[6] *Stehlíková, N., Cachová, J.*: Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. JČMF, Praha, 2006.

[7] *Rendl, M.*: O konstruktivismu ve vyučování matematiky. Pedagogika, roč. 58 (2008), č. 2, s. 167–203.

[8] *Dostál, J.*: Badatelsky orientovaná výuka – Pojetí, podstata, význam a přínosy. PdF UP, Olomouc, 2015.

[9] *Samková a kol.*: Badatelsky orientované vyučování matematice. Scientia in educatione, roč. 6 (2015), č. 1, s. 91–122.

[10] *Robová, J.*: Integrace informačních a komunikačních technologií jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice. PedF UK, Praha, 2012.

[11] *Jančařík, A.*: Vybrané teorie učení a jejich projekce do využívání ICT ve výuce matematiky. PedF UK, Praha, 2013.

[12] *Štech, S.*: Když je kurikulární reforma evidence-less. Pedagogická orientace, roč. 23 (2013), č. 5, s. 615–633.

[13] *Dvořák, D. a kol.*: Kurikulum školního vzdělávání – Zahraniční reformy v 21. století. PedF UK, Praha, 2018.

[14] *Kolektiv autorů EU*: Matematické vzdělávání v Evropě – Společná úskalí a politiky jednotlivých zemí. Eurydice, Brusel, 2011 (český překlad 2012).

[15] *Kuřina, F.*: Tři pokusy řešit neřešitelné. Pedagogika, roč. 61 (2011), č. 1, s. 5–12 .

[16] *Polák, J.*: Rozvoj logického myšlení žáků ve výuce matematiky. Učitel matematiky, roč. 27 (2019), č. 2 (111), s. 74–88.

[17] *Joson, A.*: Mathematics and the “real world” – Moving toward 21st Century Math Learning. SOWISO (Learning Math and Science), Kempton (SRN), 27. 11. 2017.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 265 a 266 můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 265

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC označme I střed kružnice jemu vepsané. Určete obvod tohoto trojúhelníku, jestliže je dáno $|AI| = \sqrt{72}$ a $|BI| = \sqrt{232}$.

Josef Tkadlec

Úloha 266

Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 2020,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a.

Jaroslav Švrček

Nyní uvádíme řešení úloh 261 a 262, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle aktuálního (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 261

Dokažte, že desítkový zápis některé přirozené mocniny čísla 2021 začíná čtyřčíslím 2020.

Pavel Calábek

Řešení. Uvažujme (aspoň čtyřmístné) číslo a, počet číslic a je roven $1 + \lfloor \log a \rfloor$, kde log je dekadický logaritmus a $\lfloor x \rfloor$ celá část reálného čísla x. Toto číslo bude začínat čtyřčíslím 2020, právě když

$$2020 \cdot 10^{\lfloor \log a \rfloor - 3} \le a < 2021 \cdot 10^{\lfloor \log a \rfloor - 3},$$

tedy právě když $\log 2{,}020 \le \{\log a\} < \log 2{,}021$, kde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in \langle 0; 1)$ je tzv. *desetinná část* čísla x.

Označme

$$n = \left\lfloor \frac{1}{\log 2{,}021 - \log 2{,}020} \right\rfloor + 1 \ (= 4653),$$

z vlastnosti celé části pak plyne

$$\frac{1}{n} < \log 2{,}021 - \log 2{,}020 = -\log \frac{2020}{2021}.$$

Podle Dirichletova principu existují mezi $n + 1$ čísly $\{\log 2021^i\} = \{i \cdot \log 2021\}$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, dvě čísla k, m, $k > m$, pro něž absolutní hodnota rozdílu je menší než $1/n$. (Zřejmě pro různá celá

k, m z iracionality čísla $\log 2021$ plyne $\{\log 2021^k\} \neq \{\log 2021^m\}$.) Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme

$$-\frac{1}{n} < \{k \log 2021\} - \{m \log 2021\} = \{(k-m)\log 2021\} < 0$$

(jinak budeme uvažovat čísla $k = n+2-m$, $m = n+2-k$). Při označení $L = \lfloor (k-m)\log 2021 \rfloor \geq \lfloor \log 2021 \rfloor = 3$ proto dále užitím nerovnosti platí

$$L + 1 + \log \frac{2020}{2021} < L + 1 - \frac{1}{n} < \\ < L + \{(k-m)\log 2021\} = (k-m)\log 2021 < L + 1.$$

