Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 271 a 272 můžete zaslat nejpozději do 31. 12. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 271

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž nabývá výraz

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

celočíselných hodnot.

Jaroslav Švrček

Úloha 272

V soutěži pro čtyři účastníky je deset úkolů ohodnocených postupně $1, \dots, 10$ body. Body za každý úkol dostane jen ten, kdo úkol splní jako první. Jakmile jsou všechny úkoly splněny, každý soutěžící si sečte své body a určí se pořadí soutěžících (nejprve dle bodů, při rovnosti bodů rozhoduje o pořadí los). Pepa začíná dříve než ostatní, může si vybrat, které úkoly splní, a chce mít zaručeno, že nebude poslední. Dokažte následující dvě tvrzení:

a) Stačí mu k tomu získat 14 bodů.

b) Stačí mu k tomu získat 13 bodů.

Josef Tkadlec

Dále uvádíme řešení úloh 267 a 268, jejichž zadání jsme zveřejnili v úvodním čísle aktuálního (30.) ročníku našeho časopisu.

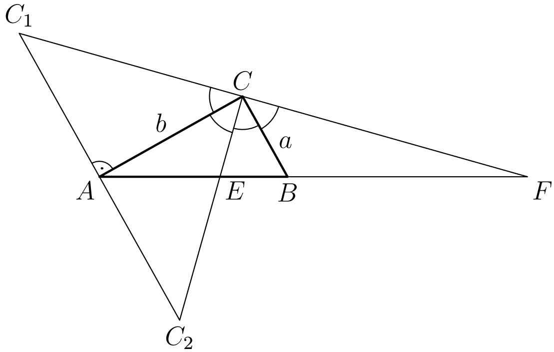
Úloha 267

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek $|BC| = a$ a $|AC| = b$, $a < b$, protnou osy jeho vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C přímku AB po řadě v bodech E a F. Určete obsah trojúhelníku EFC.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Sestrojme pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ACC_1 a ACC_2 s pravými úhly u vrcholu A dle obrázku. Protože osy vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu C trojúhelníku ABC jsou navzájem kolmé, svírají se stranami AC a BC tohoto trojúhelníku úhly $45°$. Body C_1 a C_2 tak leží po řadě na těchto osách CF a CE. Přitom platí

$$|AC_1| = |AC_2| = b, \qquad |CC_1| = |CC_2| = b\sqrt{2}.$$



Z podobnosti trojúhelníků BCE a AC_2E (uu) plyne

$$\frac{a}{b} = \frac{|BC|}{|AC_2|} = \frac{|CE|}{|CC_2| - |CE|} = \frac{|CE|}{b\sqrt{2} - |CE|}.$$

Odtud již po úpravě dostaneme

$$|CE| = \frac{ab\sqrt{2}}{b+a}.$$

Z podobnosti trojúhelníků BCF a AC_1F (uu) dále plyne

$$\frac{a}{b} = \frac{|BC|}{|AC_1|} = \frac{|CF|}{|CF| + |CC_1|} = \frac{|CF|}{|CF| + b\sqrt{2}}.$$

Opět úpravou dostaneme

$$|CF| = \frac{ab\sqrt{2}}{b-a}.$$

Obsah P_{CEF} pravoúhlého trojúhelníku CEF tak je roven

$$P_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot |CE| \cdot |CF| = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{b+a} \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{b-a} = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}.$$

Poznámka. Velikosti stran $|CE|$ a $|CF|$ můžeme také spočítat následujícím způsobem. Označme β velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C. Osa pravého úhlu ACB svírá s přímkou CB úhel 45°, odtud snadno vypočteme $|\sphericalangle BEC| = 135° - \beta$. Podle sinové věty platí

$$|CE| = |BC| \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(135° - \beta)} = a \cdot \frac{2\sin\beta}{\sqrt{2}\cos\beta + \sqrt{2}\sin\beta} =$$

