Mnohočleny v matematických soutěžích

PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Žáci českých škol se s pojmem mnohočlen[1)] setkávají již v osmém ročníku ZŠ. Na základě znalostí mnohočlenů si žáci osvojují další důležité matematické pojmy, jako je proměnná, funkce, její vlastnosti a graf. Mnohočlen je na středních školách chápán jako funkce, která k vyjádření své funkční hodnoty potřebuje pouze operace sčítání, odčítání a násobení. V dalším textu budeme mnohočlenem (v základním tvaru) rozumět funkci $P(x)$ reálné proměnné x ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kde n je celé nezáporné číslo (stupeň mnohočlenu) a a_0, a_1, …, a_n jsou daná reálná čísla (koeficienty mnohočlenu). Nulový mnohočlen $P(x) = 0$ budeme považovat za speciální případ mnohočlenu, u nenulových mnohočlenů je $a_n \neq 0$.

Pokud mají dva mnohočleny stejné koeficienty, nabývají pro všechna reálná čísla x stejných hodnot. Otázkou je, zda platí také obrácené tvrzení: Nabývají-li dva mnohočleny stejných hodnot, musí mít také stejné koeficienty? Tento problém řeší dvě následující věty, které uvádíme bez důkazu.

Věta 1 (o rovnosti mnohočlenů stupně n) Jestliže dva mnohočleny stupně nejvýše n nabývají stejných hodnot alespoň pro $n + 1$ různých reálných čísel, potom mají stejné koeficienty (a tedy i stejný stupeň).

Věta 2 (o rovnosti mnohočlenů) Jestliže dva mnohočleny nabývají stejných hodnot pro nekonečně mnoho reálných čísel x, potom mají stejné koeficienty (a tedy nabývají stejných hodnot pro všechna reálná čísla).

[1)] Český pojem *mnohočlen* vznikl překladem slova *polynom* vzniklého spojením řecké předpony poly (mnoho) a latinského nomen (jméno), které je užíváno v mnoha světových jazycích i v české odborné literatuře.

V další části předkládáme čtenářům několik úloh o mnohočlenech, které svým obsahem navazují na středoškolské učivo, ovšem při jejich řešení jsou zdůrazněny jiné aspekty než v běžných školských úlohách. Žáci tak hlouběji chápou užívané pojmy a nacházejí mezi nimi pro ně nečekané souvislosti.

Násobení mnohočlenů

Jednou z prvních činností, s níž se žáci ve škole setkávají, je násobení mnohočlenů. Velmi užitečným vztahem je následující identita

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}),$$

která platí pro libovolná reálná čísla a, b a libovolné přirozené číslo n, případně její varianta, kdy uvažujeme n liché a místo čísla b položíme $-b$.

Příklad 1

Dokažte, že mnohočlen

$$P(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}\right)\left(1 - x + x^2 - \ldots + x^{100}\right)$$

má koeficienty u lichých mocnin x rovny 0.

Řešení. Pro všechna reálná čísla čísla x různá od ± 1 platí

$$P(x) = \frac{1 - x^{101}}{1 - x} \cdot \frac{1 + x^{101}}{1 + x} = \frac{1 - x^{202}}{1 - x^2} = \frac{1 - (x^2)^{101}}{1 - x^2} =$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{200}.$$

Protože rovnost

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{100})(1-x+x^2-\ldots+x^{100}) = 1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{200}$$

platí pro nekonečně mnoho reálných čísel x, mnohočleny na levé a pravé straně mají podle věty o rovnosti mnohočlenů stejné koeficienty, tedy uvedená rovnost platí pro všechna reálná čísla x.

Zde vidíme jeden z příkladů užití věty o rovnosti mnohočlenů, ukážeme, že se dva mnohočleny rovnají pro nekonečně mnoho hodnot reálné proměnné x a pak se podle věty o rovnosti mnohočlenů rovnají. Tato úvaha je při práci mnohočleny častá a v dalších příkladech ji budeme provádět implicitně, k rovnosti dvou mnohočlenů nám bude stačit ukázat jejich rovnost v nekonečně mnoha hodnotách reálné proměnné x.

