# Zajímavé matematické úlohy

V novém ročníku našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 6. 2025 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

**Úloha 299**

Je dán trojúhelník $ABC$ a bod $D$ ležící na přímce $AB$, $D \neq A$, $D \neq B$. Označme $k_A(S_A; r_A)$, $k_B(S_B; r_B)$ po řadě kružnice opsané trojúhelníkům $ADC$, $BDC$.

a) Určete polohu bodu $D$ tak, aby obsah trojúhelníku $S_AS_BC$ byl co *nejmenší*.

b) Určete polohu bodu $D$ tak, aby trojúhelníky $S_AS_BC$ a $ABC$ byly *shodné*.

*Jaroslav Zhouf*

**Úloha 300**

Nechť $a$, $b$, $c$ jsou délky stran v libovolném trojúhelníku a $t_a$, $t_b$, $t_c$ délky odpovídajících těžnic (v obvyklém značení). Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2}{t_a^2} + \frac{b^2}{t_b^2} + \frac{c^2}{t_c^2}.$$

*Jaroslav Švrček*

V následující části uvádíme řešení úloh 295 a 296, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (33.) ročníku našeho časopisu.

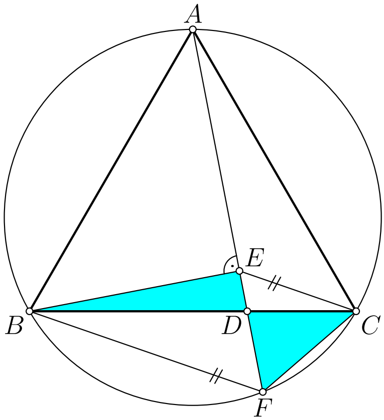
**Úloha 295**

Nechť $D$ je bod strany $BC$ rovnostranného trojúhelníku $ABC$, kde $|BD| = 2|CD|$. Označme $E$ patu kolmice z vrcholu $B$ k přímce $AD$ a $F$ ($F \neq A$) průsečík přímky $AD$ s kružnicí opsanou uvažovanému trojúhelníku. Dokažte, že trojúhelníky $BDE$ a $CDF$ mají stejné obsahy.

*Józef Kalinowski (Polsko)*

*Řešení.* Ukážeme, že čtyřúhelník $BFCE$ je lichoběžník se základnami $BF$ a $EC$, tj. $BF \parallel CE$.

Jelikož $A$ je středem oblouku $BC$ kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ a $F$ leží na doplňkovém oblouku, jsou úhly $BFA$ a $AFC$ shodné, oba mají podle věty o obvodovém úhlu velikost $60^\circ$ jako úhly $BCA$ a $ABC$, přímka $FA$ je tak osou vnitřního úhlu trojúhelníku $BCF$. Podle věty o ose vnitřního úhlu v trojúhelníku $BFC$ dále s ohledem na zadání dostáváme $|BF| : |CF| = |BD| : |CD| = 2$, tedy $|CF| = \frac{1}{2}|BF|$.



Obr. 1

V pravoúhlém trojúhelníku $BEF$ je velikost vnitřního úhlu u vrcholu $F$ rovna $60^\circ$, proto pro velikost přilehlé odvěsny platí $|EF| = \frac{1}{2}|BF|$, tedy podle úvah výše je trojúhelník $EFC$ rovnoramenný s hlavním úhlem u vrcholu $F$ o velikosti $60^\circ$. Tento trojúhelník je proto rovnostranný, a tedy úhly $FEC$ a $EFB$ jsou shodné. Odtud již plyne rovnoběžnost $BF$ a $EC$, tedy shodnost obsahů trojúhelníků $BFE$ a $BFC$, tedy i shodnost obsahů trojúhelníků $BDE$ a $CDF$.[1)]

