O konvexních pětiúhelnících

MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Ve srovnání s nejjednoduššími rovinnými polygony, kterými jsou trojúhelníky a čtyřúhelníky, není v naší matematické literatuře (a to ani v časopisecké) mnoho příspěvků, které jsou svým obsahem zaměřeny na konvexní pětiúhelníky. Mezi výjimky patří mj. články [1] a [3], v nichž jsou uvedeny některé zajímavé vlastnosti *pravidelných* pětiúhelníků.

Tento příspěvek, který volně navazuje na [1], je věnován některým vlastnostem základních prvků v konvexních pětiúhelnících, jimiž jsou délky jeho stran a úhlopříček, velikosti jeho vnitřních a vnějších úhlů, příp. jeho obsah, a dále pak jejich aplikacím při řešení planimetrických úloh.

Úvodem připomeňme jednu důležitou větu, která se týká součtu velikostí vnitřních (a v důsledku i vnějších) úhlů v konvexním n-úhelníku. Uvedené tvrzení, které lze využít při řešení některých níže uvedených úloh, lze nalézt již např. v klasické učebnici geometrie pro středoškoláky [4].

Věta

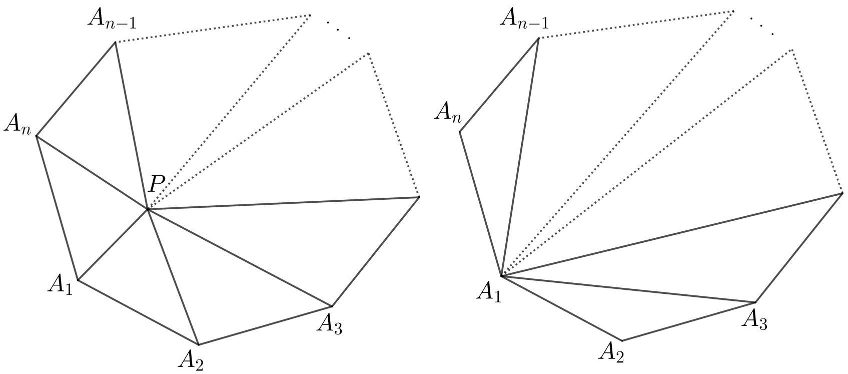
V každém konvexním n-úhelníku ($n \geq 3$) je součet velikostí jeho vnitřních úhlů roven $(n-2) \cdot 180°$.

Důkaz. Zvolme libovolný vnitřní bod P konvexního n-úhelníku $A_1 \dots A_n$, který spojíme se všemi jeho vrcholy (obr. 1, vlevo). Součet velikostí vnitřních úhlů ve všech n takto vzniklých trojúhelnících (tzv. *triangulace* n-úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$) zmenšený o plný úhel, který je součtem velikostí vnitřních úhlů u vrcholu P ve všech trojúhelnících se společným vrcholem P, udává hledaný součet S velikostí všech vnitřních úhlů v tomto konvexním n-úhelníku. Platí tak

$$S = n \cdot 180° - 360° = n \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (n-2) \cdot 180°,$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiný důkaz (viz např. v [4]). Zvolme libovolný z vrcholů uvažovaného n-úhelníku (bez újmy na obecnosti např. A_1) a pomocí všech jeho úhlopříček vycházejících z vrcholu A_1 jej rozdělíme na $n-2$ trojúhelníků (obr. 1, vpravo). Pro součet S velikostí všech vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ tak přímo obdržíme $S = (n-2)\cdot 180°$.



Obr. 1

Důsledek 1

Součet velikostí všech vnitřních úhlů v každém konvexním pětiúhelníku je roven $540°$.

Důsledek 2

V každém konvexním n-úhelníku ($n \geq 3$) je součet velikostí všech jeho vnějších úhlů roven $360°$.

Důkaz. S ohledem na tvrzení výše uvedené věty je tedy součet velikostí n vnějších úhlů v libovolném konvexním n-úhelníku roven rozdílu

$$n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = 2\cdot 180° = 360°.$$

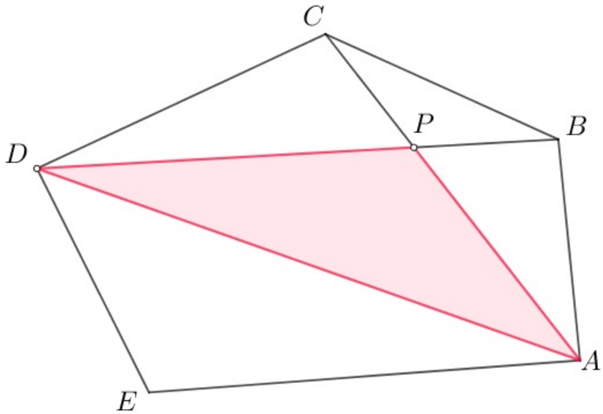
V další části uvedeme pětici řešených úloh, v nichž budeme pracovat se základními prvky v konvexním pětiúhelníku. Poslední dvě z nich se týkají obsahů konvexních pětiúhelníků.

