MATEMATIKA

Didaktická struktura geometrie

FRANTIŠEK KUŘINA – JANA CACHOVÁ

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

V první části tohoto příspěvku se budeme zabývat výkladem pojmu didaktická struktura, v druhé části uvedeme několik ilustrativních příkladů vhodných pro žáky základní nebo střední školy.

Dva přístupy k vyučování geometrii

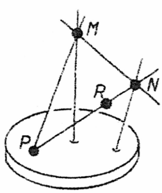
Kdy začíná dítě vnímat první podněty geometrického charakteru? S trochou nadsázky můžeme říci, že geometrii se dítě učí „od kolébky“. Dříve než začne mluvit, poznává omezenost prostoru, v němž žije (postýlka, ohrádka, pokoj, auto, byt, ...). Setkává se přirozeně i s pohybem (mávání ručičkou, příchod matky, pád hračky, jízda autem, ...). Rozumí příkazům „Pojď blíž“, „ Otoč se...“. Skládání kostek do krabice, panenek do kočárku, bonbónů do krabičky, ... to jsou činnosti, které mají charakter vyplňování prostoru. Již v předškolním věku poznává dítě (aniž si to ovšem uvědomuje) i jevy různých dimenzí (stopa botičky v písku, stín míče, ...).

Podle našeho názoru bychom měli tyto jevy (dělení prostoru, vyplňování prostoru, pohyb v prostoru a dimenze prostoru) využívat při vyučování geometrie od první třídy ZŠ. Pozoruhodné je, že tyto skutečnosti můžeme vnímat v geometrickém vyučování od základní školy po maturitu (rýsování, měření, obsah útvaru, objem tělesa, shodná zobrazení, diferenciální a integrální počet, ...). Ukažme, že popsané principy jsou „pojmotvorné“. Přímka dělí rovinu na dvě části – poloroviny. Bod dělí přímku na dvě polopřímky. Kružnice dělí rovinu na dvě oblasti (vnitřní a vnější)... Vyplňování prostoru jednorozměrného vede k měření úseček, „dláždění“ je vyplňování částí roviny, to je základ pojmu obsah útvaru, představa o vyplňování prostoru krychlemi je propedeutikou objemu tělesa. Rýsování (podle pravítka či kružítka) se realizuje pohybem, pohyb je základem představ o shodnosti geometrických útvarů. Zobrazování těles je proces redukce dimenze: prostorového útvaru do jeho dvojdimenzionálního obrazu.

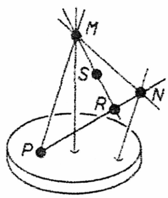
Naznačené přístupy nejsou ovšem základem vyučování geometrii na našich školách. To je silně ovlivněno tradicí, která se táhne od Eukleida k Hilbertovi. Je založeno na mýtu, že geometrie musí začínat „od začátku“, tedy od základních pojmů, jako jsou např. bod, přímka, incidence, … Vyučování je silně ovlivněno axiomatickým budováním geometrie.

V tomto, řekněme klasickém pojetí geometrie, se na samém začátku musíme zabývat otázkami, které můžeme stěží uspokojivě zodpovědět, např. Co je to bod? Je tomu tak i v tzv. množinovém pojetí vyučování, které u nás „vykvetlo“ v reformu, v níž např. trojúhelník byl zaveden způsobem reprodukovaným na obr. 1 z publikace [6]. Body jsou zde modelovány kuličkami z plastické gumy. Strany trojúhelníka (úsečky) jsou rovněž utvářeny souborem kuliček.

Modelování trojúhelníku



Obr. 3



Obr. 4

Vymodelujte body M, N, P, které neleží v úsečce, a špejlemi vyznačte strany trojúhelníku MNP, (obr. 3). Vyznačte bod R, který náleží trojúhelníku MNP. (Ž. modelují v lavicích ve skupinách po dvou a dva ž. modelují u tabule.) Bod R můžeme vymodelovat na straně trojúhelníku MNP (obr. 3). Bod R náleží trojúhelníku MNP. Nyní vymodelujte bod S trojúhelníku MNP, který nenáleží žádné jeho straně. Vymodelujeme úsečku MR (obr. 4). Úsečka MR je podmnožinou trojúhelníku MNP. Každý její bod náleží trojúhelníku MNP. Bod S vymodelujeme mezi body M, R. Vymodelujte jiný bot T, který náleží trojúhelníku MNP, Vymodelujte bod V, který trojúhelníku MNP nenáleží.

