Poďakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0265/17 „Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky“.

Literatúra

[1] *Black, P., Wiliam, D.*: Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. Phi Delta Kappan, vol. 80 (1998), no. 2, p. 139–148.

[2] *Duckor, B., Holmberg, C.*: Mastering Formative Assessment Moves, 7 High-Leverage Practices to Advance Student Learning. ASCD, 2017.

[3] *Frei, N., Fisher, D.*: The Formative Assessment Action Plan. Practical Steps to More Successful Teaching and Learning. ASCD, 2011.

[4] *Nusche, D., Radinger, T., Santiago, P., Shewbridge, C.*: Synergies for Better Learning, An International Perspective on Evaluation and Assessment. OECD Reviews of Evaluation and Assessment in Education, OECD 2013.

[5] *Keeley, P.*: Science Formative Assessment, 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning. Corwin Press, 2008.

[6] *Keeley, P., Tobey, Ch. R.*: Mathematics Formative Assessment, 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning. Corwin, 2011.

[7] *Regier, N.*: Book Two: 60 Formative Assessment Strategies. Regier Educational Resources, 2012.

[8] *Tobey, Ch. R., Arline, C. B.*: Uncovering Student Thinking about Mathematics in the Common Core, 25 Formative Assessment Probes. Corwin, 2014.

[9] *Wiliam, D.*: Embedded Formative Assessment. Solution Tree Press, 2011.

[10] The National Council of Teachers of Mathematics: Five “Key Strategies” for Effective Formative Assessment. Association Drive, Reston, 2007. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_04_-_Five_Key%20Strategies.pdf

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 263 a 264 můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 263

Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všechny dělitele čísla m, platí $f(d_1) + f(d_2) + \ldots + f(d_n) = m$.

Pavel Calábek

Úloha 264

Tři bohatýři bojují s drakem Gorynyčem. Ilja Muromec každým svým úderem meče setne drakovi polovinu jeho hlav a k tomu ještě jednu. Dobryňa Nikitič každým svým úderem odetne drakovi třetinu jeho hlav a k tomu ještě dvě. Aljoša Popovič utne každým svým úderem drakovi čtvrtinu jeho hlav a k tomu ještě tři. Bohatýři bojují s drakem v pořadí, které si sami zvolí. Pokud žádný z bohatýrů nemůže utít drakovi hlavy (neboť počet hlav by nebyl celočíselný), Gorynyč tři bohatýry sežere. Rozhodněte, zda bohatýři mohou stít všechny hlavy draku Gorynyčovi, který má 29! hlav.

převzato ze soutěže Turnaj měst

Dále uvádíme řešení úloh 259 a 260, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle tohoto (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 259

Určete předposlední číslici desítkového zápisu čísla 11^{2020}.

Vladimír Vaněk

Řešení. V následující tabulce vypišme několik prvních mocnin čísla 11.

n	1	2	3	4	5	6
11^n	11	121	1331	14641	161051	1771561

Na jejím základě můžeme vyslovit hypotézu: Poslední číslice libovolné mocniny čísla 11 je 1 a pokud předposlední číslice n-té mocniny je a, potom předposlední číslice následující $(n+1)$-mocniny je $a+1 \pmod{10}$.

Tuto hypotézu nyní dokážeme matematickou indukcí. Z tabulky vidíme, že toto tvrzení platí platí pro $n = 1$ (a také pro $n = 2, 3, 4, 5$). Nyní předpokládejme, že n-tá mocnina čísla 11 končí číslicí 1 a má předposlední číslici a, platí tedy $11^n = 100b+10a+1$, kde a je číslice a b je celé nezáporné číslo. Potom

$$11^{n+1} = 11^n \cdot 11 = (100b + 10a + 1) \cdot 11 = 100(11b + a) + 10(a + 1) + 1.$$

Odtud vidíme, že poslední číslicí $(n+1)$-mocniny je 1 a pokud a je číslice menší než 9, potom poslední číslicí tohoto čísla je $a+1$, pokud $a = 9$, tak poslední číslicí této mocniny je 0. V obou případech je tedy poslední číslicí $(n+1)$-mocniny čísla 11 číslice $a+1 \pmod{10}$. Podle principu matematické indukce tak tvrzení platí pro všechna přirozená čísla n.

Jelikož předposlední číslice čísla 11^1 je 1, z dokázaného tvrzení plyne, že předposlední číslice čísla 11^n se shoduje s poslední číslicí čísla n. Proto číslo 11^{2020} má předposlední číslici stejnou jako je poslední číslice čísla 2020, tedy číslici 0.

Jiné řešení. Podle binomické věty platí

$$11^{2020} = (10+1)^{2020} =$$
$$= 10^{2020} + \binom{2020}{1} \cdot 10^{2019} + \cdots + \binom{2020}{1998} \cdot 10^2 + \binom{2020}{1999} \cdot 10 + 1.$$

Sčítance posledního součtu, které obsahují mocniny desítky větší než 1, nemají vliv na poslední a předposlední číslici dané mocniny. Odtud tak vidíme, že poslední číslice této mocniny je 1 a její předposlední číslice je shodná s poslední číslicí čísla $\binom{2020}{1999} = 2020$, což je 0.

