Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pravidelnému pětiúhelníku – na rozdíl od jiných pravidelných n-úhelníků ($n = 3, 4, 6, 8$) – není věnováno ve školské matematice tolik pozornosti. Výjimkou je snad jen popis konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice, nebo o dané délce strany. Zájemce o tuto problematiku lze přitom odkázat např. na [1, 2] nebo [3].

V tomto příspěvku nabízíme čtenářům možnost seznámit se s některými pozoruhodnými vlastnostmi pravidelného pětiúhelníku na bázi řešení pětice zajímavých úloh. Obsah tohoto příspěvku lze mj. využít ve speciálních seminářích z matematiky na gymnáziích nebo při práci s matematicky nadanými žáky.

Příklad 1

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme P, Q po řadě průsečíky úhlopříček AD, BD s úhlopříčkou CE. Určete, v jakém poměru dělí body P, Q úhlopříčku CE.

Řešení. Z důvodu symetrie daného pětiúhelníku podle osy strany AB dělí body P a Q úhlopříčku CE v postupném poměru $x : y : x$, kde $x = |EP| = |CQ|$ a $y = |PQ|$ (obr. 1). Stačí tedy určit hodnotu poměru $x : y$.

Snadno se vidí, že

$$|\sphericalangle DEQ| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle PDQ| = 36^\circ$$

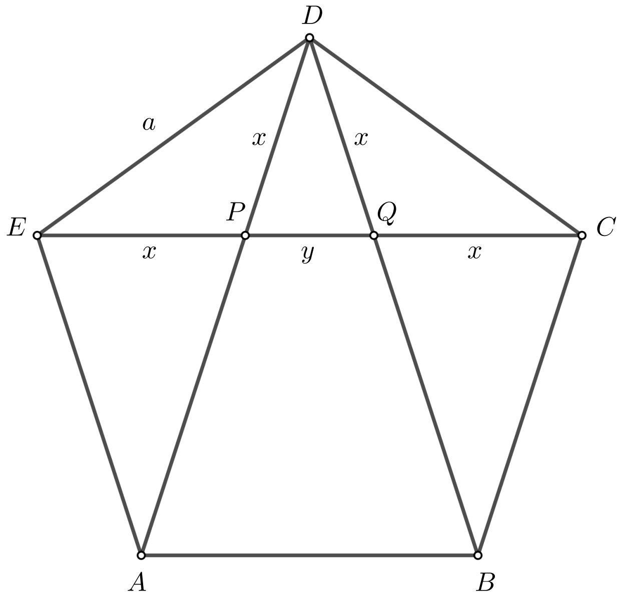
a podobně

$$|\sphericalangle EDQ| = |\sphericalangle EQD| = 72^\circ.$$

Trojúhelník EQD je tedy rovnoramenný se základnou QD, a proto platí $x + y = a$, kde a značí délku strany daného pětiúhelníku. Navíc, přímka DP je osou vnitřního úhlu při vrcholu D v rovnoramenném trojúhelníku EQD ($36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$). Trojúhelníky EQD a DPQ jsou rovnoramenné (podobné) se základnami po řadě QD a PQ. Protože i trojúhelník EPD

je rovnoramenný se základnou DE, platí

$$x = |EP| = |PD| = |DQ|.$$



Obr. 1

Podle věty o ose (vnitřního) úhlu při vrcholu D v trojúhelníku EQD platí

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{x} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Užitím substituce $u = x/y > 0$, tj. $y/x = 1/u$, dostaneme z předešlého vztahu po úpravě kvadratickou rovnici o neznámé u

$$u^2 - u - 1 = 0,$$

která má právě jeden kladný reálný kořen $u = x/y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. [1)]

ZÁVĚR. Pro hledaný postupný poměr tak platí

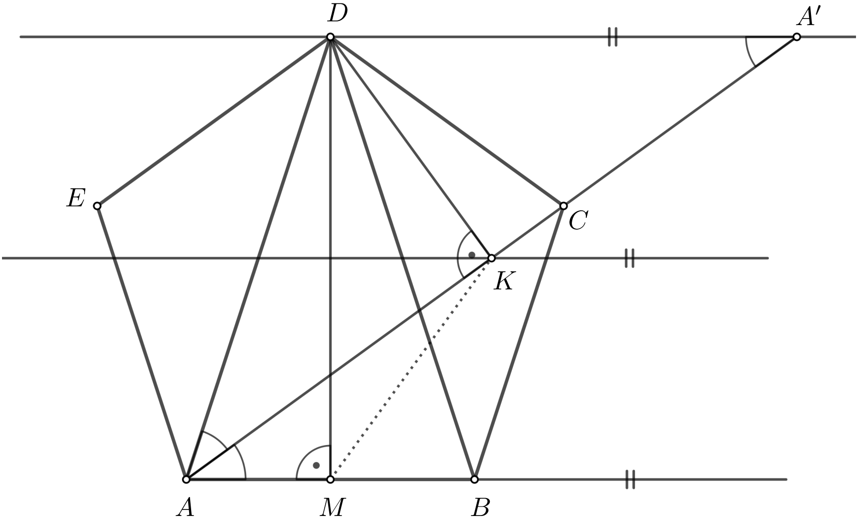
$$x : y : x = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) : 1 : \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