Obr. 1

Je tedy úsečka množinou bodů? Jistě nikoli v pojetí podle obr. 1, ale ani v pojetí Jana Vyšína: body – můžeme dobře modelovat korálky navlečenými na niti [5]. Množina korálků na napjaté niti by byla pochopitelně touž množinou, pověsíme-li korálky na krk. Chápání bodu jako malé kuličky do matematiky nepatří. Jak bychom při tomto přístupu mohli přijmout fakt, že množina bodů vnitřní oblasti kružnice s poloměrem 1 cm je stejně početná (má stejnou mohutnost) jako množina bodů vnější oblasti. Rovnost početnosti těchto množin můžeme dokázat i na úrovni základní školy. Stačí přiřadit libovolnému bodu X roviny různému od středu kružnice poloměru 1 bod X' polopřímky SX, pro který platí $|SX| \cdot |SX'| = 1$. Zkonstruovali jsme tedy prosté zobrazení vnitřní oblasti kružnice na oblast vnější.

Bod bychom měli (podle našeho názoru) chápat jako místo v rovině (nebo v prostoru). Úsečka je tedy množinou takovýchto míst, množinou bodů, z nichž pro každé dva je definována vzdálenost. Množiny bodů jsou podmnožinami určitého metrického prostoru. Úsečka AB je množinou všech bodů X, pro které platí $|AX| + |XB| = |AB|$.

Tím se dostáváme k tradičnímu pojmu školské geometrie: geometrickým místům bodů.

V roce 1964 Jan Vyšín píše: „Neměli bychom užívat zastaralého termínu ‚geometrické místo bodů' (tento název pochází od Platona!) a měli bychom důsledně říkat množina bodů! Tento požadavek má hlubší důvody než pouhé ‚zmodernizování' termínu; chceme totiž vštípit žákům, že ‚geometrická místa bodů' jsou útvary mnohem rozmanitější než jisté křivky (...) a chceme s těmito útvary skutečně pracovat jako s množinami" ([5, s. 102]). Tato Vyšínova výzva se ujala. V našich současných učebnicích se termín geometrické místo bodů zpravidla nevyskytuje. Naši autoři chtějí být moderní a termín geometrické místo bodů nepoužívají (Pomykalová, Herman, Cihlář, Míček a další). Výjimku tvoří snad jen Hejný, který má v učebnici D z r. 2017 kapitolu Geometrické místo bodů ([3, s. 27]).

Souhlasíme s názorem Jaroslava Šedivého, že termín geometrické místo bodů „označuje takovou část některé základní geometrické množiny, jejíž prvky mají dané charakteristické vlastnosti. Jde tedy o množiny určované podobně jako množiny kořenů rovnic atp." V souladu s výkladem o úsečce doporučujeme tedy užívat termín geometrické místo bodů, užívat však ve stejném smyslu termín množina nelze považovat za chybu.

Učivo o geometrických místech bodů je vlastně učivem o dělení na části: body geometrického místa U mají vlastnost V a body doplňku U' vlastnost V nemají.

V souvislosti s tím, že v geometrii vycházíme z reality žákova světa, připomeňme, že některé britské učebnice užívají nejen termín náměstí (square) místo čtverec, ale i disk (disc) místo kruh, drak (kite) místo deltoid, ... Ve slovníku [1] je dokonce definován n-rozměrný míč (obr. 2).

> **ball** The *n-ball* E^n ($n \geqslant 1$) is the subspace of n-dimensional *Euclidean space R^n of points $(x_1, \ldots, x_n)$ such that $\sqrt{(x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2)} \leqslant 1$. It contains the $(n-1)$-sphere S^{n-1} (*see* sphere) as a subspace.
> For example, E^2 is a circular disc and E^1 is the closed interval $[-1, 1]$.

Obr. 2

Hilbertovy Grundlagen der Geometrie, které vyšly r. 1899, ovlivnily, jak už jsme zde zmínili, velmi výrazně školskou geometrii. V r. 1898 vyšly Přednášky z geometrie francouzského matematika Hadamarda, které svým pojetím jsou dosti blízké didaktické struktuře geometrie.

V axiomaticky budované geometrii se, jak známo, tzv. primitivní pojmy (např. bod, přímka, ...) zavádějí nepřímo. Axiomy jsou jejich implicitními definicemi. Tento přístup není ovšem možný realizovat ve školním vzdělávání. Nevhodné je i pojetí Eukleidovo: „Bod jest, co nemá dílu“ [2].

