Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 275 a 276 můžete zaslat nejpozději do 31. 6. 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 275

Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 60 a bod P strany AB ve vzdálenosti 40 od bodu A. Paprsek z bodu P se od strany BC odrazil v bodě Q a po odrazu od strany CA dopadl opět do bodu P. Určete vzdálenost bodů B a Q.

Pavel Calábek

Úloha 276

Určete počet všech čtyřmístných čísel, v nichž je součet posledních tří číslic roven trojnásobku součtu prvních tří číslic.

Jaroslav Zhouf

Dále uvádíme řešení úloh 271 a 272, jejichž zadání jsme zveřejnili v třetím čísle loňského (30.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 271

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž nabývá výraz

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

celočíselných hodnot.

Jaroslav Švrček

Řešení. Pro všechna přirozená čísla a, b platí

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{(a + b)^2 - ab}{a + b} = a + b - \frac{ab}{a + b}.$$

Daný výraz tak nabývá celočíselné hodnoty, právě když jí nabývá výraz

$$V = \frac{ab}{a + b}.$$

Předpokládejme, že pro dvojici čísel a a b je nabývá výraz V celočíselné hodnoty. Označme d největšího společného dělitele čísel a a b. Potom existují taková nesoudělná přirozená čísla u, v, pro která platí $a = du$, $b = dv$. Po úpravě platí

$$V = \frac{duv}{u+v}.$$

Protože u a v jsou nesoudělná čísla, jsou nesoudělná i s číslem $u+v$. Číslo V je tedy celé, právě když $u+v$ bude dělitelem čísla d, tedy právě když bude existovat takové přirozené číslo k, že

$$d = k(u+v).$$

Všechny dvojice přirozených čísel, pro něž daný výraz nabývá celočíselné hodnoty, tak jsou

$$(a, b) = (k(u+v)u, k(u+v)v)\,,$$

kde k, u, v jsou libovolná přirozená čísla, přičemž u a v jsou nesoudělná.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Veronika Borková* z GVM v Novém Městě na Moravě, *Ondrej Dulanský* a *Vendula Onderková*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Flídr* z G v Kojetíně, *Martin Fof* z MG v Opavě, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Adéla Heroudková* a *Anna Hronová*, obě z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Václav Maštera* z GPdC v Táboře, *Samuel Rosiar* a *Michal Janík*, oba z GJK v Praze 6. *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Karolína Zemene* z G a ZUŠ ve Šlapanicích.

Neúplná řešení zaslali *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Jakub Horák* z GML v Brně a *Ladislav Nagy* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova.

Úloha 272

V soutěži pro čtyři účastníky je 10 úkolů ohodnocených postupně jedním až deseti body. Body za každý úkol dostane jen ten, kdo úkol splní jako první. Jakmile jsou všechny úkoly splněny, každý soutěžící si sečte své body a určí se pořadí soutěžících (nejprve dle bodů, při rovnosti bodů rozhoduje o pořadí los). Pepa začíná dříve než ostatní, může si vybrat, které úkoly splní, a chce mít zaručeno, že nebude poslední. Dokažte následující dvě tvrzení:

a) Stačí mu k tomu získat 14 bodů.

b) Stačí mu k tomu získat 13 bodů.

Josef Tkadlec

Řešení.

a) V uvedené soutěži je mezi čtyři účastníky rozděleno celkem 55 bodů ($1 + 2 + \ldots + 10 = 55$). Získá-li Pepa 14 bodů, pak bude mezi zbývající tři účastníky rozděleno 41 bodů. Bude tedy existovat účastník, který získá nejvýše $\lfloor 41/3 \rfloor = 13$ bodů, což je méně než získá Pepa, který tak nebude poslední.

b) Předpokládejme, že si Pepa vybere úlohy za 1, 3, 4 a 5 bodů, celkem tedy za 13 bodů. Potom soupeřům zbude 6 úloh za 2, 6, 7, 8, 9 a 10 bodů. Mohou nastat 2 případy:

(i) buď existuje soupeř, který vyřeší nejvýše jednu úlohu. Potom za ni získá nejvýše 10 bodů, nebo

(ii) každý ze soupeřů vyřeší 2 úlohy. Potom ten, který vyřeší úlohu za 2 body, může za obě získat nejvýše $2 + 10 = 12$ bodů.

V obou případech jsme našli soupeře, který skončí jistě za Pepou, tedy v případě vhodného výběru úloh Pepovi stačí dokonce 13 bodů.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Veronika Borková* z GVM v Novém Městě na Moravě, *Ondrej Dulanský* a *Vendula Onderková*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Flídr* z G v Kojetíně, *Martin Fof* z MG v Opavě, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jakub Horák* z GML v Brně, *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Anna Hronová* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Václav Maštera* z GPdC v Táboře, *Ladislav Nagy* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova. *Samuel Rosiar* a *Michal Janík*, oba z GJK v Praze 6. *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Karolína Zemene* z G a ZUŠ ve Šlapanicích.

Neúplné řešení zaslali *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců a *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek