Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2023 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 281

Nechť d_k značí počet jednomístných dělitelů libovolného přirozeného čísla k.

a) Dokažte, že pro každé kladné celé čislo n platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots + d_{n+20}}{20} < 3.$$

b) Dokažte, že existuje kladné celé číslo n, pro které platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \ldots + d_{n+19}}{19} > 3.$$

Josef Tkadlec

Úloha 282

Je dán tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme P průsečík kolmice z vrcholu A k přímce CD s přímkou BD. Dokažte, že body P a B mají od vrcholu A stejnou vzdálenost.

Vojtěch Zlámal

Dále uvádíme řešení úloh 277 a 278, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle letošního (31.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 277

K danému celému číslu $D > 1$ určíme celé číslo $n > 1$ tak, aby platilo

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) < D \leq 1 + 2 + \ldots + n.$$

Rozhodněte, zda pak lze z libovolné n-prvkové množiny po sobě jdoucích celých čísel vybrat neprázdnou podmnožinu prvků s takovým součtem, který je dělitelný číslem D.

Jaromír Šimša

Vzhledem k tomu, že redakce neobdržela žádné úplné *řešení* této úlohy, necháváme tento problém pro čtenáře nadále otevřený. Svá řešení můžete dodatečně zaslat do redakce MFI ve stejném termínu jako řešení úloh 281 a 282.

Úloha 278

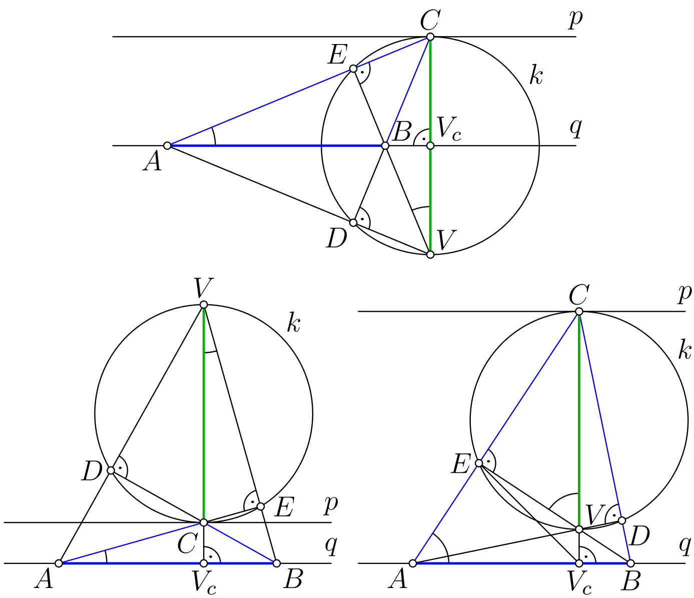
Jsou dány dvě rovnoběžné přímky p a q. Na přímce p je dán bod C a na přímce q uvažujme úsečku AB dané délky d. V trojúhelníku ABC označme D, E po řadě paty výšek z vrcholů A, B.

a) Dokažte, že přímka p je tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDE.

b) Sestrojte úsečku AB tak, aby kružnice opsaná trojúhelníku CDE měla průměr d.

Ján Mazák

Řešení. Označme dále V_c patu výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Pokud je trojúhelník tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholech A nebo B, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že tupý úhel je při vrcholu B, protože jinak nám stačí zaměnit A s B a D s E, viz obrázek nahoře. Pokud je tupý úhel u vrcholu C, viz obrázek vlevo dole, pokud jsou všechny úhly trojúhelníku ABC ostré, viz obrázek vpravo dole.



Úhly CEV a CDV jsou pravé, podle Thaletovy věty tak je CV průměrem kružnice k opsané trojúhelníku CDE. Úsečka CV leží na výšce trojúhelníku ABC ke straně AB. Je tak k ní kolmá, tedy je kolmá i na přímku q a s ní rovnoběžnou přímku p. Přímka p procházející bodem C je tak kolmá na průměr CV kružnice k opsané trojúhelníku CDE a je tedy její tečnou, což jsme měli dokázat v části a).

