MATEMATIKA

Pravděpodobností modely spojené s hody kostkou

PAVEL TLUSTÝ – MARIKA HRUBEŠOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

K modelování konečných pravděpodobnostních prostorů se běžně používají kostky, karty, koule atd. Pravděpodobnosti konkrétních jevů pak představují vlastnosti těchto pravděpodobnostních prostorů. Například při hodu hrací kostkou nás zajímá: „Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo 3?“, nebo „S jakou pravděpodobností padne číslo větší než 4?“ atd. Pro pokročilejší studenty jsou takové otázky příliš snadné. Jednoduchou modifikací ale můžeme snadno přejít k nekonečným pravděpodobnostním prostorům. Tak se nám otevírá možnost hledat odpovědi na nové, komplikovanější problémy s různým stupněm obtížnosti. Ukažme si to na následujících příkladech.

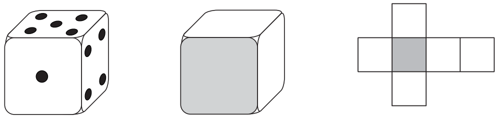
Na začátku hry „Člověče, nezlob se“ hráč hází hrací kostkou tak dlouho, dokud mu nepadne šestka. Teoreticky mu nemusí padnout nikdy, tj. může v házení pokračovat do nekonečna.

Úloha 1. *Kolikrát musíme „v průměru“ hodit hrací kostkou, než nám padne číslo 6?*[1)]

Je dobré si uvědomit, že při čekání na šestku není podstatné (pokud nepadla šestka), jaké konkrétní číslo padlo. Z tohoto důvodu si můžeme představit, že házíme „speciální“ kostkou, která má jednu stěnu šedivou a ostatní stěny jsou bílé (obr. 1 b, c). Takovou kostkou házíme tak dlouho,

[1)] Odhad počtu hodů můžeme najít empiricky. Házíme opakovaně kostkou tak dlouho, až padne šestka, a zapisujeme počet vykonaných hodů. Aritmetický průměr takto získaných čísel je hledaným odhadem.

dokud nepadne šedivá stěna. Ukažme si několik různých řešení uvedené úlohy.



a) b) c)

Obr. 1

Řešení 1: Uvědomíme si, že dobu čekání na nastání nějakého jevu můžeme modelovat pomocí tzv. geometrického rozdělení. „Průměrná“ doba čekání na šestku představuje střední hodnotu tohoto rozdělení. Po dosazení do vzorce pro střední hodnotu geometrického rozdělení dostaneme $EX = 6$ (podrobněji viz [3]). Tedy v průměru musíme šestkrát hodit kostkou, než nám padne šestka.

Řešení 2: Střední (očekávanou) hodnotu počtu hodů kostkou vypočteme podle definice, tj.

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot p_n.$$

Je zřejmé, že $x_n = n$, neboť jde o počet hodů. V prvním hodu padne šestka s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. K tomu, aby první šestka padla právě ve druhém hodu, je nutné, aby v prvním hodu šestka nepadla (to nastane s pravděpodobností $\frac{5}{6}$) a ve druhém padla (to se stane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$). Podobně i pro další hody. Postupně tak dostáváme:

$$\begin{array}{llllllll} x_n: & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ p_n: & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} & \dots & \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} & \dots \end{array}$$

Tedy

$$EX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) + \dots + n\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\right) + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

Hledaný součet vypočteme s využitím vzorce

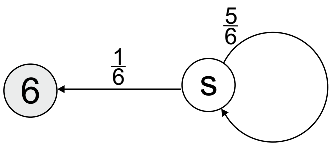
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

odvozeného v [4] a dostaneme

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = 6.$$

Řešení 3: K výsledku lze dojít i následující úvahou: Hrací kostka má celkem šest stěn. Vzhledem k její symetrii je zřejmé, že doba čekání na padnutí libovolného (předem zvoleného) čísla musí být pro všechna čísla stejná. K tomu, aby padlo každé číslo aspoň jednou, je třeba nejméně 6 hodů, tj. $EX \geq 6$. Kdyby $EX > 6$, pak by nutně muselo nějaké číslo mít dobu čekání na první padnutí kratší než 6, což není možné. Tedy $EX = 6$.

Řešení 4: Problém „čekání na šestku" interpretujeme jako hru a k nalezení řešení použijeme stochastický graf. Na začátku hry stojí figurka v bodě ⓢ (viz obr. 2). Hodíme kostkou a pokud nepadne šestka, figurka zůstane stát na místě a házení kostkou se opakuje. Jakmile padne šestka, figurka se posune do bodu ⑥ a hra končí. Zbývá určit, jak dlouho to bude v „průměru" trvat, tj. kolik hodů máme očekávat, že budeme muset vykonat, než se figurka přesune do bodu ⑥?