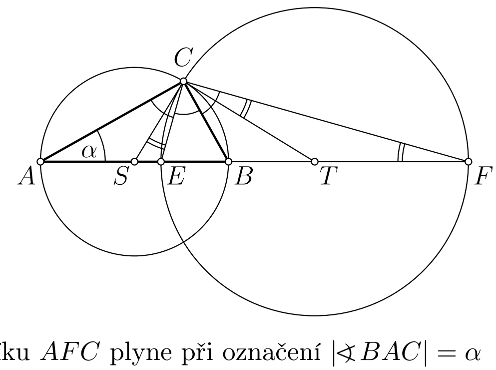
$$= a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{cotg}\beta + 1} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{ab\sqrt{2}}{b + a}.$$

Označme α velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A. Podobně jako v předcházejícím odstavci vypočteme $|\sphericalangle AFC| = 45° - \alpha$. Podle sinovvé věty v trojúhelníku AFC platí

$$|CF| = |AC| \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(45° - \alpha)} = b \cdot \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha} =$$

$$= b \cdot \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{cotg}\alpha - 1} = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{ab\sqrt{2}}{b - a}.$$

Jiné řešení. Osy vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu C trojúhelníku ABC jsou navzájem kolmé, trojúhelník CEF je tak pravoúhlý. Označme S střed úsečky AB, tedy střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a T střed úsečky EF, tedy střed kružnice opsané trojúhelníku CEF. Stejně jako v předcházejícím řešení ukážeme, že osy vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu C trojúhelníku ABC svírají s jeho stranami úhel 45°.



Z trojúhelníku AFC plyne při označení $|\sphericalangle BAC| = \alpha$

$$|\sphericalangle TCF| = |\sphericalangle CFT| = 180° - |\sphericalangle ACF| - |\sphericalangle CAF| = 180° - 135° - \alpha =$$

$$= 45° - \alpha = |\sphericalangle ACE| - |\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle SCE|.$$

Trojúhelník SCT je tak pravoúhlý, přitom $|\sphericalangle CST| = 2|\sphericalangle CAB| = 2\alpha$. Platí tak

$$\frac{|CT|}{|CS|} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\frac{a}{b}}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{b^2-a^2}.$$

Označme P_{ABC} a P_{CEF} po řadě obsahy trojúhelníků ABC a ECF. Protože oba mají stejnou výšku z vrcholu C, platí

$$S_{CEF} = S_{ABC}\cdot\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{ab}{2}\cdot\frac{2\,|CT|}{2\,|CS|} = \frac{ab}{2}\cdot\frac{2ab}{b^2-a^2} = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}.$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Michal Pecho* ze SPŠ v Dubnici nad Váhom (Slovensko).

Neúplné řešení zaslal *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko).

Úloha 268

V oboru reálných čísel najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} px + 2y &= 2,\\ x + \left(p^2-3\right)y &= p-1 \end{aligned}$$

s reálným parametrem p.

Pavel Calábek

Řešení. Druhou rovnici vynásobíme $-p$ a přičteme k první rovnici. Dostaneme tak

$$y(2+3p-p^3) = 2+p-p^2.$$

Tuto rovnici upravíme

$$y(2-p)(p+1)^2 = (2-p)(p+1).$$

Vidíme, že pro $p \in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ platí

$$y = \frac{1}{p+1}.$$

Z druhé rovnice pak pro tato p dostaneme

$$x = (p-1)-(p^2-3)y = p-1-\frac{p^2-3}{p+1} = \frac{2}{p+1}.$$

Pro $p = -1$ má soustava tvar

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 2, \\ x - 2y &= -2. \end{aligned}$$

Jelikož druhá rovnice je násobkem první, má tato soustava nekonečně mnoho řešení

$$y = t,\ x = 2(t-1),\ \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Pro $p = 2$ má soustava tvar

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Jelikož první rovnice dvojnásobkem první, má tato soustava nekonečně mnoho řešení

$$y = t,\ x = 1 - t,\ \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Závěr. Pro $p = -1$ má soustava nekonečně mnoho řešení

$$(x, y) \in \{(2(t-1), t),\ \text{kde } t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro $p = 2$ má soustava nekonečně mnoho řešení

$$(x, y) \in \{(1 - t, t),\ \text{kde } t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro zbývající $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ má soustava jediné řešení

$$(x, y) = \left(\frac{2}{p+1}, \frac{1}{p+1}\right).$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko) a *Michal Pecho* ze SPŠ v Dubnici nad Váhom (Slovensko).

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek