Trojúhelníky vepsané do daného trojúhelníku

MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem našeho příspěvku je zkoumání některých extrémálních vlastností trojúhelníků vepsaných do daného trojúhelníku, které se týkají především jejich obsahů a obvodů.

Definice

Nechť K, L, M jsou vnitřní body po řadě stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Trojúhelník KLM budeme nazývat *trojúhelníkem vepsaným* danému trojúhelníku ABC.

Je zřejmé, že pro daný trojúhelník ABC existuje nekonečně mnoho trojúhelníků jemu vepsaných – ve smyslu předchozí definice.

Strany vepsaného trojúhelníku KLM dělí daný trojúhelník ABC na čtyři menší trojúhelníky AML, BKM, CLK a KLM, viz např. obr. 1. Pokud K, L, M jsou speciálně po řadě středy stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC, jsou strany trojúhelníku KLM středními příčkami daného trojúhelníku ABC a vepsaný trojúhelník KLM je *příčkovým trojúhelníkem* trojúhelníku ABC. Všechny čtyři menší trojúhelníky AML, BKM, CLK, KLM jsou v tomto případě (s jistým pořadím svých vrcholů) shodné, a přitom obsah (obvod) každého z nich je roven jedné čtvrtině obsahu (jedné polovině obvodu) daného trojúhelníku ABC.

Odtud bezprostředně plyne, že pro libovolný trojúhelník KLM, který je vepsán danému trojúhelníku ABC, je obsah aspoň jednoho z trojúhelníků AML, BKM, CLK, KLM menší nebo roven jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC a také, že obsah aspoň jednoho z těchto čtyř trojúhelníků je větší nebo roven jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.

Speciálně pak platí následující tvrzení:

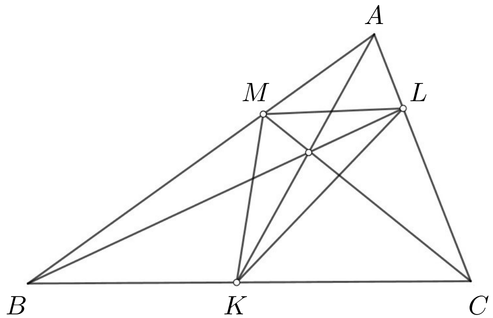
Věta

Nechť K, L, M jsou po řadě takové vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC, že přímky AK, BL a CM se protínají v jednom společném bodě. Pak trojúhelník KLM (vepsaný trojúhelníku ABC) má obsah S_{KLM}, který není větší než jedna čtvrtina obsahu S trojúhelníku ABC, tj. platí

$$S_{KLM} \leq \frac{1}{4}S.$$

Rovnost přitom nastane, právě když body K, L, M jsou středy odpovídajících stran, tj. právě když jsou úsečky AK, BL a CM těžnicemi daného trojúhelníku.

Důkaz. Ukážeme, že pro každý trojúhelník KLM vyhovující předpokladům věty (obr. 1) je součet obsahů trojúhelníků AML, BKM, CLK větší nebo roven třem čtvrtinám obsahu trojúhelníku ABC, což je ekvivalentní s daným tvrzením.



Obr. 1

Označme

$$x = \frac{|AM|}{|AB|}, \quad y = \frac{|BK|}{|BC|}, \quad z = \frac{|CL|}{|AC|},$$

a tedy

$$1 - x = \frac{|MB|}{|AB|}, \quad 1 - y = \frac{|KC|}{|BC|}, \quad 1 - z = \frac{|LA|}{|AC|}.$$

Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem α, β, γ. Pro obsah S_{AML} trojúhelníku AML pak (s ohledem na zavedené označení) platí

$$S_{AML} = \frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |AL| \cdot \sin\alpha = \\ = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot x \cdot |AC| \cdot (1-z) \cdot \sin\alpha = x(1-z)S.$$