Úlohy

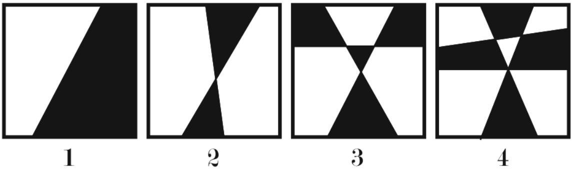
V této části uvádíme 10 řešených úloh z učiva střední školy. Úlohy jsou většinou známé a „klasické“. Jsou dokladem faktu, že ačkoliv naše škola explicitně didaktickou strukturu nezmiňuje, je tato struktura ve školském učivu implicitně obsažena.

Úlohy 1 a 2 se týkají dělení prostoru, úlohy 3 a 4 jsou na geometrická místa bodů, úlohy 5 a 6 pojednávají o dělení a vyplňování prostoru, úlohy 7 a 8 popisují pohyb v prostoru, úlohy 9 a 10 ukazují vztahy mezi dimenzemi 3 a 2. Poslední dva zde uváděné principy vedly dokonce k vydělení samostatných oborů: kinematické a deskriptivní geometrii.

Úloha 1 Dokažte, že „mapu“, kterou vytváří n přímek roviny, můžeme vybarvit dvěma barvami při zachování těchto pravidel:

- oblasti, které mají vzájemnou hranici ve tvaru úsečky, nebo polopřímky, musíme vybarvit různými barvami,
- oblasti, které se stýkají pouze v bodech musíme vybarvit stejnou barvou.

Na obr. 3 jsou nakresleny příklady výsledků pro 1, 2, 3 a 4 přímky.

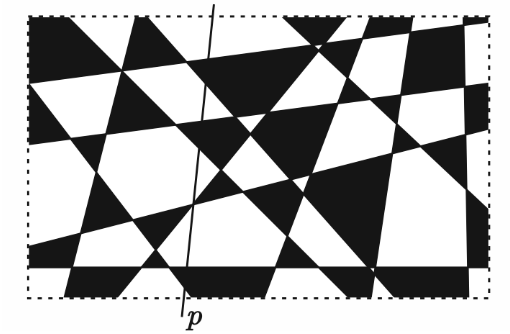


Obr. 3

Dokazujeme, že tvrzení platí pro libovolné přirozené n. Pro $n = 1$ jsme tvrzení ověřili na obr. 3.

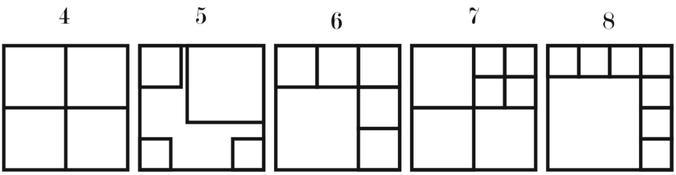
Předpokládejme, že mapu tvořenou $(n-1)$ přímkami můžeme vybarvit dvěma barvami.

Přidáme-li však další n-tou přímku p, mapa nebude správně vybarvena. Zaměníme-li však v jedné polorovině barvy, bude mapa opět vybarvená správně (obr. 4). Tím je věta dokázána pro libovolné přirozené n.



Obr. 4

Úloha 2 Dokažte, že každý čtverec lze rozložit na n čtverců, kde n je libovolné přirozené číslo různé od 2, 3 a 5.



Obr. 5

Na obrázku 5 je nakresleno dělení na 4, 6, 7 a 8 čtverců. Na 5 čtverců čtverec rozložit nelze, neboť čtverce v rozích znemožňují konstrukci pátého čtverce.

Protože rozdělením libovolného čtverce podle prvního obrázku přibudou další 3 čtverce, je počet možných rozdělení

$6 + 3k = 3 \cdot (k + 2) = 3m$

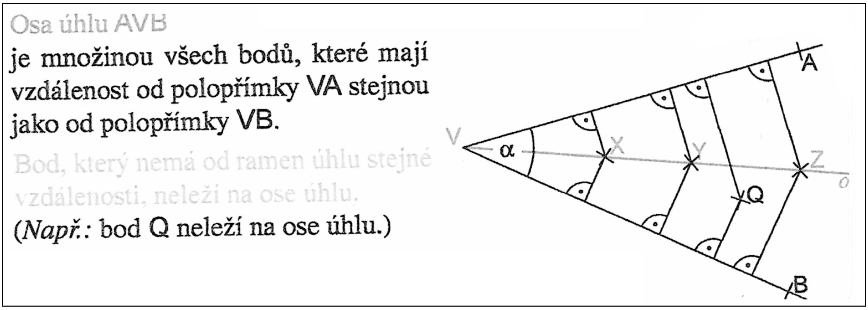
$7 + 3k = 2 \cdot 3 + 1 + 3k = 3(k + 2) + 1 = 3n + 1$

$8 + 3k = 2 \cdot 3 + 2 + 3k = 3(k + 2) + 2 = 3p + 2.$

Protože každé přirozené číslo lze některým z těchto tvarů vyjádřit, je tvrzení dokázáno.

