Ústřední kolo 72. ročníku MO kategorie A

Ústřední kolo 72. ročníku Matematické olympiády kategorie A uspořádalo Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť. Záštitu nad ním převzali *RNDr. Miloš Vystrčil*, předseda Senátu Parlamentu České republiky, *Ing. Radim Holiš*, hejtman Zlínského kraje, *Ing. Mgr. Zuzana Fišerová, Ph.D.* radní Zlínského kraje pro oblast školství a kultury, *Ing. et Ing. Jiří Korec*, primátor statutárního města Zlína, *prof. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.*, rektor Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a *doc. Ing. Jiří Vojtíšek, Ph.D.*, děkan její Fakulty aplikované informatiky. Na uspořádání ústředního kola se dále podílela Ústřední komise matematické olympiády, Jednota českých matematiků a fyziků a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR. Všichni soutěžící, členové Ústřední komise komise MO a pozvaní hosté byli ubytováni v hotelu Baltaci, vlastní soutěž a slavnostní zahájení pak probíhalo v prostorách Fakulty aplikované informatiky UTB, vyhlášení výsledků pak na zlínské radnici. Na slavnostním zahájení přivítal soutěžící hlavní organizátor *Mgr. Pavel Simkovič*, *RNDr. Jan Chudárek*, ředitel gymnázia, nositelé záštity a nechyběla ani tradiční motivační přednáška *doc RNDr. Jaromíra Šimši, CSc.*

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti v ústředním kole 45 nejlepších účastníků, mezi nimiž bylo 9 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny, 20. a 21. března, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy ústřední komise pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali prohlídku Baťovy vily, přijetí na Krajském úřadě Zlínského kraje, prohlídku Baťova mrakodrapu i města. Druhý den to pak byla návštěva Zoo Zlín a návštěva představení „Baskerville: Záhada Sherlocka Holmese“ v městském divadle Zlín.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům III. kola kategorie A se uskutečnilo ve středu 22. března dopoledne. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Dle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno deset vítězů ústředního kola, absolutním vítězem se pak stal *Samuel Rosiar* z G Jana Keplera v Praze 6 se ziskem 41 bodů. Dále bylo oceněno jedenáct úspěšných řešitelů. Podrobnější výsledky najdete na stránkách 72. ročníku MO. Zde najdete také vzorová řešení soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

1. soutěžní den (20. března)

1. Alice a Bohouš hrají hru na plánu se 72 políčky rozmístěnými po obvodu kruhu. Na začátku Bohouš položí na některá políčka po jednom žetonu. V každém kole nejprve Alice zvolí jedno prázdné políčko a Bohouš pak na něj musí posunout žeton z jednoho sousedního políčka. Pokud to nesvede, hra končí; jinak následuje další kolo. Určete nejmenší počet žetonů, pro který Bohouš umí zajistit, že ve hře proběhne aspoň 2023 kol. (*Václav Blažej*)

2. Nechť $n \geq 3$ je celé číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou délky stran libovolného n-úhelníku. Dokažte nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > \sqrt{2\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

(*Jaroslav Švrček*)

3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík jeho výšek a I střed kružnice mu vepsané. Nechť D je kolmým průmětem bodu I na přímku BC a E je obrazem bodu A v souměrnosti se středem I. Dále je F kolmým průmětem bodu H na přímku ED. Dokažte, že body B, H, F a C leží na téže kružnici. (*Patrik Bak*)

2. soutěžní den (21. března)

4. Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladných celých čísel splňující pro každý index $n \geq 3$ podmínku

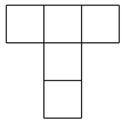
$$a_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1} - 1.$$

a) Dokažte, že některé prvočíslo je dělitelem nekonečně mnoha členů této posloupnosti.
b) Dokažte, že takových prvočísel je nekonečně mnoho.