Analogicky pro obsahy trojúhelníků BKM, CLK platí

$$S_{BKM} = \frac{1}{2} \cdot |BK| \cdot |BM| \cdot \sin\beta = y(1-x)S,$$

$$S_{CLK} = \frac{1}{2} \cdot |CL| \cdot |CK| \cdot \sin\gamma = z(1-y)S.$$

Odtud plyne

$$x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) = \frac{S_{AML} + S_{BKM} + S_{CLK}}{S}.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$V = x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) \geq \frac{3}{4}.$$

Užitím Cèvovy věty, viz např. [4], pro úsečky (cèviány) AK, BL a CM v trojúhelníku ABC obdržíme po snadné úpravě

$$1 = \frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y} \cdot \frac{z}{1-z},$$

a tudíž

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z). \tag{1}$$

Odtud dále plyne

$$(xyz)^2 = x(1-x)y(1-y)z(1-z). \tag{2}$$

Roznásobením součinu na pravé straně (1) a následné úpravě této rovnosti obdržíme

$$1 - V = 2xyz.$$

Pro všechna reálná čísla x, y, z jsou splněny nerovnosti

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \qquad y(1-y) \leq \frac{1}{4}, \qquad z(1-z) \leq \frac{1}{4}, \tag{3}$$

přičemž rovnosti v nich současně nastanou, právě když platí

$$x = y = z = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

tj. právě když K, L, M jsou po řadě středy stran BC, CA, AB. Využitím všech tří nerovností (3) na pravé straně rovnosti (2) obdržíme

$$(xyz)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

odkud bezprostředně plyne $2xyz \leq 1/4$. Platí tedy

$$V = 1 - 2xyz \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \tag{5}$$

což jsme chtěli dokázat.

Rovnost v (5) nastane, právě když platí rovnosti (4), tj. právě když uvažované cèviány jsou těžnicemi v trojúhelníku ABC.

Poznámka. S ohledem na právě dokázanou větu vidíme, že stejné tvrzení lze vyslovit, pokud body K, L, M jsou speciálně např. průsečíky os vnitřních úhlů v daném trojúhelníku ABC s protějšími stranami nebo jsou-li tyto body totožné s dotykovými body kružnice vepsané danému trojúhelníku ležícími na příslušných stranách tohoto trojúhelníku. V obou těchto případech se totiž úsečky AK, BL, CM protínají podle Cèvovy věty, viz např. [4], v jednom společném bodě (uvnitř trojúhelníku ABC), a jsou tak splněny předpoklady výše uvedené věty.

S podobnou tematikou (trojúhelníky vepsané do daného trojúhelníku) se mohli setkat soutěžící již v 8. ročníku Mezinárodní matematické olympiády (IMO), která se konala v roce 1966 v Bulharsku. Tehdy byla reprezentantům zúčastněných zemí předložena také následující úloha.

Příklad 1

Nechť K, L, M jsou po řadě libovolné vnitřní body stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků AML, BKM, CLK je menší nebo roven jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC.

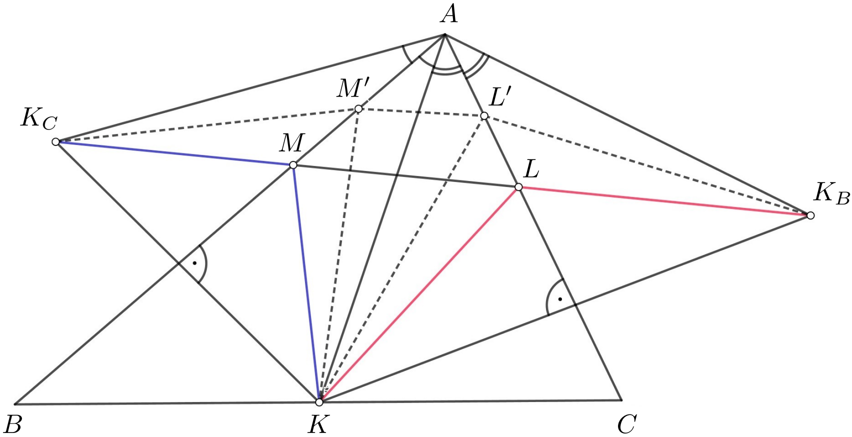
Řešení této úlohy je možno dohledat např. v publikaci [1], popř. v brožurce XV. ročník MO (1965/1966).