Příklad 2

Nechť k je přirozené číslo. Určete základní tvar mnohočlenu $P(x)$, pro který platí

$$P(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^{k-1}}).$$

Řešení. Pro $x \neq 1$ platí

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(1-x)(1+x)}{1-x}(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^{k-1}}) = \\ &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x}(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^{k-1}}) = \ldots = \\ &= \frac{1-x^{2^k}}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^{2^k-1}. \end{aligned}$$

Obtížnější variantou obou předešlých úloh je následující příklad, kdy zkoumáme součin čtyř trojčlenů. Použitá metoda řešení umožňuje tuto úlohu zobecnit na součin libovolného počtu trojčlenů. Čtenáři, kteří znají komplexní čísla, se mohou pokusit najít jednodušší řešení jejich užitím.

Příklad 3

Určete základní tvar mnohočlenu $P(x)$, pro který platí

$$P(x) = (x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1).$$

Řešení. Pro $x \neq -1$ platí

$$P(x) = \frac{x^3+1}{x+1} \cdot \frac{x^6+1}{x^2+1} \cdot \frac{x^{12}+1}{x^4+1} \cdot \frac{x^{24}+1}{x^8+1}.$$

Stejně jako v předcházejícím příkladě ukážeme

$$(x^3+1)(x^6+1)(x^{12}+1)(x^{24}+1) = \frac{x^{48}-1}{x^3-1},$$

$$(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) = \frac{x^{16}-1}{x-1},$$

je tedy

$$P(x) = \frac{x^{48}-1}{x^3-1} \cdot \frac{x-1}{x^{16}-1} = \frac{x^{48}-1}{x^{16}-1} \cdot \frac{x-1}{x^3-1} = (x^{32}+x^{16}+1) \cdot \frac{x-1}{x^3-1}.$$

Z rovnosti

$$x^{32}+x^{16}+1=\big((x^{32}-x^{29})+(x^{29}-x^{26})+\ldots+\\+(x^5-x^2)+x^2\big)+\big((x^{16}-x^{13})+(x^{13}-x^{10})+\ldots+(x^4-x)+x\big)+1$$

konečně plyne

$$\begin{aligned}P(x)&=\big((x^{29}+x^{26}+\ldots+x^2)+(x^{13}+x^{10}+\ldots+x)\big)(x-1)+1=\\&=x^{30}-x^{29}+x^{27}-x^{26}+\ldots+x^{18}-x^{17}+x^{15}-\\&\quad-x^{13}+x^{12}-x^{10}+x^9-\ldots-x^4+x^3-x+1.\end{aligned}$$

Příklad 4

Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou libovolné dva mnohočleny stupně n. Potom mnohočlen $P^2(x)-Q^2(x)$ je buď nulový mnohočlen, nebo mnohočlen stupně alespoň n.

Řešení. Platí

$$P^2(x)-Q^2(x)=\big(P(x)-Q(x)\big)\big(P(x)+Q(x)\big).$$

Pokud je jeden z mnohočlenů $P(x)-Q(x)$, $P(x)+Q(x)$ nulový, je mnohočlen $P^2(x)-Q^2(x)$ nulový, jinak tyto mnohočleny mají stupeň alespoň 0 a jeden z nich má stupeň n, tedy stupeň mnohočlenu $P^2(x)-Q^2(x)$ je alespoň $n+0=n$.

Příklad 5

Určete všechny mnohočleny $P(x)$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$P(x^2)=P^2(x).$$

Řešení. Nulový mnohočlen má požadovanou vlastnost. Uvažujme dále nenulové mnohočleny $P(x)$, které mají stupeň $n\geq 0$, a lze je tudíž zapsat ve tvaru

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

kde a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ jsou reálné koeficienty a $a_n\neq 0$. Potom

$$P(x^2)=a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\ldots+a_1x^2+a_0,$$

$$P^2(x)=a_n^2x^{2n}+2a_na_{n-1}x^{2n-1}+(a_{n-1}^2+2a_na_{n-2})x^{2n-2}+\ldots+a_0^2.$$

Přitom neuvedené členy v těchto mnohočlenech obsahují x v mocnině nejvýše $2n-3$. Dva mnohočleny jsou si rovny, pokud mají stejné koeficienty. Pro koeficient u x^{2n} tak platí $a_n = a_n^2$, vzhledem k podmínce $a_n \neq 0$ tak platí $a_n = 1$. Pro koeficienty u x^{2n-1} platí $0 = 2a_n a_{n-1}$, tedy nutně $a_{n-1} = 0$. Pro koeficienty u x^{2n-1} platí $a_{n-1} = a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}$, vzhledem k $a_n = 1$ a $a_{n-1} = 0$ odtud dostaneme $a_{n-2} = 0$. Položme si nyní otázku: Musí být i následující koeficient a_{n-3} roven 0? To bychom mohli zjistit buď porovnáním koeficientů u x^{2n-3} nebo následujícím postupem.