Užitím rostoucí exponenciální funkce se základem 10 dostaneme

$$\frac{2020}{2021} \cdot 10^{L+1} < 2021^{k-m} < 10^{1+L}$$

a odkud vynásobením 2021 máme

$$2020 \cdot 10^{L+1} < 2021^{k-m+1} < 2021 \cdot 10^{L+1},$$

z čehož plyne, že číslo 2021^{k-m+1} začíná čtyřčíslím 2020.

Poznámka. Pomocí počítače můžeme ověřit, že pět nejmenších mocnin čísla 2021, začínajících čtyřčíslím 2020, je 2021^{2570}, 2021^{7744}, 2021^{10313}, 2021^{15484}, 2021^{18056}. Dále kromě již vyjádřeného čísla $n = 4653$ můžeme experimentováním s počítačem zjistit, že řešení vyhovují například $k = 2570$, $m = 1$ (resp. všechny dvojice k a m lišící se o 2569) a $L = 8491$. Číslo 2021^{2570} je tedy zapsáno pomocí 8496 číslic.

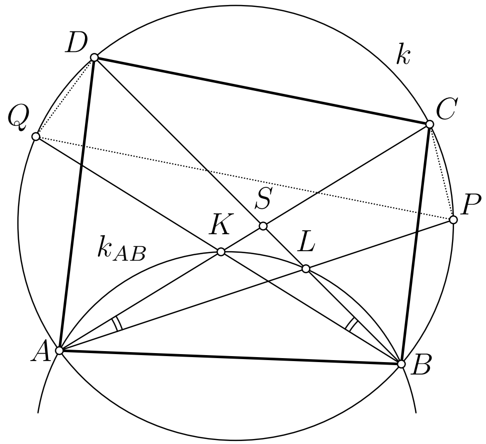
Správné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky, *Adam Blažek* z G v Plzni, Mikulášské nám., a *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, Zborovská 45.

Úloha 262

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice, která prochází vrcholy A a B daného čtyřúhelníku, protíná jeho úhlopříčky AC, BD po řadě ve vnitřních bodech K, L. Polopřímky AL a BK protínají kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě v bodech P ($P \neq A$) a Q ($P \neq Q \neq B$). Dokažte, že přímky CD a PQ jsou rovnoběžky.

Jaroslav Švrček

Řešení. Nejdříve si uvědomme, že pokud průsečík S úhlopříček čtyřúhelníku leží vně kružnice k_{AB} procházející body A, B, potom body K a L jsou vnitřními body stran trojúhelníku ASB a tedy body P a Q leží po řadě uvnitř oblouků BC a DA kružnice k opsané čtyřúhelníku $ABCD$ neobsahujících jeho jiné vrcholy. V případě, že bod S leží na kružnici k_{AB} platí $Q = D$ a $C = P$, tedy tvrzení úlohy zřejmě platí. Konečně, pokud bod S leží uvnitř kružnice k_{AB}, potom body P a Q leží na oblouku CD kružnice k neobsahujícím body A, B.



K tomu, aby přímka PQ byla rovnoběžná s přímkou CD tedy stačí ukázat, že $|CP| = |QD|$. Tětivový čtyřúhelník s vrcholy Q, P, C, D je pak (rovnoramenný) lichoběžník se základnami CD a PQ, nebo pravoúhelník. Aby platila rovnost $|CP| = |QD|$, stačí dokázat, že úhly PAC a DBQ jsou shodné. To však platí, neboť úhly LAK a LBK se s nimi po řadě shodují, a současně jsou shodnými obvodovými úhly na kružnici k_{AB}.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Amálie Dostalíková*, *Anna Pecháčková*, *Vendula Onderková* a *Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově, *David Kamenský* z GaJŠ v Břeclavi, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci, *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Zdeněk Pezlar* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Štěpán Postava* z GMK v Bílovci a *Michal Vosyka* z BG ve Žďáru nad Sázavou,

Pavel Calábek