Literatura

[1] Úlohy. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, sv. 33 (1904), č. 1, s. 114–116. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123658

[2] Úlohy. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, sv. 33 (1904), č. 3, s. 338–368. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123974

[3] *Gergelitsová, Š., Holan, T.*: Trable a radosti s geometrií ve škole (Plenary Talk). Proceedings of the Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020, 7.–10. 9. 2020, Pardubice. Slovak University of Technology, Bratislava, s. 17–24.

[4] GeoTest [online] Dostupné z: https://geotest.geometry.cz

O jisté netriviální množině bodů v rovině

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

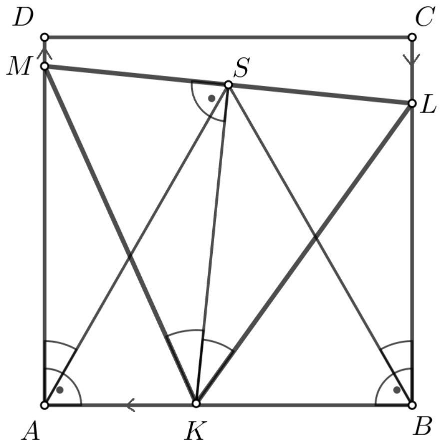
Cílem tohoto příspěvku je zkoumání jedné netriviální množiny bodů v rovině, kterou je množina těžišť všech rovnostranných trojúhelníků vepsaných do daného čtverce tak, že všechny tři vrcholy každého z těchto rovnostranných trojúhelníků leží na hranici daného čtverce.

Podnět k řešení uvedeného problému vzešel z praktické ukázky *T. Chehlarové* z Bulharské akademie věd, která prezentovala výsledky projektu „Integrace manipulativních digitálních prostředků do výuky matematiky" na workshopu Innovative Mathematics Learning Software for Migrant Students, kterou pořádala v říjnu 2019 Univerzita Konstantína Filozofa v Nitře, viz [1].

Snadno je vidět, že pro fixovanou polohu bodu K na hranici daného čtverce $ABCD$ sestrojíme zbývající dva vrcholy K, L hledaného rovnostranného trojúhelníku KLM užitím otočení $\mathcal{R}(K, +60°)$, v němž obrazem vrcholu L je bod M ($M \neq K$), který získáme jako průsečík hranice obrazu

$A'B'C'D'$ čtverce $ABCD$ v tomto otočení s hranicí čtverce $ABCD$. Bod L je pak obrazem nalezeného bodu M v otočení $\mathcal{R}'(K, -60°)$.

Uvažujme nyní bod K na straně AB čtverce $ABCD$ tak, že vrcholy L, M rovnostranného trojúhelníku KLM leží po řadě na stranách BC, DA. Střed jeho strany LM označíme S (obr. 1).



Obr. 1

Vzhledem k tomu, že

$$|\sphericalangle KAM| + |\sphericalangle KSM| = |\sphericalangle BKS| + |\sphericalangle BLS| = 2 \cdot 90° = 180°,$$

jsou oba čtyřúhelníky $AKSM$ a $BKSL$ tětivové. Platí tedy

$$|\sphericalangle SAM| = |\sphericalangle SKM| = 30° = |\sphericalangle SKL| = |\sphericalangle SBL|,$$

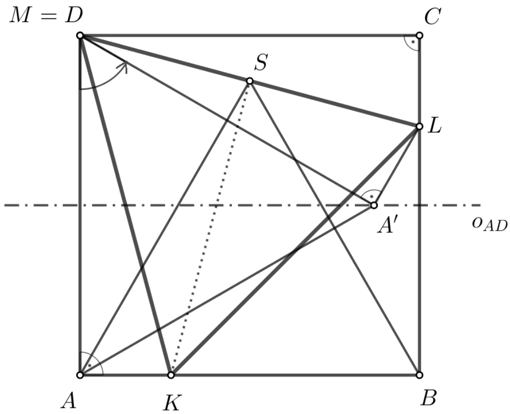
tudíž

$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle ASB| = 60°,$$

tj. trojúhelník ABS je rovnostranný. Bod S je tedy pro všechny přípustné (takto uvažované) polohy bodů K, L, M ležících po řadě na stranách AB, BC, DA určen jednoznačně jako *třetí vrchol rovnostranného trojúhelníku* ABS (obr. 1).

Označme a délku strany čtverce $ABCD$ a uvažujme dále změnu polohy bodu K na úsečce AB tak, aby body L, M ležely po řadě na úsečkách

BC, DA. S ohledem na symetrii čtverce $ABCD$ podle osy jeho strany AB stačí sledovat změnu polohy bodu K od středu strany AB směrem k vrcholu A (obr. 1). V tomto případě se (v závislosti na popsané změně polohy bodu K) mění i poloha bodů L a M tak, že bod M se „pohybuje“ na straně AD směrem k vrcholu D a bod L se současně „pohybuje“ na straně BC směrem k vrcholu B. V mezním případě pak $M = D$ (obr. 2). Zde určíme velikost odpovídajícího úhlu ADK. Bod A' je obrazem bodu A v otočení $\mathcal{S} = (D, +60°)$, tj. trojúhelník $AA'D$ je rovnostranný a $A' \in o_{AD}$, kde o_{AD} je osa strany AD.



Obr. 2

Dále platí:

(i) $\triangle AKD \cong \triangle A'LD$ (otočení $\mathcal{S}$),

(ii) $\triangle A'LD \cong \triangle CLD$ (Ssu).