Úloha 3 V řadě našich učebnic můžeme najít text, který reprodukujeme na obr. 6 z učebnice [8, s. 73].

Posuďte tuto ukázku.



Osa úhlu AVB

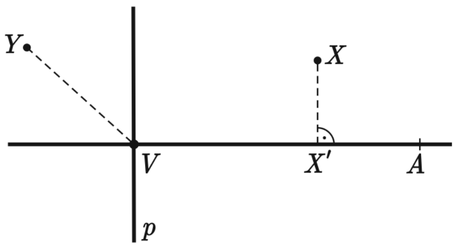
je množinou všech bodů, které mají vzdálenost od polopřímky VA stejnou jako od polopřímky VB.

Bod, který nemá od ramen úhlu stejné vzdálenosti, neleží na ose úhlu.

(*Např.:* bod Q neleží na ose úhlu.)

Obr. 6

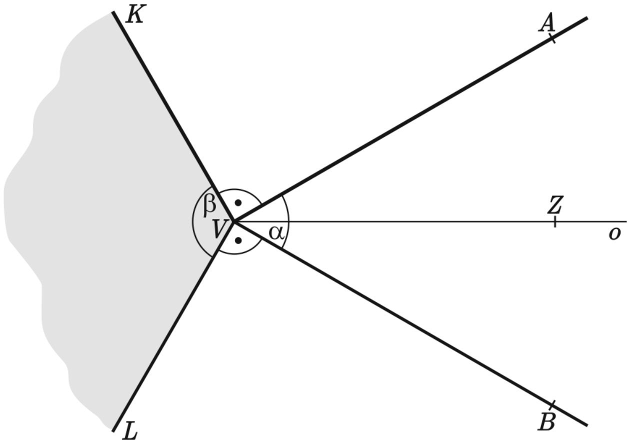
Tvrzení zde uváděné není správné, neboť vzdálenost bodu od polopřímky měříme podle obr. 7.



Obr. 7

V polorovině pA je vzdálenost bodu X od polopřímky PA velikost úsečky XX'. V polorovině opačné k polorovině pA je vzdálenost bodu Y od polopřímky VA velikost úsečky YV.

Množinou bodů stejně vzdálených od polopřímky VA jako od polopřímky VB je tedy sjednocení osy $o = VZ$ s úhlem $\beta = \sphericalangle KVL$ (obr. 8).



Obr. 8

Protože pojem vzdálenost bodu od polopřímky není obvykle na ZŠ definován, měli bychom naši úlohu formulovat např. takto: Určete množinu všech bodů úhlu AVB, které mají od přímky VA stejnou vzdálenost jako od přímky VB.

Úloha 4 Kružnice $k(K; r)$ se dotýká zevnitř kružnice $l(L; R)$ v bodě U. Vyšetřete geometrické místo středů X kružnic x, které mají vnější dotyk s kružnicí k a vnitřní dotyk s kružnicí l (obr. 9).

Je-li X bod hledaného geometrického místa bodů, pak v označení podle obr. 9 platí:

$|KX| = r + \varrho$, kde ϱ je poloměr jedné z hledaných kružnic a

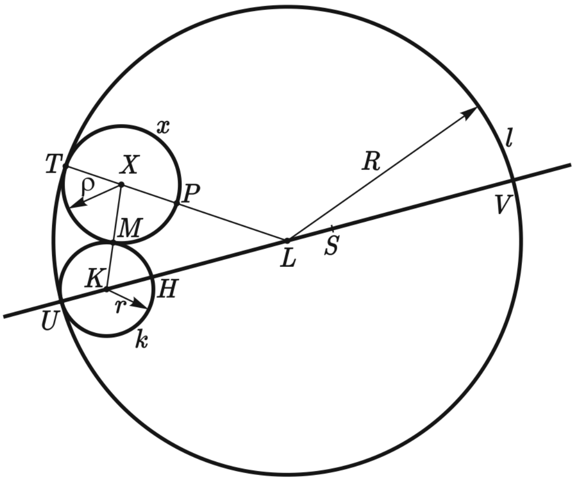
$|LX| = R - \varrho$.

Je tedy

$$|KX| + |LX| = r + R. \tag{1}$$

Bod X proto leží na elipse e s ohnisky K a L a hlavní osou $r + R$. Tato elipsa prochází bodem U a středem S úsečky HV (v označení podle obr. 9).