[1)] Bod P tedy dělí úsečku EQ v poměru tzv. *zlatého řezu.*

Příklad 2 (84. Moskevská matematická olympiáda, 2021)

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme M střed strany AB a K průsečík osy úsečky DM s úhlopříčkou AC. Dokažte, že $AK \perp DK$.

Řešení. Uvažujme bod A' souměrně sdružený s vrcholem A vzhledem ke středu K. Protože bod K leží na ose úsečky DM, leží bod A' na rovnoběžce s přímkou AB, která prochází vrcholem D (obr. 2). Střídavé úhly $A'AB$ a $DA'A$ jsou shodné s úhlem DAC, tedy s úhlem DAA'. Trojúhelník $AA'D$ je tudíž rovnoramenný, přičemž bod K je středem jeho základny AA'. Odtud již přímo plyne $AK \perp DK$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 2

Jiné řešení. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $AMKD$. Protože

$$|\sphericalangle DAK| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle KAM|,$$

je tento čtyřúhelník tětivový. Osa vnitřního úhlu při vrcholu A (v různostranném trojúhelníku MDA) se totiž protíná s osou jeho strany MD v bodě (K), který leží na kružnici opsané tomuto trojúhelníku. Pak ale platí $|\sphericalangle AKD| = |\sphericalangle AMD| = 90°$, tj. $AK \perp DK$. Tím je důkaz uzavřen.

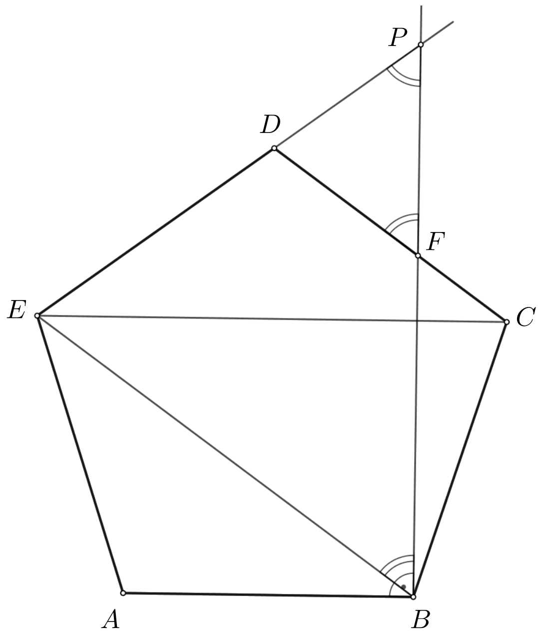
Poznámka. Kružnice opsaná uvažovanému čtyřúhelníku $AMKD$ je tedy Thaletova kružnice o průměru AD.

Příklad 3 (4. Íránská geometrická olympiáda, 2017)

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Nechť F je průsečík kolmice k přímce AB procházející vrcholem B se stranou CD. Dokažte, že platí

$$|ED| + |DF| = |EC|.$$

Řešení. Označme P průsečík přímek BF a DE. Snadným výpočtem zjistíme, že $|\sphericalangle EBP| = 90° - |\sphericalangle ABE| = 90° - 36° = 54°$.



Obr. 3

Analogicky pak $|\sphericalangle PEB| = 2 \cdot 36° = 72°$, a tudíž $|\sphericalangle EPB| = 54°$. Trojúhelník BPE je tedy rovnoramenný se základnou BP.

Protože přímky BE a CD jsou rovnoběžné, jsou EBP a DFP souhlasné (shodné) úhly, pro něž platí $|\sphericalangle EBP| = |\sphericalangle DFP| = 54°$. Odtud plyne, že i trojúhelník FPD je rovnoramenný se základnou FP, platí tedy