Předpokládejme, že mnohočlen $P(x)$ má kromě $a_n = 1$ i jiný nenulový koeficient. Potom lze $P(x)$ zapsat ve tvaru

$$P(x) = x^n + a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kde $k < n$ je přirozené číslo a $a_k \neq 0$. Potom

$$P(x^2) = x^{2n} + a_k x^{2k} + \ldots + a_0, \tag{1}$$

$$P^2(x) = x^{2n} + 2a_k x^{n+k} + \ldots + a_0^2. \tag{2}$$

Přitom členy v mnohočlenu (1) obsahují x v mocnině nejvýše $2k-1$ (s výjimkou x^{2n}) a v mnohočlenu (2) nejvýše v mocnině $n+k-1$. Vidíme, že koeficienty u x^{2n} jsou stejné, nejvyšší nenulový koeficient je pak u členu x^{n+k}, protože $2k < n+k$, porovnáním koeficientů u něj dostaneme $2a_k = 0$. To je ovšem ve sporu s podmínkou $a_k \neq 0$, tedy mnohočlen $P(x)$ neobsahuje jiný nenulový koeficient kromě koeficientu $a_n = 1$. Jak snadno ověříme zkouškou, danému vztahu vyhovuje buď nulový mnohočlen, nebo mnohočlen $P(x) = x^n$, kde n je libovolné nezáporné číslo.

Příklad 6

Najděte všechny mnohočleny $P(x)$, které pro všechna reálná čísla x, y splňují

$$P^2(x) - P^2(y) = P(x+y)P(x-y).$$

Řešení. Nulový mnohočlen zřejmě dané rovnici vyhovuje. Dále tedy hledáme nenulové mnohočleny, které rovnici vyhovují. Nechť

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

je (pro $a_n \neq 0$) takový mnohočlen. Dále uvažujme libovolné reálné číslo t, položme $x = 2t$, $y = t$, platí tak

$$P^2(2t) - P^2(t) = P(3t)P(t).$$

Všechny mnohočleny $P(t)$, $P(2t)$ i $P(3t)$ mají stupeň n, jedná se tak o rovnost mezi dvěma mnohočleny stupně $2n$, porovnáním jejich koeficientů u x^{2n} dostaneme

$$2^{2n}a_n^2 - a_n^2 = 3^n a_n \cdot a_n.$$

Po vydělení nenulovým číslem a_n^2 zjistíme, že

$$2^{2n} - 1 = 3^n.$$

Úpravou této rovnice dostáváme

$$1 = 2^{2n} - 3^n = 4^n - 3^n = (4-3)(4^{n-1} + 4^{n-2} \cdot 3 + \ldots + 3^{n-1}),$$

odkud snadno vidíme, že tato rovnice má jediné řešení $n = 1$. Nenulový mnohočlen vyhovující danému vztahu tak nutně musí mít stupeň 1 a platí $P(x) = a_1x + a_0$. Dosazením do daného vztahu dostáváme

$$P^2(x) - P^2(y) = a_1^2(x^2 - y^2) + 2a_1a_0(x - y),$$
$$P(x+y)P(x-y) = a_1^2(x^2 - y^2) + 2a_1a_0x + a_0^2.$$

Proto $a_0 = 0$ a a_1 je libovolné reálné číslo. Tímto dosazením jsme současně provedli zkoušku, proto všechny nenulové mnohočleny, které danému vztahu vyhovují, mají tvar $P(x) = a_1x$, kde a_1 je libovolné nenulové reálné číslo a všechny vyhovují mnohočleny dostaneme tak, že připustíme také $a_1 = 0$.

Dělení mnohočlenů, kořenoví činitelé

Další operací s mnohočleny, s níž se žáci setkávají, je dělení mnohočlenu mnohočlenem. Je známo, že podíl i zbytek při dělení mnohočlenů jsou jednoznačně určeny a stupeň zbytku je menší než stupeň dělitele. S dělením mnohočlenů je úzce spjat i pojem kořenového činitele. Mnohočlen $P(x)$ je dělitelný kořenovým činitelem $x - a$ beze zbytku, tj. algebraická rovnice $P(x) = 0$ má reálný kořen $x = a$.

