ZPRÁVY

Ústřední kolo 71. ročníku MO kategorie A

Ústřední kolo 71. ročníku Matematické olympiády kategorie A po dvou odkladech způsobených kovidovou pandemií uspořádala krajská komise MO Ústeckého kraje v Teplicích za velké podpory vedení místního gymnázia. Všichni soutěžící, členové Ústřední komise komise MO a pozvaní hosté byli ubytováni v hotelu Panorama, v jehož dvou větších místnostech také soutěž proběhla. Slavnostní zahájení ústředního kola se uskutečnilo v neděli 20. března v neorenesanční aule Gymnázia Teplice. Soutěžící a hosty přivítal ředitel gymnázia *RNDr. Zdeněk Bergman*, radní Ústeckého kraje *Ing. Jindra Zalabáková*, předsedkyně Jednoty českých matematiků a fyziků *doc. RNDr. Alena Šolcová*, zástupce ředitele Matematického ústavu AV ČR *doc. Dr. Ing. Miroslav Rozložník, DSc.*, děkan Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze *doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.* a předseda České matematické společnosti *prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.* Po úvodních projevech následovala tradičně skvělá, motivační přednáška *doc RNDr. Jaromíra Šimši, CSc.*

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti v ústředním kole 50 nejlepších účastníků, mezi kterými bylo 14 dívek. Soutěže se však zúčastnilo pouze 49 nejúspěšnějších řešitelů. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny, 21. a 22. 3. 2022, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy Ústřední komise MO pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali soutěžící i členové ústřední komise MO společnou procházku centrem Teplic. Poté následovala exkurze v místní botanické zahradě a po večeři koncert barokního orchestru teplické konzervatoře v kapli Neposkvrněného početí Panny Marie místního gymnázia vyzdobené v beuronském stylu. Druhý den to pak byl společný výlet do hornického města Krupka spojeném s prohlídkou štoly Svatý Martin a po večeři proběhl program v teplické hvězdárně.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům III. kola MO se uskutečnilo ve středu 23. března dopoledne opět v Beuronské kapli. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů, především pak řediteli Gymnázia Teplice a předsedkyni krajské komise MO v Ústeckém kraji *Mgr. Pavle Hofmanové*, za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Podle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno deset vítězů ústředního kola, z nichž *Tomáš Flídr* z G v Kojetíně jako jediný zcela vyřešil poslední úlohu a získal tak plný počet 42 bodů. Dále bylo oceněno třináct úspěšných řešitelů. Podrobné výsledky 71. ročníku Matematické olympiády najdete na stránkách http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly/71-rocnik-21-22. Tam také najdete vzorová řešení soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme.

21. března 2022

1. Na papíře je v řadě vedle sebe napsáno 71 nenulových reálných čísel. Platí, že každé číslo kromě prvního a posledního je o jedna menší než součin jeho dvou sousedů. Dokažte, že první a poslední číslo se rovnají.

(*Josef Tkadlec*)

2. Řekneme, že kladné celé číslo k je *spravedlivé*, pokud počet 2021místných palindromů, které jsou násobky k, je stejný jako počet 2022místných palindromů, které jsou násobky k. Obsahuje množina $M = \{1, 2, \ldots, 35\}$ více těch čísel, která jsou spravedlivá, nebo těch, která spravedlivá nejsou? (Palindromem nazýváme přirozené číslo, jehož dekadický zápis se čte zleva doprava stejně jako zprava doleva.)

(*David Hruška, Josef Tkadlec*)

3. V ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme M střed strany BC a N střed oblouku BAC jeho kružnice opsané. Dále označme ω kružnici s průměrem BC a D, E průsečíky ω s osou úhlu BAC. Body D', E' leží na kružnici ω tak, že čtyřúhelník $DED'E'$ je pravoúhelník. Dokažte, že body D', E', M, N leží na jedné kružnici.

(*Patrik Bak*)

22. března 2022

4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a O_1, O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABP a CDP. Dokažte, že čtyřúhelník O_1BCO_2 je rovnoběžník.

(*Patrik Bak*)

5. Najděte všechna celá čísla n, pro která je číslo

$$2^n + n^2$$

druhou mocninou nějakého celého čísla.

(*Tomáš Jurík*)

6. Při pokusu o kolonizaci Marsu zaplavilo lidstvo sluneční soustavu 50 satelity, které mezi sebou vytvořily 225 komunikačních linií (každá linie existuje mezi jednou dvojicí satelitů a žádné dva satelity mezi sebou nemají více než jednu linii). Řekneme, že trojice satelitů je *propojená*, pokud aspoň jeden z nich má vytvořené komunikační linie s oběma ostatními satelity. Určete nejmenší a největší možný počet propojených trojic satelitů. (Pořadí satelitů ve dvojicích ani trojicích nerozlišujeme.)

(*Ján Mazák, Josef Tkadlec*)

Všichni vítězové a vybraní úspěšní řešitelé byli na závěr pozváni na výběrové soustředění, které proběhlo v Kostelci na Černými lesy v dubnu 2022, po němž bylo rozhodnuto o složení českých družstev pro 63. mezinárodní matematickou olympiádu a 16. středoevropskou matematickou olympiádu konaných v červenci a srpnu letošního roku.

Pavel Calábek