Příklad 1

Dokažte, že v každém konvexním pětiúhelníku existuje trojice jeho úhlopříček, z nichž lze sestrojit trojúhelník.

Řešení. K důkazu využijeme *metodu extremálního prvku.* Mezi všemi (pěti) úhlopříčkami konvexního pětiúhelníku $ABCDE$ uvažujme tu, která má největší délku, popř. je jedna z nejdelších. Nechť je to (bez újmy na obecnosti) např. úhlopříčka AD. Označme P průsečík úhlopříček AC a BD v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$. Protože evidentně platí $|AP| < |AC|$ a $|PD| < |BD|$, viz obr. 2, plyne z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku APD

$$|AD| < |AP| + |PD| < |AC| + |BD|. \tag{1}$$



Obr. 2

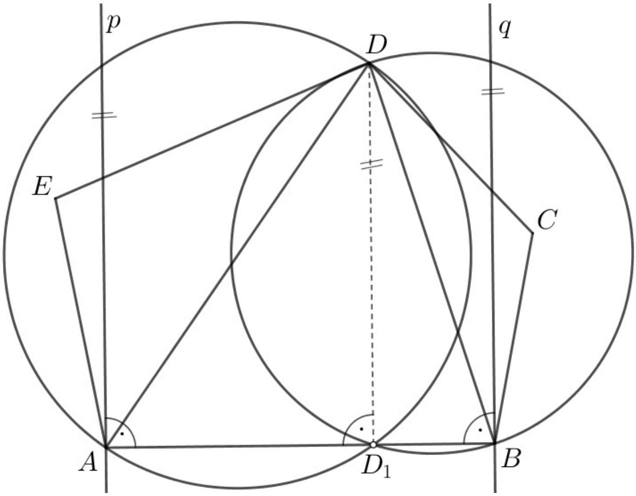
Vzhledem k tomu, že podle předpokladu je AD nejdelší úhlopříčka (jedna z nejdelších), platí $|AC| \leq |AD|$ a současně $|BD| \leq |AD|$, což spolu s (1) garantuje existenci trojúhelníku o stranách délek $|AD|$, $|AC|$ a $|BD|$. Tím je důkaz uzavřen.

Příklad 2

Je dán konvexní pětiúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou tupé. Dokažte, že existuje taková dvojice jeho úhlopříček, že kruhy uvažované nad těmito úhlopříčkami (jako průměry) pokrývají daný pětiúhelník.

Řešení. K důkazu lze opět využít metodu extremálního prvku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že AB je *nejdelší* stranou konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, který vyhovuje podmínkám úlohy. Kolmice k AB, které procházejí vrcholy A, B, označme po řadě p, q. Uvažujme nyní pás omezený rovnoběžkami p, q (obr. 3). Vrcholy C a E uvažovaného pětiúhelníku leží vně tohoto pásu, neboť úhly ABC a EAB jsou tupé. Současně však vrchol D tohoto pětiúhelníku leží uvnitř uvažovaného pásu (v opačném případě by totiž strana AB nebyla nejdelší stranou pětiúhelníku $ABCDE$).

Pata D_1 kolmice z vrcholu D k přímce AB je tedy vnitřním bodem strany AB uvažovaného pětiúhelníku.



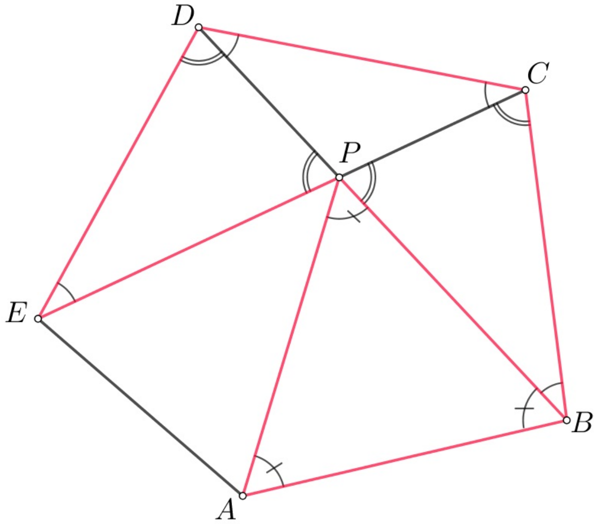
Obr. 3

Oba kruhy nad průměry AD a BD tak evidentně pokrývají uvažovaný pětiúhelník $ABCDE$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$, $|\sphericalangle ABC| = 96°$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CDE| = 108°$. Určete, jakou velikost má jeho vnitřní úhel při vrcholu E.