Obr. 2

Figurka stojí v bodě ⓢ. Označme EX očekávaný počet hodů, které musíme vykonat, než figurka přejde do bodu ⑥. Co může nastat? Buď padne šestka hned v prvním hodu (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$), nebo padne jiné číslo (s pravděpodobností $\frac{5}{6}$) a situace je opět na začátku, ale už jsme vykonali jeden neúspěšný hod. Odtud dostaneme rovnici

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \Big(EX + 1\Big),$$

která po vyřešení dává výsledek $EX = 6$.

Na uvedená řešení můžeme nahlížet z mnoha různých úhlů. Například zda lze takový postup jednoduše aplikovat i na nejrůznější modifikace daného problému. Uvažujme následující pozměněnou situaci:

Úloha 2. *Kolikrát musíme „v průměru“ hodit hrací kostkou, než*

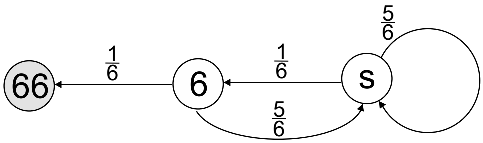
a) padnou dvě šestky po sobě (série ... 66),

b) padne 5 a po ní 6 (série ... 56)?

Mohlo by se zdát, že doby čekání na obě zmíněné série jsou stejné. Nejprve čekáme, až padne číslo 5 nebo 6 (to nastane v obou případech v průměru po šesti hodech) a pak v obou případech čekáme, až padne číslo 6. Tato úvaha ale není správná!

Z postupů použitých k řešení úlohy 1 lze pouze techniku stochastických grafů snadno modifikovat na řešení úlohy 2.

Řešení:
a) Situaci opět interpretujeme jako hru. Na začátku stojí figurka v bodě s (obr. 3).



Obr. 3

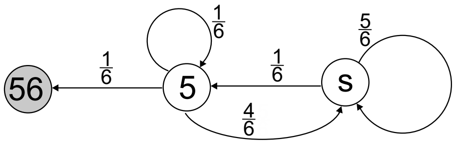
Z řešení úlohy 1 víme, že figurka se z bodu s do bodu 6 přesune v průměru po šesti hodech (proto je v níže uvedené rovnici číslo 6). Je-li figurka v bodě 6 a padne 6, přesune se do bodu 66 a hra končí (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, proto výraz $1 \cdot \frac{1}{6}$). Pokud figurka stojí v bodě 6 a padne jiné číslo než 6 (to nastane s pravděpodobností $\frac{5}{6}$), figurka se přesune zpět do počáteční pozice s a doba čekání je o jeden hod delší (proto výraz $\frac{5}{6} \cdot (EX + 1)$). Odtud tedy dostáváme rovnici

$$EX = 6 + 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \Big(EX + 1\Big)$$

a po jejím vyřešení $EX = 42$.
Série „... 66“ tedy nastává v průměru po 42 hodech.

b) Už jsme zmínili výše, že doba čekání na sérii (... 56) není stejná jako doba čekání na sérii (... 66). Jednoduché vysvětlení plyne z porovnání stochastických grafů obou sérií (obr. 3 a obr. 4).

Stojí-li figurka na obr. 3 v bodě ⑥ a nepadne-li v následujícím hodu šestka, vrátí se figurka zpět do bodu ⓢ, tj. do počáteční pozice. Stojí-li figurka na obr. 4 v bodě ⑤ a nepadne-li v následujícím hodu číslo 6, přesune se figurka do bodu ⓢ pouze v případě, že padne číslo 1, 2, 3 nebo 4. V případě, že padne číslo 5, zůstává figurka stát v bodě ⑤ a házení pokračuje. Odtud je zřejmé, že doba čekání na sérii (…56) musí být kratší než doba čekání na sérii (…66).



Obr. 4

Označme EX dobu čekání na sérii (…56) a EX_6 „průměrný počet hodů", které vykonáme, než přejde figurka z bodu ⑤ do bodu (56). Analogicky jako v předchozím případě dostaneme vztahy:

$$EX = \frac{1}{6} \cdot \Big(EX_6 + 1\Big) + \frac{5}{6} \cdot \Big(EX + 1\Big),$$

$$EX_6 = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \Big(EX_6 + 1\Big) + \frac{4}{6} \cdot \Big(EX + 1\Big).$$

Po vyřešení dostáváme $EX = 36$.
Série (…56) nastává v průměru po 36 hodech.

Podrobněji je technika stochastických grafů při řešení nejrůznějších pravděpodobnostních úloh popsána v [1].

Literatura

[1] *Krech, I., Tlustý, P.*: Stochastické grafy a jejich aplikace. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2012.

[2] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Kombinatoryka wokoł nas. 3. vydání, Wydavnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2017.

[3] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.

[4] *Tlustý, P., Krech, I.*: Užití stochastického grafu ke sčítání aritmeticko-geometrické řady. MFI, roč. 26 (2017), č. 4, s. 1–5.