$$|EC| = |EB| = |EP| = |ED| + |DP| = |ED| + |DF|,$$

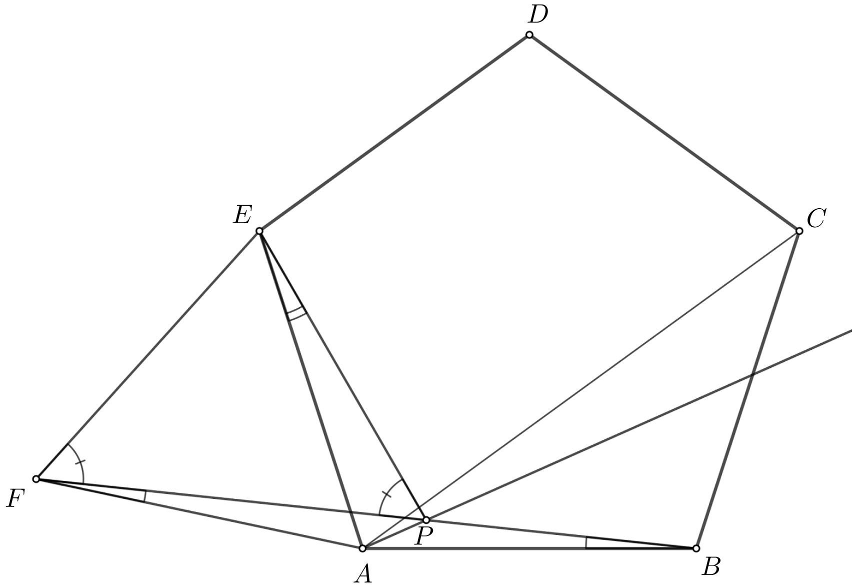
což znamená, že délka lomené čáry EDF je rovna délce úhlopříčky EC. Tím je důkaz ukončen.

Příklad 4 (15. Japonská matematická olympiáda, 2005)

Uvnitř daného pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ je dán bod P takový, že $|\sphericalangle ABP| = 6^\circ$ a $|\sphericalangle AEP| = 12^\circ$. Určete velikost úhlu PAC.

Řešení. Připišme straně AE daného pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ vně rovnostranný trojúhelník AEF. Z obr. 4 je patrné, že trojúhelník ABF je rovnoramenný se základnou BF, přičemž platí

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle EAF| = 108^\circ + 60^\circ = 168^\circ.$$



Obr. 4

Odtud $|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle AFB| = 6^\circ$. To znamená, že body B, P, F leží na téže přímce (jsou kolineární). Dále platí

$$|\sphericalangle EFP| = 60^\circ - 6^\circ = 54^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle FPE| = 180^\circ - (54^\circ + 72^\circ) = 54^\circ.$$

Trojúhelníky EFP a EAP jsou tedy rovnoramenné po řadě se základnami FP a AP, a proto platí $|\sphericalangle EAP| = |\sphericalangle EPA| = \frac{1}{2}(180^\circ - 12^\circ) = 84^\circ$, a tedy

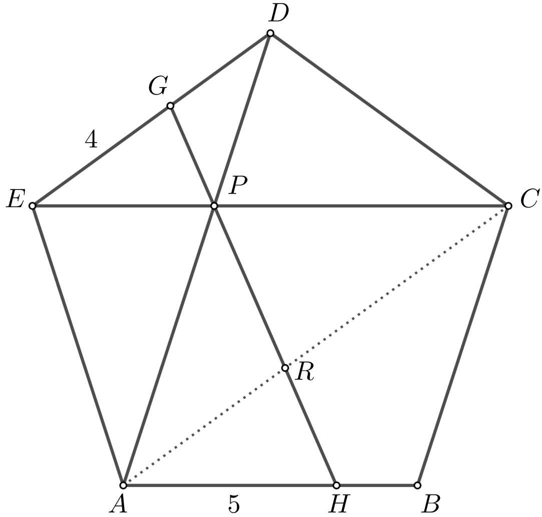
$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle EAP| - |\sphericalangle EAC| = 84^\circ - 72^\circ = 12^\circ.$$

Závěr. Velikost úhlu PAC je tedy 12°.

Poslední – 5. příklad – ponecháváme (v rámci procvičení) pozornosti čtenářů. Řešení této úlohy můžete zaslat na adresu časopisu Matematika–fyzika–informatika (nejpozději do 15. 5. 2022). Nejzdařilejší řešení této úlohy zveřejníme v některém z následujících čísel našeho časopisu.

Příklad 5 (29. Japonská matematická olympiáda, 2019)

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Nechť P je průsečík úhlopříček AD a CE. Přímka, která prochází bodem P, protíná strany AB a DE daného pětiúhelníku po řadě ve vnitřních bodech H, G, kde $|AH| = 5$ a $|EG| = 4$. Určete délku úsečky DG.



Obr. 5

[Správný výsledek: $2\sqrt{6} - 2$. Návod: Uvažujte průsečík R úhlopříčky AC s úsečkou (příčkou) GH a dále využijte podobnosti trojúhelníků CPR, AHR a EPG.]

Literatura

[1] *Švrček, J.:* Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1986), č. 8, s. 524–527.

[2] *Fabián, J.:* Pětiúhelník – ΠΕΝΤΑΓΟΝ. Lupus, Hradec Králové – Trutnov, 2005.

[3] *Londyová, M.:* Posvátná geometrie. Dokořán, Praha, 2013.