V další části uvádíme dva zajímavé výsledky, které se týkají obvodu trojúhelníku KLM vepsaného do daného trojúhelníku ABC, resp. obvodů tří menších trojúhelníků AML, BKM, CLK.

Příklad 2

Je dán *ostroúhlý* trojúhelník ABC. Určete (sestrojte) trojúhelník KLM, který je vepsán do trojúhelníku ABC a má přitom co nejmenší možný obvod.

Řešení. Nechť K je pevně zvolený vnitřní bod strany BC daného trojúhelníku ABC a L, M jsou po řadě vnitřními body jeho stran CA, AB.



Obr. 2

Označme K_B, K_C body, které jsou souměrně sdružené s bodem K po řadě vzhledem k přímkám AC, AB. Pro libovolné vnitřní body L', M' stran po řadě AC, AB (obr. 2) pak s ohledem na použité osové souměrnosti platí

$$|KL'| = |K_BL'|, \quad |KM'| = |K_CM'|, \quad |AK| = |AK_B| = |AK_C|. \tag{6}$$

Pro obvod o trojúhelníku $KL'M'$ vepsaného do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC přitom platí

$$o = |KL'| + |L'M'| + |M'K| = |K_BL'| + |L'M'| + |M'K_C|.$$

Obvod trojúhelníku $KL'M'$ je tedy roven délce lomené čáry $K_BL'M'K_C$. Tato lomená čára má pro pevně zvolený vnitřní bod K strany BC nejmenší délku, a tedy vepsaný trojúhelník KLM má nejmenší obvod, právě když jeho vrcholy L a M jsou vnitřními body úsečky K_BK_C, tj. jsou průsečíky této úsečky po řadě se stranami BC, CA daného trojúhelníku.

Zbývá tak zjistit, pro kterou polohu vnitřního bodu K strany BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC má úsečka K_BK_C minimální délku.

Z obr. 2 je patrné (s ohledem na použité osové souměrnosti s osami AB, AC a také předpokladu o ostroúhlém trojúhelníku ABC), že

$$|\sphericalangle K_BAK_C| = 2\,|\sphericalangle CAB| < 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Odtud vidíme, že pro daný ostroúhlý trojúhelník ABC a libovolný vnitřní bod K jeho strany BC je K_BAK_C rovnoramenný trojúhelník s hlavním úhlem při vrcholu A velikosti $|\sphericalangle CAB|$. Mezi všemi těmito podobnými trojúhelníky má nejkratší základnu K_BK_C ten, který má nejmenší možnou délku obou ramen. Vzhledem k poslední rovnosti v (6) jsou obě ramena nejkratší, právě když je úsečka AK výškou z vrcholu A v daném trojúhelníku ABC (bod K je tak patou výšky z vrcholu A). Podobně L a M jsou po řadě patami výšek z vrcholů B a C v daném ostroúhlém trojúhelníku ABC.

Závěr. Trojúhelník KLM vepsaný do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC, který má nejmenší možný obvod, je jeho *ortický* trojúhelník, tj. trojúhelník, jehož vrcholy K, L, M jsou patami jeho výšek po řadě z vrcholů A, B, C. (Jeho konstrukce je zřejmá.)

Příklad 3

Je dán trojúhelník ABC o obvodu 6 a jemu vepsaný trojúhelník KLM, kde K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AML, BKM, CLK má obvod nejvýše 4.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že všechny tři uvažované trojúhelníky AML, BKM, CLK mají obvod větší než 4. Pro délky stran trojúhelníku AML (obr. 1) tak na základě použití trojúhelníkové nerovnosti platí

$$4 < |AM| + |ML| + |LA| < 2\,(|AM| + |LA|),$$

a tedy

$$2 < |AM| + |LA|.$$

Analogicky platí i nerovnosti

$$2 < |BK| + |MB| \quad \text{a} \quad 2 < |CL| + |KC|.$$

Sečtením posledních tří nerovností dostaneme po snadné úpravě

$$6 = 3 \cdot 2 < (|AM| + |MB|) + (|BK| + |KC|) + (|CL| + |LA|) = \\ = |AB| + |BC| + |CA| = 6,$$

což je spor.