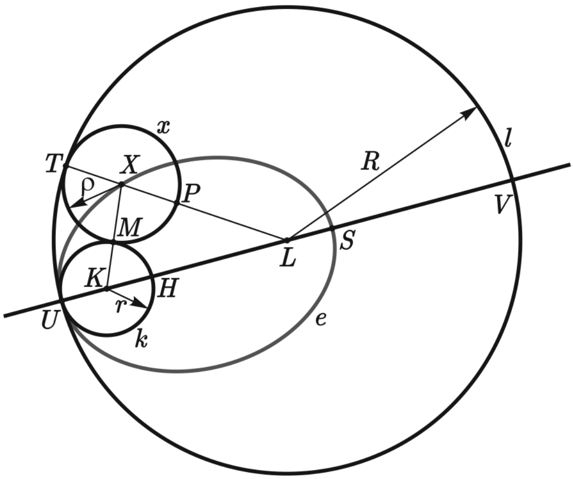
Je-li X libovolný bod elipsy e, označme M průsečík úsečky KX s kružnicí k a T průsečík polopřímky LX s kružnicí l. Každá kružnice $x(X; |XM|)$ se v bodě M dotýká kružnice k. Každá kružnice $x(X; |TX|)$ se v bodě T dotýká kružnice l.



Obr. 9

Protože podle konstrukce je $|MX| = |KX| - r$ a $|TX| = R - |LX|$, je $|MX| = |TX|$, neboť tato rovnost je ekvivalentní s rovností $|KX| - r = R - |LX|$, neboli (1).

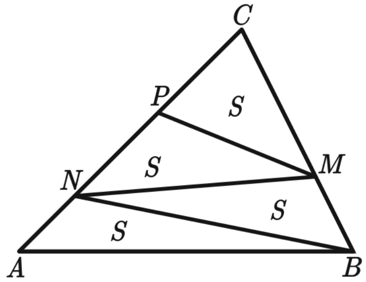
Náleží-li bod X elipse e, pak je středem kružnice, která se dotýká kružnic k a l.



Obr. 10

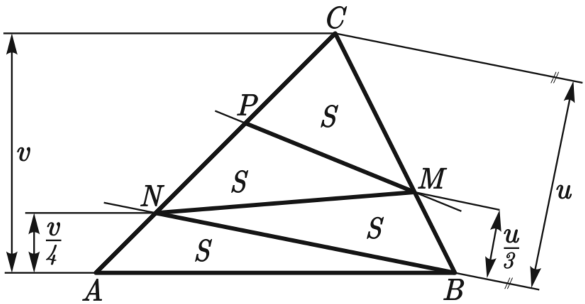
Množinou středů kružnic, které se dotýkají k a l, je tedy elipsa e s ohnisky K a L a hlavní osou $r + R$. Bod U musíme ovšem z hledaného geometrického místa vynechat.

Úloha 5 Rozdělte trojúhelník ABC na 4 trojúhelníky téhož obsahu podle obr. 11.



Obr. 11

Protože obsah S trojúhelníku ABN je $1/4$ obsahu $\triangle ABC$, můžeme bod N sestrojit podle obr. 12.



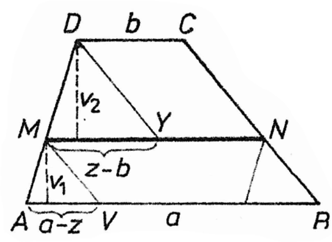
Obr. 12

Protože obsah trojúhelníku MNB je $1/3$ obsahu trojúhelníku NBC, můžeme bod M sestrojit podle obrázku analogicky. Těžnice MP trojúhelníku NMC dělí tento trojúhelník na dva trojúhelníky téhož obsahu S.

Úloha 6 Rozdělte lichoběžník $ABCD$ přímkou MN rovnoběžnou se základnami na dva lichoběžníky téhož obsahu.

Je-li MN hledaná úsečka, pak v označení podle obr. 13 (přímky DY, MV a CB jsou rovnoběžné, $|MN| = z$) platí:

$$\begin{aligned}(a+z)\cdot v_1 &= (b+z)\cdot v_2\\ (z-b)\cdot v_1 &= (a-z)\cdot v_2\end{aligned} \tag{2}$$