Řešení. Označme P průsečík úhlopříček BD a CE. Ze zadání plyne, že trojúhelníky BCD a CDE jsou rovnoramenné po řadě se základnami BD a CE. Přitom $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle DEC| = 36°$. Protože $|\sphericalangle BCD| = 108°$, platí $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BPC| = 72°$. Trojúhelník BCP je tedy rovnoramenný se základnou CP. Podobně zjistíme, že i trojúhelník DEP je rovnoramenný se základnou DP (obr. 4). Díky zadání platí také $|AB| = |BC| = |BP| = |EP|$ a dále $|\sphericalangle ABP| = 96° - 36° = 60°$. Odtud již bezprostředně plyne, že trojúhelník ABP je rovnostranný a trojúhelník AEP je rovnoramenný se základnou AE. Dopočítáním vnitřních úhlů v rovnoramenném trojúhelníku APE snadno zjistíme, že platí $|\sphericalangle APE| = 180° - 72° - 60° = 48°$, tudíž $|\sphericalangle AEP| = 66°$. Dostáváme tedy $|\sphericalangle AED| = 36° + 66° = 102°$.



Obr. 4

Závěrem uveďme, že k dopočítání velikosti úhlu AED lze využít také větu 1.

Příklad 4

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech C a E, kde

$$|AB| = |CD| = |DE| = 1 \quad \text{a} \quad |BC| + |EA| = 1.$$

Dokažte, že jeho obsah je 1.

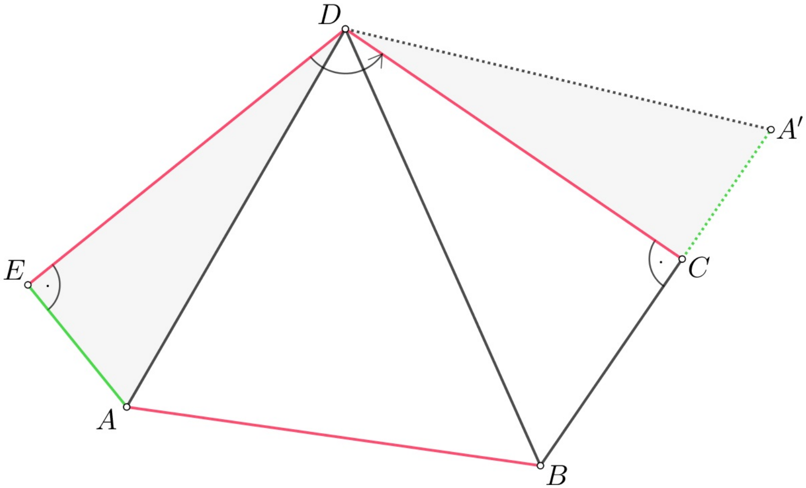
Řešení. V otočení se středem D a orientovaným úhlem EDC se vrchol E pětiúhelníku $ABCDE$ zobrazí na vrchol C, neboť podle zadání $|DE| = |CD| = 1$.

Pravoúhlý trojúhelník DEA s pravým úhlem při vrcholu E se v tomto otočení zobrazí na pravoúhlý trojúhelník DCA', tj. platí $|EA| = |CA'|$, kde A' je obrazem vrcholu A. Bod A' pak leží na polopřímce BC za vrcholem C (obr. 5). Podle zadání platí

$$|BA'| = |BC| + |CA'| = |BC| + |EA| = 1.$$

Obsah pětiúhelníku $ABCDE$ je tak roven obsahu čtyřúhelníku $ABA'D$, v němž jsou trojúhelníky ABD, $A'BD$ shodné podle věty *sss*. Trojúhelník

$A'BD$ má přitom obsah 1/2, proto pětiúhelník $ABCDE$ má obsah 1, jak jsme chtěli dokázat.



Obr. 5

Příklad 5

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E, v němž platí $|AB| = |BC|$, $|DE| = |EA|$ a $|BE| = 10$ cm. Určete v cm^2 obsah daného pětiúhelníku $ABCDE$.