Aspoň jeden z trojúhelníků AML, BKM, CLK má tedy obvod nejvýše 4, což jsme chtěli dokázat.

Závěrem uvádíme pět navazujících úloh, které jsou doplněny stručným návodem k jejich řešení. Lze je využít v rámci procvičení této tématiky.

Příklad 4

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nechť K, L, M jsou průsečíky průměrů kružnice opsané tomuto trojúhelníku, které procházejí jeho vrcholy A, B, C, po řadě se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že obsah trojúhelníku KLM není větší než jedna čtvrtina obsahu trojúhelníku ABC.

[Návod: Tři uvažované průměry se protínají ve středu kružnice opsané danému ostroúhlému trojúhelníku, který je vnitřním bodem tohoto trojúhelníku.]

Příklad 5

Je dáno kladné reálné číslo a. Nechť x, y, z jsou libovolná nezáporná reálná čísla, která jsou nejvýše rovná a. Dokažte, že platí nerovnost

$$x(a - z) + y(a - x) + z(a - y) \leq a^2.$$

Kdy nastane rovnost?

[Návod: Uvažujte rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a a libovolný jemu vepsaný trojúhelník KLM, kde K, L, M jsou po řadě body jeho stran BC, CA, AB, které (zde) mohou být totožné s vrcholy trojúhelníku ABC. Položte

$$0 \leq x = |AM| \leq a, \quad 0 \leq y = |BK| \leq a, \quad 0 \leq z = |CL| \leq a.$$

Je zřejmé, že součet obsahů tří menších trojúhelníků při vrcholech trojúhelníku ABC je pak nejvýše roven obsahu trojúhelníku ABC.

Rovnost zde nastane (s ohledem na použitou metodu), právě když z hodnot x, y, z je aspoň jedna rovna 0 a současně aspoň jedna z těchto hodnot je rovna a.]

Poznámka. Důkaz dané nerovnosti lze vést také ryze algebraickou cestou (se stejným výsledkem pro rovnost).

Příklad 6

Danému ostroúhlému trojúhelníku ABC je vepsán trojúhelník KLM tak, že jeho vrcholy dělí hranici trojúhelníku ABC na tři části, které mají stejnou délku. Dokažte, že obvod trojúhelníku KLM není menší než jedna polovina obvodu trojúhelníku ABC.

[Návod: viz např. [2] – tzv. *Zirakzadehova nerovnost*, která platí pro libovolný trojúhelník ABC a jemu vepsaný trojúhelník KLM splňující předpoklady uvedené v příkladu 6.]

Příklad 7

Nechť KLM je ortický trojúhelník libovolného ostroúhlého trojúhelníku ABC. Dokažte, že obsah trojúhelníku KLM není větší než jedna čtvrtina obsahu trojúhelníku ABC.

Příklad 8

Nechť K, L, M jsou po dotykové body kružnic vně připsaných po řadě stranám BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že obsah trojúhelníku KLM není větší než jedna čtvrtina obsahu trojúhelníku ABC.

[Návod: dokažte, že v obou úlohách se úsečky AK, BL a CM protínají v jednom společném bodě (v prvním případě se jedná o ortocentrum trojúhelníku ABC, ve druhém případě se jedná o tzv. Nagelův bod trojúhelníku ABC), viz např. [4].]

Literatura

[1] *Horák, K., Müller, V., Vrba, A.*: Úlohy mezinárodních matematických olympiád (1.–25. MMO). SPN, Praha, 1986.

[2] *Leng, G., Liu, Y.*: Geometric inequalities. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2016.

[3] *Niven, I.*: Maxima and Minima Without Calculus. The Mathematical Association of America, Washington DC, 1981.

[4] *Švrček, J., Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.