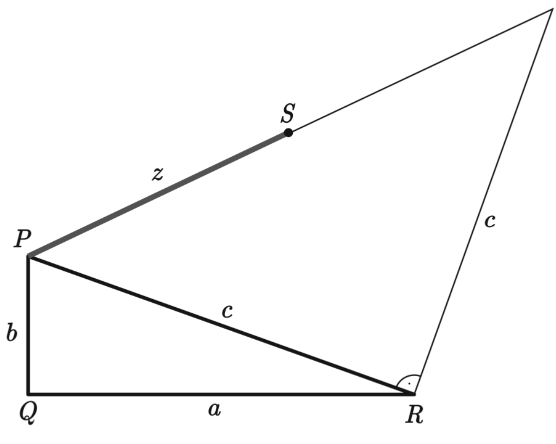


Obr. 13

První rovnost vyplývá z rovnosti obsahů lichoběžníků $ABNM$ a $MNCD$, druhá z podobnosti trojúhelníků AVM a MYD. Z rovnic (2) získáme výpočtem

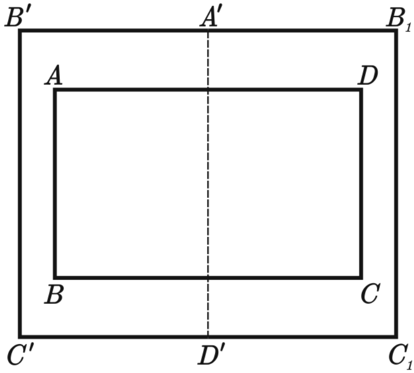
$$|MN| = z = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Úsečku délky z můžeme sestrojit např. takto: Pravoúhlý trojúhelník PQR s odvěsnami a, b má přeponu $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Z rovnosti $z = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ plyne podle obr. 14 konstrukce.



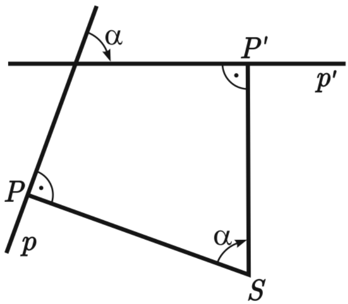
Obr. 14

Úloha 7 Deska skládacího stolu se má nejdříve otočit z polohy $ABCD$ do polohy $A'B'C'D'$ ($A \to A'$, $B \to B'$) podle jistého středu S. Pak se má získat překlopením jedné desky dvojitého stolu podle hrany $A'D'$ obdélníkový stůl $B'C'C_1B_1$. Určete polohu bodu S, podle něhož se stůl otáčí (obr. 15). (Viz [9, s. 127]).



Obr. 15

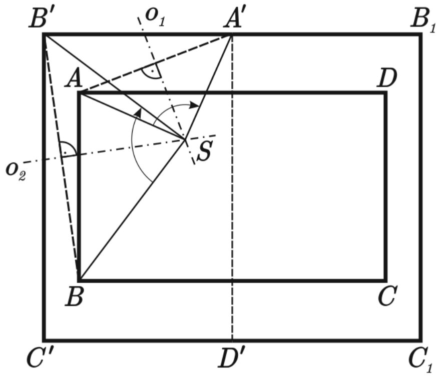
Protože přímka AB je kolmá k přímce $A'B'$, je takové otočení možné, neboť přímka a její obraz v otočení o úhel α svírá úhel α (obr. 16).



Obr. 16

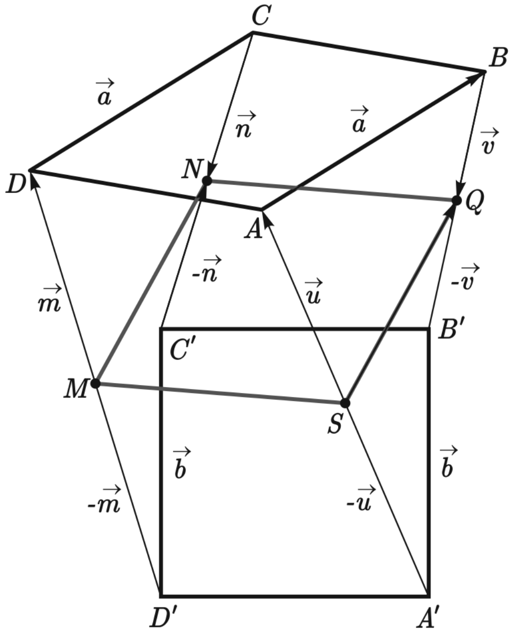
Střed otočení, které převádí bod A do bodu A', musí ležet na ose o_1 úsečky AA', střed otáčení, které převádí bod B do bodu B', musí ležet na ose o_2 úsečky BB'. Střed S musí tedy ležet v průsečíku těchto os. V rotaci $\mathcal{R}(S, 90°)$ přejde bod A do bodu A' a bod B do bodu B' (obr. 17).

Překlopením obdélníku $A'B'C'D'$ podle přímky $A'D'$ dostaneme výslednou polohu $B'C'C_1B_1$ rozložené desky stolu.



