glauber, R. J.*: Phys. Rev. Letters 10 (1963) 84
- [2] *Glauber, R. J.*: Phys.Rev. 130 (1963) 2529, Phys.Rev. 131 (1963) 2766
- [3] *Sodomka, L.*: Základy fyziky pro aplikace. Adhesiv Liberec 2005 na CD.
- [4] *Sodomka, L.*: Lasery v měřicí technice a technologii. Adhesiv Liberec na CD.

Lubomír Sodomka