Trojúhelníky CEV a CV_cA se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu C a pravých úhlech při vrcholech E a V_c, jsou tedy podobné a mají tak shodný i třetí vnitřní úhel u vrcholů V a A. Ze shodnosti úhlů BAE a CVE plyne, že pravoúhlé trojúhelníky ABE a VCE s pravými úhly u vrcholu E jsou podobné. Pokud je průměr $|CV|$ kružnice k roven $d = |AB|$, jsou trojúhelníky ABE a VCE shodné, platí tak $|EB| = |EC|$ a pravoúhlý trojúhelník BCE s pravým úhlem při vrcholu E je rovnoramenný. Naopak, pokud je tento trojúhelník rovnoramenný, jsou trojúhelníky ABE a VCE shodné, tedy $|AB| = |VC|$ a kružnice k tak má poloměr d. Pravoúhlý trojúhelník BCE bude rovnoramenný, právě když velikost jeho vnitřního úhlu BCE bude $45°$, tedy právě když velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C bude $45°$ nebo $135°$ (v závislosti na tom, zda bod E je či není bodem úsečky AC).

Odtud již plyne konstrukce požadované úsečky AB. Na přímce p sestrojíme úsečku $A'B'$ délky d a množinu ℓ bodů, ze kterých je tato úsečka vidět pod úhlem $45°$ nebo $135°$. Tuto množinu tvoří dvě kružnice, jejichž středy jsou zbývající vrcholy čtverce s úhlopříčkou AB. Průsečík ℓ s přímkou q označíme C'. Úsečku AB pak dostaneme posunutím úsečky $A'B'$ podle vektoru $C'C$. Počet řešení úlohy pak závisí na tom, kolik existuje průsečíků množiny ℓ s přímkou p. Tento průsečík buď neexistuje, nebo existují jeden, dva, tři, nebo čtyři průsečíky. Jelikož body A a B můžeme vzájemně zaměnit, existuje tak žádné, 2, 4, 6 nebo 8 řešení dané úlohy. Snadno dopočteme, že

i) pokud vzdálenost přímek p a q je větší než $d(\sqrt{2}+1)/2$, nemá úloha žádné řešení,
ii) pokud je vzdálenost přímek p a q rovna tomuto číslu, má úloha právě dvě řešení,
iii) pokud je vzdálenost přímek p a q mezi čísly $d(\sqrt{2}+1)/2$ a $d(\sqrt{2}-1)/2$, má úloha právě čtyři řešení,
iv) pokud je rovna číslu $d(\sqrt{2}-1)/2$, má úloha šest řešení a
v) pokud je vzdálenost p a q menší než toto číslo, má úloha osm řešení.

Poznámka 1. Nástin jiné konstrukce trojúhelníku ABC. Velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C je $45°$ nebo $135°$, Pravoúhlé trojúhelníky ADC a BEC jsou tak rovnoramenné a velikost aspoň jednoho z uhlů CAV a CBV je $45°$ (zbývající má velikost buď $45°$, nebo $135°$, nebo se jeden z bodů A, B shoduje s bodem V a nemá smysl hovořit o druhém úhlu). Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme obě kružnice k s průměrem CV délky d, které se dotýkají přímky p v bodě C. Sestrojíme množinu bodů, ze kterých je úsečka CV vidět pod úhlem $45°$ (dvakrát dva kružnicové oblouky). Jejich průsečík s přímkou q označíme A nebo B, a druhý z těchto bodů pak bude ležet na přímce p „směrem k CV“ ve vzdálenosti d od prvního.

Poznámka 2. Mnoho řešitelů neprovedlo úplnou diskusi velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC a dospělo většinou k závěru, že velikost vnitřního úhlu trojúhelníku u vrcholu C je jen $45°$. Jejich řešení tak byla hodnocena jako částečná.

Správná řešení zaslali *Anastasia Bredikhina*, *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, všichni z GJK v Praze 6, *Tereza Černá* z G v Praze 9, Litoměřická, *Anna Hronová*, a *Alena Janáčková*, obě z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Erik Ježek* ze SSPŠ a G v Praze 5, *Pavla Sankotová* z G v Plzni, Mikulášské nám. a *Jakub Štepo* z G v Kladně.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Adam Červenka*, *Martin Dufek*, *Štěpán Mikéska*, *Jakub Koňárek*, *Lukáš Kycl*, *Petr Slonek* a *Filip Smíšek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Lenka Poljaková* z GJŠ v Přerově, *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Lukáš Wendzel* z G a SPŠEI ve Frenštátě p. Radhoštěm.

Pavel Calábek