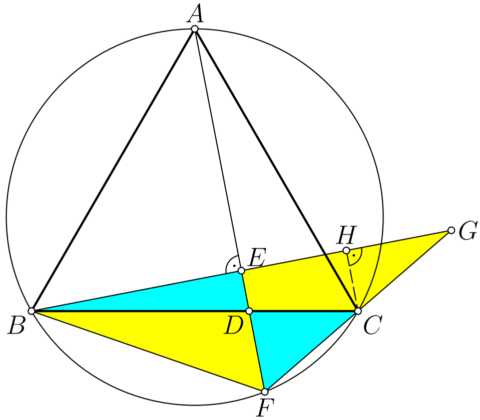
*Jiné řešení.* Označme $G$ průsečík přímek $BE$ a $FC$ (obr. 2). Podle věty o obvodovém úhlu jsou oba úhly $BFA$ a $AFC$ shodné po řadě s úhly $BCA$ a $ABC$, a mají tak shodnou velikost $60^\circ$. Přímka $FE$ je tak osou vnitřního úhlu u vrcholu $F$ trojúhelníku $BFG$, jelikož je i kolmá na stranu $BG$, je jeho výškou a tedy i jeho těžnicí. Bod $E$ je tak středem úsečky $BG$.

Označme $H$ kolmý průmět bodu $C$ na úsečku $BG$. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $BED$ a $BHC$, resp. $GEF$ a $GHC$ plyne

$$2 = |BD| : |CD| = |BE| : |HE| = |GE| : |HE| = |GF| : |GC|.$$

[1)] Tzv. *motýlí křídla*, viz úvodní článek tohoto čísla.

Bod $H$ je tak středem úsečky $EG$ a bod $C$ středem úsečky $FG$. Tedy bod $D$ je jako průsečík těžnic trojúhelníku $BFG$ jeho těžištěm. Trojúhelníky $BDE$ a $CDF$ mají vrchol v těžišti trojúhelníku $BFG$ a jsou hraničeny jeho stranami a těžnicemi, mají tak shodné obsahy rovné šestině obsahu trojúhelníku $BFG$, což jsme měli dokázat.



Obr. 2

*Poznámka.* Rovnoběžnost úseček $BF$ a $CE$ dokázaná v předchozím řešení pak plyne z faktu, že $CE$ je střední příčkou trojúhelníku $BFG$.

*Jiné řešení.* Uveďme ještě výpočetní řešení. Označme $J$ střed strany $BC$ (je i patou výšky) a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany rovnostranného trojúhelníku $ABC$ je 6. Dle zadání platí $|AB| = |AC| = 6$, $|BJ| = 3$, $|BD| = 4$, $|JD| = 1$, $|CD| = 2$. Známe pak výšku rovnostranného trojúhelníku a podle Pythagorovy věty v trojúhelníku $AJD$ platí

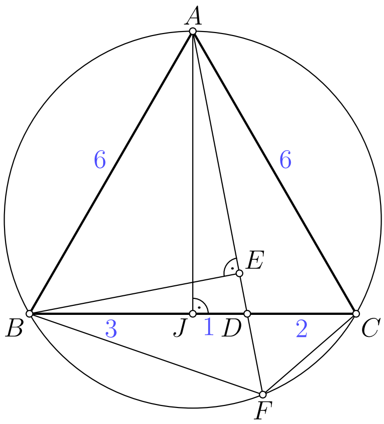
$$|AJ| = 3\sqrt{3}, \quad |AD| = \sqrt{|AJ|^2 + |GD|^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1} = 2\sqrt{7}.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku $ADJ$ pak je

$$S_{ADJ} = \frac{1}{2}|AJ| \cdot |JD| = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Pravoúhlé trojúhelníky $BDE$ a $ADJ$ se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu $D$ a v pravých úhlech u vrcholů $E$ a $J$, jsou tak podobné, pro obsah trojúhelníku $BDE$ pak platí

$$S_{BDE} = S_{ADJ}\left(\frac{|BD|}{|AD|}\right)^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\frac{4}{2\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{6}{7}\sqrt{3}.$$