Příklad 7

Jaké podmínky musí splňovat reálné koeficienty a_i a b_i $(i = 1, 2, 3)$, aby mnohočlen $(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2$ byl druhou mocninou lineárního mnohočlenu?

Řešení. Daný mnohočlen bude druhou mocninou lineárního mnohočlenu, právě když lze zapsat ve tvaru $Q(x) = (ax + b)^2$, kde $a \neq 0$ a b jsou reálné koeficienty. Z rovnosti mnohočlenů plyne, že se musí rovnat ve všech hodnotách, tedy i v čísle $x = -k = -b/a$. Potom $Q(-k) = 0$, musí tak platit

$$(-a_1k + b_1)^2 + (-a_2k + b_2)^2 + (-a_3k + b_3)^2 = 0,$$

tedy $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$ a $b_3 = ka_3$. Pokud je výsledný polynom druhou mocninou lineárního mnohočlenu, má stupeň alespoň 2, tedy alespoň jeden z koeficientů a_i je nenulový. Ukážeme, že je to zároveň postačující podmínka, provedeme tedy zkoušku. Předpokládejme, že existuje reálné číslo k tak, že pro reálná čísla a_i a b_i platí $b_i = ka_i$, přičemž alespoň jedno z čísel a_i je nenulové, potom

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2 =$$
$$= (a_1x + ka_1)^2 + (a_2x + ka_2)^2 + (a_3x + ka_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(x + k)^2,$$

což je druhou mocninou lineárního mnohočlenu

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\, x + k\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Příklad 8

Najděte zbytek po dělení mnohočlenu $x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ mnohočlenem

a) $x - 1$, b) $x^2 - 1$.

Řešení. a) Mnohočlen $x - 1$ je lineární, zbytek po dělení tak bude konstantní mnohočlen, řekněme a. Dále existuje takový mnohočlen $Q(x)$, že

$$x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x - 1) \cdot Q(x) + a.$$

Uvedená rovnost platí pro všechna reálná čísla x, platí tak i pro $x = 1$, proto $6 = a$, tedy hledaný zbytek je 6.

b) Podobně jako v předchozím případě, zbytek je lineární mnohočlen $ax + b$. Dosazením $x = 1$ a $x = -1$ do vztahu pro dělení dostaneme

$$a + b = 6,$$
$$-a + b = -6.$$

Je tedy $b = 0$ a $a = 6$. Zbytek po dělení daného mnohočlenu kvadratickým dvojčlenem $x^2 - 1$ je tedy $6x$.

Příklad 9

Pro která přirozená čísla n je mnohočlen

$$P(x) = x^n + (x-1)^n + (2x-1)^n - (3^n + 2^n + 1)$$

dělitelný mnohočlenem $G(x) = x^2 - x - 2$?

Řešení. Platí $G(x) = (x+1)(x-2)$. Daný mnohočlen $P(x)$ je dělitelný mnohočlenem $G(x)$, právě když má kořeny $x = -1$ a $x = 2$, tedy právě když platí

$$P(-1) = (-1)^n + (-2)^n + (-3)^n - (3^n + 2^n + 1) = 0, \tag{3}$$

$$P(2) = 2^n + 1^n + 3^n - (3^n + 2^n + 1) = 0. \tag{4}$$

Vidíme, že rovnice (4) platí pro všechna celá nezáporná čísla n, kdežto rovnice (3) platí jen pro n sudá. Pro lichá n totiž dostáváme ze vztahu (3)

$$-2 - 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n = 0,$$

kde levá část této rovnice je evidentně záporná. To znamená, že (3) neplatí pro žádné liché číslo n.

Uvedený mnohočlen je dělitelný mnohočlenem $G(x)$ pro všechna sudá celá nezáporná čísla n (tento případ zahrnuje i $n = 0$, kdy se jedná o nulový mnohočlen).

Příklad 10

Určete, pro která reálná a, b a pro které přirozené číslo n je číslo 1 aspoň dvojnásobným kořenem rovnice $x^n - ax^{n-1} + bx - 1 = 0$.

