Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 277 a 278 zašlete nejpozději do 30. září 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 277

K danému celému číslu $D > 1$ určíme celé číslo $n > 1$ tak, aby platilo

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) < D \leq 1 + 2 + \ldots + n.$$

Rozhodněte, zda pak lze z libovolné n-prvkové množiny po sobě jdoucích celých čísel vybrat neprázdnou podmnožinu prvků s takovým součtem, který je dělitelný číslem D.

Jaromír Šimša

Úloha 278

Jsou dány dvě rovnoběžné přímky p a q. Na přímce p je dán bod C a na přímce q uvažujme úsečku AB dané délky d. V trojúhelníku ABC označme D, E po řadě paty výšek z vrcholů A, B.

a) Dokažte, že přímka p je tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDE.

b) Sestrojte úsečku AB tak, aby kružnice opsaná trojúhelníku CDE měla průměr d.

Ján Mazák

Dále uvádíme řešení úloh 273 a 274, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (30.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 273

Určete všechny mnohočleny $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že pro všechna přirozená čísla a, b je číslo $P(a) + P(b)$ dělitelné číslem $a + b$.

Ján Mazák

Řešení. Mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0,$$

kde koeficienty c_k $(k = 0, \ldots, n)$ jsou celá čísla. Protože pro libovolné přirozené číslo k a reálná čísla a, b (zde speciálně celá čísla) platí

$$a^k - b^k = (a-b)\big(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1}\big),$$

plyne odtud pro navzájem různá celá čísla a, b vztah $(a-b) \mid (P(a)-P(b))$. Odtud však také plyne $a+b = (a-(-b)) \mid (P(a)-P(-b))$. Podle zadání platí $(a+b) \mid (P(a)+P(b))$, proto

$$(a+b) \mid \big(\big(P(a)+P(b)\big) - \big(P(a)-P(-b)\big)\big) = P(b)+P(-b).$$

Pro pevně dané přirozené číslo b a libovolné přirozené číslo a nabývá výraz $a+b$ nekonečně mnoha různých hodnot. Tedy celé číslo $P(b)+P(-b)$ je dělitelné nekonečně mnoha různými přirozenými čísly, a to nastane pouze v případě, že pro libovolné přirozené číslo b platí $P(b)+P(-b) = 0$. Existuje tedy nekonečně mnoho hodnot x (jsou jimi všechna nenulová celá čísla), které vyhovují rovnici $P(x)+P(-x) = 0$. Mnohočlen $P(x)+P(-x)$ je tedy nulový, a pro všechna reálná čísla x tak platí $P(-x) = -P(x)$. Tedy $P(x)$ je lichá funkce, což znamená, že $c_k = 0$ pro všechna sudá čísla k (včetně 0). Z druhé strany však pro všechna lichá k platí

$$a^k + b^k = a^k - (-b)^k = (a+b)\big(a^{k-1} - a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1}\big).$$

Odtud vidíme, že pro každý takový mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficienty platí $(a+b) \mid (P(a)+P(b))$.

Zjistili jsme tedy, že zadání vyhovuje každý mnohočlen s celočíselnými koeficienty, který je lichou funkcí.

Správná řešení zaslali *Lenka Poljaková* a *Štěpán Pospíšil*, oba z GJŠ v Přerově. Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Úloha 274

Do dvou krabic rozmístíme n černých a n bílých koulí tak, že každá z nich obsahuje alespoň jednu kouli. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vybereme jednu z krabic a z ní vytáhneme jednu kouli (v každé krabici je vytažení v ní obsažené koule stejně pravděpodobné). Při jakém rozmístění koulí bude pravděpodobnost vytažení bílé koule a) co největší, b) co nejmenší.

Józef Kalinowski (*Kalety*)

Řešení. Označme jako krabici jedna tu (jednu z nich), ve které pro počet k koulí platí $1 \leq k \leq n$, nechť z nich je b bílých, kde $0 \leq b \leq k$. V krabici dvě je pak $2n-k$ koulí, z nich $n-b$ bílých.

Z první krabice vytáhneme bílou kouli s pravděpodobností b/k, ze druhé s pravděpodobností $(n-b)/(2n-k)$. Pravděpodobnost vytažení bílé koule z náhodně vybrané krabice tak je

$$P(b,k) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{k} + \frac{n-b}{2n-k}\right).$$

V případě a) hledáme maximum funkce $P(b,k)$ za podmínek $k \in \{1,\dots,n\}$, $b \in \{0,1,\dots,k\}$. Pro pevné číslo k se na $P(b,k)$ můžeme dívat jako na lineární funkci proměnné b, kterou upravíme na tvar

$$P(b,k) = \frac{n-k}{k(2n-k)} \cdot b + \frac{n}{4n-2k}.$$

Koeficient u b je vzhledem k předpokladům nezáporný, jedná se tak o neklesající funkci proměnné b, která na množině $\{1,2,\dots,k\}$ nabývá svého maxima $P(k,k)$ pro $b=k$. Platí tak

$$P(b,k) \le P(k,k) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k} + \frac{2n-k-n}{2n-k}\right) = 1 - \frac{n}{4n-2k}.$$

Funkce proměnné k na pravé straně této nerovnosti je na množině $\{1,\dots,n\}$ zřejmě klesající, nabývá tak své největší hodnoty $P(1,1)$ pro $k=1$. Dokázali jsme, že platí

$$P(b,k) \le P(k,k) \le P(1,1) = 1 - \frac{n}{4n-2} = \frac{3n-2}{4n-2}.$$

Pravděpodobnost vytažení bílé koule tak bude největší, když v jedné krabici bude jedna bílá koule a ve druhé krabici budou všechny zbývající koule.

Protože při každém pokusu vytáhneme některou kouli, bude pravděpodobnost vytažení bílé koule nejmenší, když bude pravděpodobnost vytažení černé koule největší. Podle předcházejícího odstavce to bude v případě, když v jedné krabici bude jedna černá koule a ve druhé krabici budou koule zbývající. Pravděpodobnost vytažení bílé koule je v tomto případě $n/(4n-2)$.

Poznámka. Protože pro libovolné přirozené n platí

$$\frac{n}{4n-2} > \frac{1}{4} \quad \text{a} \quad \frac{3n-2}{4n-2} < \frac{3}{4},$$

zjistili jsme, že pro libovolné rozmístění koulí v krabicích bude pravděpodobnost vytažení koule dané barvy číslo z otevřeného intervalu $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Jáchym Kouba*, *Jindřich Kukla*, *Lucian Poljak* a *Lenka Poljaková*, všichni z GJŠ v Přerově.

Pavel Calábek