Řešení. Označme F, G průsečíky přímky CD s kolmicemi k přímce BE, které procházejí po řadě vrcholy B, E daného pětiúhelníku (obr. 6). Na úhlopříčce BE uvažujme bod P, pro nějž platí $|BP| = |BF|$. V otočení se středem B a orientovaným úhlem $-90°$ je přitom obrazem bodu P bod F a obrazem bodu A je bod C. Trojúhelníky ABP a CBF jsou tudíž podle věty *sus* shodné, neboť $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle CBF|$ a také $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CFB|$. Vzhledem k tomu, že přímky BF a EG jsou rovnoběžné, platí (s ohledem na shodnost trojúhelníků ABP a CBF)

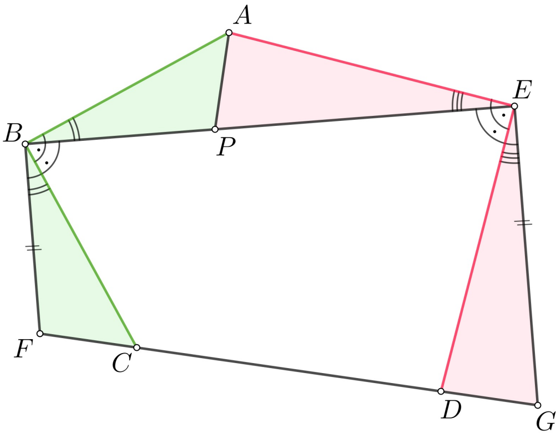
$$|\sphericalangle DGE| = 180° - |\sphericalangle CFB| = 180° - |\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APE|,$$

tedy trojúhelníky DGE a APE jsou shodné (*usu*), a proto $|EG| = |EP|$; navíc, první z nich je obrazem druhého v otočení se středem E a orientovaným úhlem $+90°$. Dále platí

$$|BF| + |GE| = |BP| + |EP| = |BE| = 10 \text{ cm}.$$

Obsah daného pětiúhelníku $ABCDE$ je tak roven obsahu lichoběžníku $BFGE$ se základnami BF a GE, tedy

$$\frac{1}{2}\,|BE|\,(|BF| + |GE|) = \frac{1}{2}\,|BE|^2 = 50\ \mathrm{cm}^2.$$



Obr. 6

Problematika obsahů konvexních pětiúhelníků se objevila mj. v 72. ročníku MO v kategorii C (úlohy C–I–5 a C–II–3).

Závěrem uvádíme pět neřešených úloh, které doporučujeme zájemcům k samostatnému procvičení této problematiky.

Příklad 6 (matematický folklor, viz např. [2], str. 177 – pěticípá hvězda)
Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Dokažte, že platí rovnost

$$|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DBE| + |\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BEC| = 180^\circ.$$

Poznámka. Uvažovanou pěticípou hvězdu lze sestrojit jedním tahem (jedná se o tzv. *uzavřenou lomenou čáru*). Pokuste se o to sami.

Příklad 7
Rozhodněte, zda existuje konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s tupými úhly ABD, BCE, CDA, DEB a EAC.

[Neexistuje. Uvažujte *nejkratší* z úhlopříček pětiúhelníku $ABCDE$ (nechť je to např. AC, tj. $|AC| \le |AD|$) a ukažte spor s existencí trojúhelníku ACD.]

Příklad 8

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E. Dokažte, že obvod trojúhelníku ACD není menší než $2|BE|$.

[Návod. Označme P, Q středy úhlopříček po řadě AC, AD. Ukažte, že délka lomené čáry $BPQE$ je rovna polovině obvodu trojúhelníku ACD.]

Příklad 9 (9. geometrická olympiáda I. F. Šarygina, 2013)

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E, v němž $|AB| = |AE|$ a $|BC| = |CD| = |DE|$. Nechť P je průsečík jeho úhlopříček BD a CE. Dokažte, že $|PA| = |AB|$.

Příklad 10 (XVII. MO juniorů – Polsko, 2022, viz [5])

V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ s pravým úhlem při vrcholu D platí $|AC| = |AD|$ a $|BD| = |BE|$. Dokažte, že trojúhelník ABD a čtyřúhelník $ABCE$ mají stejný obsah.

Literatura

[1] *Juklová, L., Švrček, J.*: Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník. MFI, roč. 31 (2022), č. 1, s. 15–20.

[2] *Kuřina, F.*: Matematika a řešení úloh. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2011.

[3] *Švrček, J.*: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1986), č. 8, s. 524–527.

[4] *Vojtěch, J.*: Učebnice geometrie pro IV. třídy středních škol. Knihtiskárna Prometheus, Praha, 6. vydání, 1933.

[5] Olimpiada Matematyczna Juniorów. Dostupné z: https://omj.edu.pl/

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 6. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.