Řešení. Číslo 1 je kořenem dané rovnice, proto $1^n - a \cdot 1^{n-1} + b - 1 = 0$. Odtud nutně $a = b$. Levá strana dané rovnice má tedy tvar

$$x^n - ax^{n-1} + ax - 1 = x^n - 1 - ax(x^{n-2} - 1) =$$
$$(x-1)\bigl(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 - ax(x^{n-3} + x^{n-4} + \ldots + 1)\bigr).$$

Protože číslo 1 je aspoň dvojnásobným kořenem dané rovnice, musí být rovněž kořenem rovnice

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 - ax(x^{n-3} + x^{n-4} + \ldots + 1) = 0,$$

tj. $n - a(n-2) = 0$, a tedy $n \neq 2$ a $b = a = n/(n-2)$.

Pokud čtenář zná pojem derivace mnohočlenu a ví, že k-násobný kořen mnohočlenu je $(k-1)$-násobným kořenem jeho derivace, může předcházející postup zjednodušit.

Příklad 11

Pro která přirozená čísla n je mnohočlen

$$P(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$$

dělitelný mnohočlenem

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n?$$

Řešení. Všimněme si, že pro lichá čísla n má mnohočlen $Q(x)$ kořen -1, přitom toto číslo ovšem není kořenem mnohočlenu $P(x)$, tedy v tomto případě jistě $Q(x)$ nedělí $P(x)$. Naopak, pro sudá čísla n (nyní včetně nuly) platí pro $x \notin \{-1, 1\}$

$$P(x) = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^{n+1} - 1)(x^{n+1} + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = Q(x) \cdot \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1}.$$

Navíc číslo -1 je kořenem mnohočlenu $x^{n+1} + 1$, tedy kořenový činitel $x + 1$ dělí tento mnohočlen, a proto mnohočlen $Q(x)$ dělí mnohočlen $P(x)$.

Rovnost mnohočlenů podruhé

Využitím předcházejících poznatků můžeme nyní snáze řešit některé středoškolské úlohy, viz následující příklady.

Příklad 12

Dokažte, že pro navzájem různá reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Řešení. Uvažujme kvadratickou rovnici

$$\frac{(x-c)(x-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-b)(x-a)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

o neznámé x. Tato rovnice má evidentně tři různé kořeny a, b, c (jak snadno ověříme přímým dosazením). Na pravé i levé straně této rovnice jsou mnohočleny stupně nejvýše 2, které se shodují aspoň ve třech různých reálných hodnotách. Oba mnohočleny jsou tedy shodné a nabývají tak stejných hodnot pro všechna reálná čísla x, tj. platí

$$\frac{(x-c)(x-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-b)(x-a)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Volbou $x = a + b + c$ dostaneme požadovanou rovnost.

Příklad 13

Pro reálná čísla a, b, c platí $c^3 = a^3 + b^3 + 3abc$. Dokažte, že pokud $a \neq b$, je $c = a + b$.

Řešení. Opět se jedná o příklad řešitelný pomocí algebraických úprav. I zde uvedeme řešení užitím mnohočlenů. Snadno ověříme, že mnohočlen

$$P(x) = x^3 - 3abx - a^3 - b^3$$

má reálný kořen $x = a + b$. Po dělení polynomu $P(x)$ kořenovým činitelem $x - (a + b)$ dostaneme

$$P(x) = \big(x - (a+b)\big)\big(x^2 + (a+b)x + (a^2 - ab + b^2)\big).$$

Kvadratická rovnice $x^2 + (a + b)x + (a^2 - ab + b^2) = 0$ má diskriminant

$$D = (a+b)^2 - 4(a^2 - ab + b^2) = -3a^2 + 6ab - 3b^2 = -3(a-b)^2,$$

který je pro $a \neq b$ záporný, a nemá tedy reálné kořeny. Číslo $a + b$ je tak jediným reálným kořenem mnohočlenu $P(x)$. Podle zadání má však mnohočlen $P(x)$ též kořen c. Nutně proto platí $c = a + b$, což jsme chtěli dokázat.

Závěr

Uvedli jsme několik úloh, které nejsou vysloveně školské, těsně však navazují na učivo o mnohočlenech a mohou tak žákům ukázat možnosti jejich dalšího využití.

Navíc některé úlohy mohou sloužit jako propedeutika k dalším oblastem matematiky, které již nejsou obsahem středoškolského kurikula, například ke komplexním číslům (příklady 3, 5, 6, 8), funkcionálním rovnicím (příklady 5 a 6) či derivacím mnohočlenů (příklad 10).