Obr. 17

Úloha 8 Čtverec ABCD je v prostoru libovolně přemístěn do polohy $A'B'C'D'$. Dokažte, že středy S, Q, N, M úseček AA', BB', CC' a DD' jsou vrcholy rovnoběžníku (obr. 18, obrazy daných čtverců jsou rovnoběžníky).



Obr. 18

V označení podle obrázku platí:

$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{v}$,

$\overrightarrow{SQ} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{v}$,

neboli

$$2\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right).$$

Podobně platí:

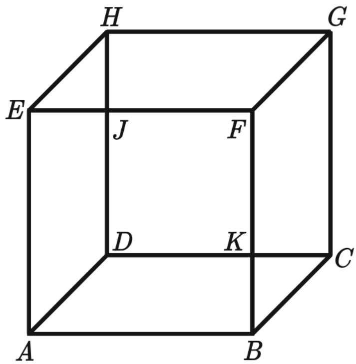
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{n}$,

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{m} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{n}$,

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right).$$

Strany SQ a MN jsou tedy rovnoběžné a shodné a čtyřúhelník $SQNM$ je rovnoběžník.

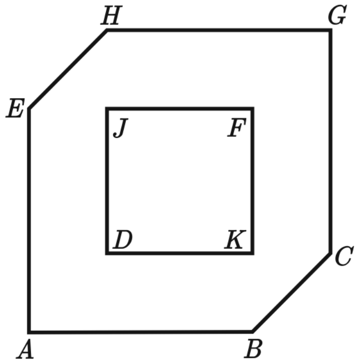
Úloha 9 Na obr. 19 je nakreslen mnohostěn, jehož všechny hrany jsou viditelné. Sestrojte síť tohoto tělesa. (F. Kuřina)



Obr. 19

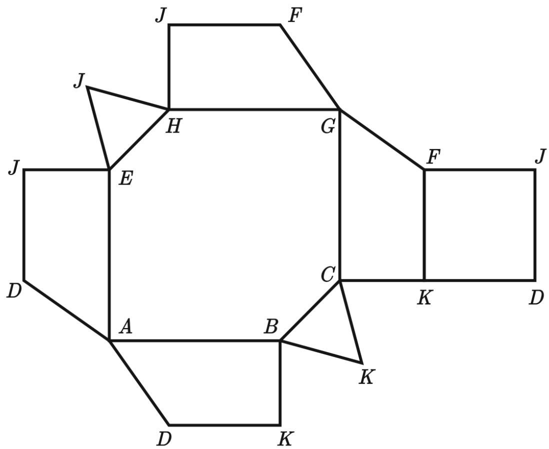
Mají-li být všechny hrany tělesa viditelné, musí jeho stěny tvořit trojúhelníky BCK a EHJ, lichoběžníky $ABKD$, $CGFK$, $GHJF$, $AEJD$, čtverec $DKFJ$, a ovšem i šestiúhelník $ABCGHE$, z něhož jsou viditelné pouze strany.

Činí-li někomu problém představit si hledaný mnohostěn, těleso, které Milan Hejný nazval v článku [4] Kuřinův osmistěn, je to patrně, je to patrně proto, že v obr. 19 vidí názorný obrázek průhledné krychle. Na tento obrázek se však můžeme dívat jako na půdorys konstruovaného mnohostěnu nad šestiúhelníkem $ABCGHE$. Nad tímto šestiúhelníkem je v prostoru v určité výšce v rovině rovnoběžné s rovinou šestiúhelníku umístěn čtverec $DKFJ$ podle obr. 20.



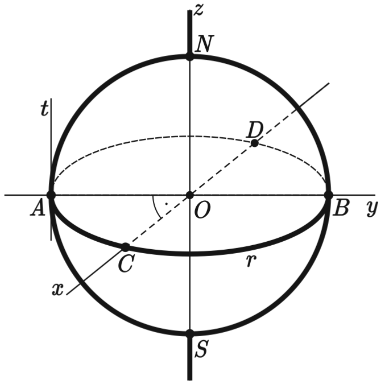
Obr. 20

Síť nebude obr. 19 určena jednoznačně, neboť z tohoto obrázku není patrna vzdálenost roviny čtverce od roviny šestiúhelníku. V síti bude úsečka KB (a další) větší než tato úsečka na obr. 19. Úsečky HG a JF jsou základny lichoběžníku a vrcholy B, C, K jsou vrcholy trojúhelníku. Podobně to platí pro zbývající části mnohostěnu. Provedeme-li otočení trojúhelníků a lichoběžníků do roviny šestiúhelníku, dostaneme spolu se čtvercem $KDJF$ síť hledaného tělesa (obr. 21).