Platí tedy $|\sphericalangle CDA'| = 30°$, tj.

$$|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle A'DL| = |\sphericalangle CDL| = \frac{1}{2} \cdot 30° = 15°,$$

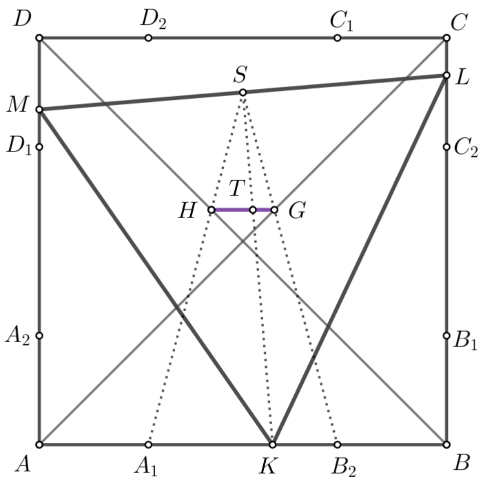
a proto $|AK| = |AL'| = |CL| = a \operatorname{tg} 15°$.

S ohledem na symetrii čtverce $ABCD$ podle os jeho stran a užitím principu cyklické záměny vidíme, že každou stranu čtverce $ABCD$ můžeme tedy rozdělit (symetricky vzhledem k jejímu středu) na tři úseky, přičemž oba krajní (shodné) úseky mají délku $a \operatorname{tg} 15°$, tj. platí

$$|AA_1| = |B_2B| = |BB_1| = \ldots = |A_2A| = a \operatorname{tg} 15°,$$

a prostřední úsek téže strany má délku $(1 - 2\,\mathrm{tg}\,15^\circ)a$, tj. platí (obr. 3)

$$|A_1B_2| = |B_1C_2| = |C_1D_2| = |D_1A_2| = (1 - 2\,\mathrm{tg}\,15^\circ)a.$$



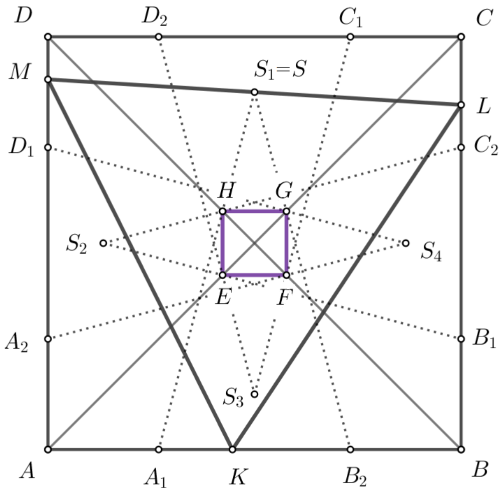
Obr. 3

Dále je zřejmé, že pokud některý z vrcholů rovnostranného trojúhelníku KLM leží na prostředním úseku jedné ze stran čtverce $ABCD$, leží oba zbývající vrcholy (po jednom) na vzdálenějších kratších úsecích přilehlých (sousedních) stran k této straně.

Označíme-li např. K ten z vrcholů rovnostranného trojúhelníku KLM, který se pohybuje po prostředním úseku A_1B_2 strany AB uvažovaného čtverce $ABCD$ (obr. 3), je (na základě výše uvedené úvahy) střed S jeho strany LM pro všechny polohy bodu K identický.

Z obr. 3 je patrné, že těžiště T rovnostranného trojúhelníku KLM je obrazem vrcholu K ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\frac{1}{3}$. Pohybuje-li se bod K na úsečce A_1B_2 (na straně AB čtverce), obr. 3, pak úsečka HG, která je obrazem úsečky A_1B_2 ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\frac{1}{3}$ je množinou těžišť všech rovnostranných trojúhelníků KLM, které splňují podmínky úlohy a jeden jejich vrchol leží na úsečce A_1B_2.

Analogicky, pohybuje-li se vrchol K po prostředních úsecích B_1C_2, C_1D_2, D_1A_2 (po řadě) stran BC, CD, DA, čtverce (obr. 3 a obr. 4), získáme množinu těžišť všech vepsaných rovnostranných trojúhelníků KLM. Touto množinou je čtverec $EFGH$. Strany čtverce $EFGH$ jsou obrazy prostředních úseků každé strany čtverce $ABCD$ ve výše popsaných čtyřech stejnolehlostech (jejich středy jsou postupně body $S_1 = S$, S_2, S_3, S_4, koeficienty $\frac{1}{3}$, obr. 4). Každý vrchol čtverce $EFGH$ je obrazem bodů ve dvou různých stejnolehlostech, např. bod H je obrazem bodu A_1 ve stejnolehlosti se středem S_1 a současně obrazem bodu C_2 ve stejnolehlosti se středem S_2.



Obr. 4

Naopak také platí: Ke každému bodu hranice čtverce $EFGH$ najdeme (obrácením naznačeného postupu) odpovídající trojúhelník KLM splňující podmínky úlohy.

Závěr: Množinou těžišť všech rovnostranných trojúhelníků KLM vepsaných do daného čtverce $ABCD$ tak, že všechny tři vrcholy každého z těchto rovnostranných trojúhelníků leží na hranici daného čtverce, je hranice čtverce $EFGH$, viz obr. 4.

Literatura

[1] *Chehlarova, T.*: Virtualen uchilishten kabinet po matematika. Dostupné z https://cabinet.bg/content/bg/html/d18313.html