Obr. 3

Obsah trojúhelníku $ADB$ je
$$S_{ADB} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |AJ| = 6\sqrt{3}.$$
Podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly $ABC$ a $AFC$ shodné (mají velikost $60^\circ$), trojúhelníky $ADB$ a $CDF$ se shodují ve vnitřních úhlech u vrcholů $B$, $F$ a ve vnitřním úhlu u vrcholu $D$ (vrcholové úhly), jsou tak podobné. Pro obsah trojúhelníku $CFD$ pak platí
$$S_{CDF} = S_{ADB}\left(\frac{|CD|}{|AD|}\right)^2 = 6\sqrt{3}\left(\frac{2}{2\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{6}{7}\sqrt{3}.$$
Tím jsme dokázali požadované tvrzení, že obsahy trojúhelníků $BDE$ a $CDF$ jsou stejné.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *František Jáchim* z Volyně, *Radim Aulický*, G Praha 6, Nad Alejí, *Albert Bakoč*, GChD Praha 5, *Jakub Cyl*, *Michał Fronczek*, *Paweł Chwiedoruk*, *Dawid Rotman*, *Piotr Szatan* a *Bartosz Wieczorek*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Adam Dedek* a *Richard Dobíšek*, oba MG Praha 6, *Barbora Herynková*, *Helena Muchová* a *Jakub Trčka*, všichni GJK Praha 6, *Eliška Jaworská*, G Praha 8, Ústavní, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Tomáš Pazourek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod a *Patrik Štencel*, MG Opava.

Neúplné řešení zaslal *Mykhailo Dektyar*, GJN Praha 1.

**Úloha 296**

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \max\{3a + b, 8a^2\} + \max\{3b + a, 8b^2\},$$

kde $a$, $b$ jsou reálná čísla, jejichž součet je roven 1.

*Jaroslav Švrček*

*Řešení.* Zřejmě $\max\{3a + b, 8a^2\} \geq 3a + b$ a $\max\{3b + a, 8b^2\} \geq 3b + a$. Proto

$$V \geq (3a + b) + (3b + a) = 4(a + b) = 4.$$

Rovnost nastane, budou-li existovat taková reálná čísla $a$, $b$ ($a+b = 1$), že

$$3a + b \geq 8a^2 \quad \text{a} \quad 3b + a \geq 8b^2. \tag{1}$$

Součtem těchto nerovností získáme

$$4 = 4(a + b) \geq 8(a^2 + b^2) = 8\bigl(a^2 + (1 - a)^2\bigr) = 16a^2 - 16a + 8.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$0 \geq 16a^2 - 16a + 4 = 4(2a - 1)^2,$$

která je splněna pouze pro $a = \frac{1}{2}$, a tedy $b = \frac{1}{2}$. V tomto případě jsou na obou stranách obou nerovností (1) hodnoty 2, tj. tyto nerovnosti platí.

Nejmenší možná hodnota výrazu $V$ je tedy 4, přičemž je této hodnoty dosaženo, právě když $a = b = \frac{1}{2}$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Radim Aulický*, G Praha 6, Nad Alejí, *Jakub Cyl*, *Bartosz Depta*, *Michał Fronczek*, *Paweł Chwiedoruk*, *Anna Malcher*, *Dawid Rotman*, *Piotr Szatan*, *Bartosz Wieczorek* a *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Adam Dedek* a *Richard Dobíšek*, oba MG Praha 6, *Mykhailo Dektyar*, GJN Praha 1. *Eliška Jaworská*, G Praha 8, Ústavní, *Barbora Herynková* a *Jakub Trčka*, oba GJK Praha 6, *Miroslav Holeček*, MG Plzeň, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Lukáš Komín*, G Praha 4, Opatov, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Tomáš Pazourek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov a *Marek Valkovič*, G Zlín, Lesní čtvrť.

Až po uzávěrce minulého čísla se ještě objevilo správné řešení úlohy 294 od *Heleny Muchové*, GJK Praha 6.

*Pavel Calábek*