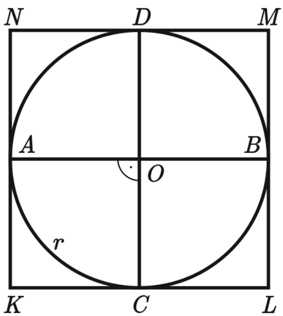
Obr. 21

Úloha 10 Jaké chyby jsou na obrázku 22 kulové plochy se středem v počátku souřadnicového systému. Rovník, který je kružnicí, se podle obr. 22 zobrazí jako elipsa.

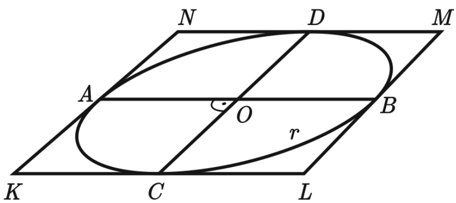


Obr. 22

K sobě kolmé průměry AB a CD rovníku (na obr. 23) se zobrazí do průměrů AB a CD, které svírají ostrý úhel (obr. 24).

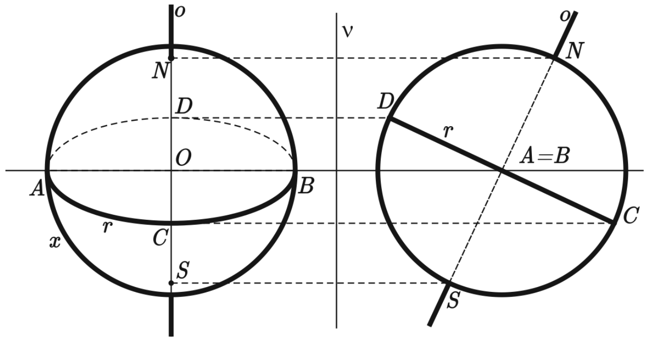


Obr. 23



Obr. 24

Protože rovnoběžné přímky zobrazujeme jako rovnoběžné přímky a obrazem tečny vzoru je tečna obrazu, zobrazí se čtverec $KLMN$ opsaný rovníku (obr. 23) do rovnoběžníku $KLMN$ na obr. 24. Rovník se tedy zobrazí do elipsy vepsané do rovnoběžníku $KLMN$ na obr. 24. Tečna rovníku v bodě A na obr. 22 má být rovnoběžná s CD podle obr. 24 a nemůže být k AB kolmá. Na obr. 22 jsou dále nesprávně zobrazeny póly N a S. To nahlédneme podle obr. 25.



Obr. 25

Má-li být obrazem rovníku elipsa, nemůže být její rovina rovnoběžná s nákresnou. Při bočním pohledu je nákresna zobrazena jako přímka v a rovník jako úsečka CD. Pak ovšem póly N a S se nemohou zobrazit na obrys obrazu kulové plochy, jak je nakresleno na obr. 22.

Tento článek je informací o didaktickém přístupu k vyučování geometrii, který je poněkud odlišný od tradiční cesty realizované na našich školách. Jsme přesvědčeni, že uvedené pojetí může přispívat k hlubšímu porozumění geometrii a ke zvyšování zájmu žáků o matematiku.

Literatura

[1] *Daintith, J., Nelson, R. D.*: The Penguin Dictionary of Mathematics. Dictionary, Penguin Serie, Penguin Books, 1989.

[2] *Eukleides*: Základy. OPS Nymburk, 2007.

[3] *Hejný, M. a kol.*: Matematika pro 2. stupeň ZŠ, D. H-mat, Praha, 2017.

[4] *Hejný, M.*: F. K. inspirující. In: Vyučování matematice a kultivace myšlení. Gaudeamus, Hradec Králové, 1997, s. 20–26.

[5] *Hruša, K., Vyšín, J.*: Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní škole. SPN, Praha, 1964.

[6] *Kabele, J., Janků, M., Hruša, K.*: Metodický list pro učitele k učebnici matematiky pro 2. ročník ZŠ. SPN, Praha, 1976.

[7] *Kuřina, F.*: Hilbert nebo Hadamard. Pokroky matematiky, fyziky, astronomie, roč. 57, č. 3 (2012).

[8] *Rosecká, Z., Míček, A.*: Geometrie 8. Nová škola, Brno, 1999.

[9] *Šedivý, J.*: O modernizaci školské matematiky. Matematická knižnice, SPN, Praha, 1969.

[10] *Kutuzov, B. V.*: Geometrija. Učpedgiz, Moskva, 1950.