(*Tomáš Bárta*)

5. V trojúhelníku ABC označme M, N, P po řadě středy stran BC, CA, AB a G jeho těžiště. Nechť kružnice opsaná trojúhelníku BGP protíná přímku MP v bodě K různém od P a kružnice opsaná trojúhelníku CGN protíná přímku MN v bodě L různém od N. Dokažte, že $|\sphericalangle BAK| = |\sphericalangle CAL|$. (*Josef Tkadlec*)

6. Nechť $n \geq 3$ je celé číslo. Uvažujme čtverečkovaný papír o rozměrech $n \times n$, jehož jednotlivé čtverečky mohou mít buď bílou, nebo černou barvu. V každém kroku změníme barvy pěti čtverečků, které tvoří obrazec



v libovolném natočení. Na počátku jsou všechny čtverečky bílé. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu kroků dosáhnout toho, že všechny čtverečky budou černé. (*Jaroslav Zhouf*)

Vítězové ústředního kola: zleva Michal Janík (2. místo), Samuel Rosiar (1. místo), Jakub Štepo (3. místo)

Všichni vítězové a úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků byli pozváni na výběrové soustředění, kde budou bojovat o místa v reprezentačních družstvech na Mezinárodní matematickou olympiádu v Japonsku a Středoevropskou matematickou olympiádu na Slovensku.

Všichni řešitelé z nematuritních ročníků pak budou v pozváni na tradiční zářijové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A do Janských Lázní.

Pavel Calábek

Ústřední kolo 72. ročníku MO kategorie P

Ústřední kolo 72. ročníku Matematické olympiády kategorie P se konalo ve Zlíně ve dnech 22.–24. 3. 2023. Jako obvykle přímo navazovalo na ústřední kolo MO kategorie A. Devět studentů, kteří letos postoupili do ústředního kola MO v obou nejvyšších kategoriích MO, tak absolvovali obě soutěže na jednom místě v průběhu jednoho týdne. Celé ústřední kolo Matematické olympiády organizačně výborně připravili pracovníci Krajské komise MO Zlínského kraje a Gymnázia Zlín–Lesní čtvrť. Na přípravě a zajištění odborné části ústředního kola MO kategorie P se podíleli zejména pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří se postarali o přípravu soutěžních úloh, opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro praktickou část soutěže.

V letošním ústředním kole MO kategorie P soutěžilo 29 nejlepších úspěšných řešitelů krajských kol. Největší zastoupení měli tentokrát kraje Praha a Jihomoravský kraj, oba s jedenácti účastníky. Šest krajů nemělo v letošním ústředním kole žádného řešitele – ve třech z nich nikdo nepostoupil z krajského kola, ve třech se krajské kolo vůbec nekonalo. Polovina soutěžících byla z maturitních ročníků (celkem 14), ostatní byli mladší (celkem 15).

Soutěž byla zahájena ve středu večer. Po krátkém přivítání se soutěžící seznámili s pravidly soutěže a dostali také nezbytné organizační pokyny. Ve čtvrtek dopoledne proběhla teoretická část soutěže, v níž studenti řešili úlohy zaměřené na návrh efektivního algoritmu. V této části se nepracuje na počítačích, soutěžící odevzdávají svoje řešení zpracovaná v písemné podobě. Na vyřešení tří zadaných úloh mají vymezen čas 4,5 hodiny. Jedna z teoretických úloh každoročně využívá nějaký netradiční výpočetní model, který připraví autoři úloh vždy pro všechna soutěžní kola příslušného ročníku MO.

Druhý soutěžní den v pátek probíhal u počítačů za obdobných podmínek a podle stejných pravidel, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači se soutěžním prostředím a v průběhu 4,5 hodiny má za úkol vyřešit tři úlohy. Řešení praktických úloh je třeba dovést do podoby odladěných, plně funkčních programů. Odevzdané programy jsou již v průběhu soutěže okamžitě testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat. Hodnotí se nejen správnost, ale pomocí nastavených časových limitů také rychlost výpočtu. V bodovém hodnocení lze díky tomu odlišit kvalitu růz-