Správné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko).

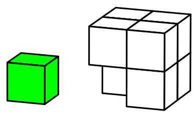
Úloha 260

Krychle $ABCDA'B'C'D'$ je složena z osmi jednotkových krychlí. Kolika způsoby ji můžeme rozdělit na dvě souvislé části, které jsou také složené z jednotkových krychlí (jednotkové krychle v souvislých částech sousedí aspoň jednou celou stěnou, na pořadí částí nezáleží)? (Označíme-li jednotkové krychle podle vrcholů, které obsahují, pak příkladem dvou různých dělení jsou $\{A, A'\}$, $\{B, C, D, B', C', D'\}$ a $\{B, B'\}$, $\{A, C, D, A', C', D'\}$.)

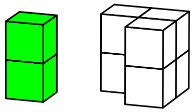
Tomáš Holan

Řešení. Uvažujme následující možnosti dle toho, kolik jednotkových krychlí obsahují uvažované souvislé části.

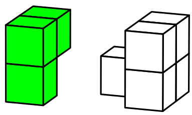
a) Jedna souvislá část obsahuje jednu jednotkovou krychli, druhá obsahuje (souvislých) 7 krychlí. Souvislá část obsahující jedinou jednotkovou krychli je jednoznačně určena vrcholem původní krychle 2×2. Každá krychle má 8 vrcholů, takových dělení tak bude právě 8.



b) Jedna souvislá část obsahuje dvě jednotkové krychle, zbývající souvislá část obsahuje 6 jednotkových krychlí. Dvě jednotkové krychle tvoří souvislou část, pokud leží u jedné hrany původní krychle 2×2, zbývajících 6 krychlí pak také tvoří souvislou část. Jelikož má krychle 12 hran, takových dělení existuje právě 12.

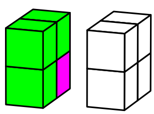


c) Jedna souvislá část obsahuje tři krychle, druhá 5 krychlí. Souvislá část krychle složená ze tří jednotkových krychlí leží v jedné stěně původní krychle, tvoří písmeno „L“ a je jednoznačně určena jednotkovou krychlí ve „zlomu“ písmena „L“. Zbývajících pět krychlí pak nutně tvoří také souvislou část. Krychle má 6 stěn, každá stěna má 6 vrcholů, proto souvislou část obsahující 3 jednotkové krychle můžeme vybrat právě $6 \times 4 = 24$ způsoby.

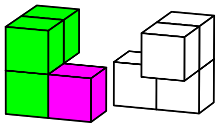


d) Každá ze souvislých částí obsahuje právě 4 krychle. Následující úhahy dále rozdělíme podle toho, jak k souvislé části složené ze tří jednotkových krychlí (podle předcházejícího bodu tvoří „L“ ležící v jedné stěně) přidáme čtvrtou jednotkovou krychli.

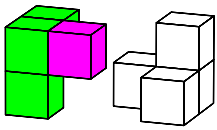
(i) Čtvrtou jednotkovou krychli přidáme ke koncové krychli „L“ tak, že všechny čtyři krychle tvoří stěnu původní krychle 2×2. Potom zbývající jednotkové krychle tvoří také souvislou stěnu původní krychle. Tato souvislá část je jednoznačně určena stěnou krychle. Krychle má 6 stěn, ovšem obě souvislé části jsou nerozlišitelné, proto existují celkem $6 : 2 = 3$ taková rozdělení krychle.



(ii) Čtvrtou jednotkovou krychli přidáme ke koncové krychli „L“ tak, že všechny čtyři krychle tvoří „prostorového hada“. Zbývající čtyři krychle tvoří také souvislého „hada“. Každý takový „had“ je jednoznačně určen první a poslední dvojicí krychlí, tyto dvojice určují mimoběžné hrany krychle. Krychle má 12 hran, ke každé hraně existují právě 4 mimoběžné hrany (dále 4 různoběžné a 3 rovnoběžné), dvojice mimoběžných hran určujících „hada“ jsou nerozlišitelné a vzniklí souvislí „prostoroví hadi“ jsou také nerozlišitelní, existuje tak celkem $(12 \cdot 4) : (2 \cdot 2) = 12$ takových rozdělení krychle.



(iii) Čtvrtou jednotkovou krychli přidáme ke střední krychle „L“. Zbývající čtyři krychle také tvoří stejnou souvislou část. Každá taková čtveřice krychlí je jednoznačně určena krychlí „uprostřed“, která svou stěnou souvisí s každou ze zbývajících tří krychlí. Tato prostřední krychle je jednoznačně určena jedním vrcholem původní krychle. Krychle má 8 vrcholů, dvě vzniklé části o 4 vrcholech jsou nerozlišitelné, existují tak $8 : 2 = 4$ taková dělení krychle.



Počet dělení krychle na souvislé části o čtyřech krychlích je tak roven $3 + 12 + 4 = 19$.

Celkem proto existuje

$$8 + 12 + 24 + 19 = 63$$

dělení krychle na dvě souvislé části.

Správná řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy. Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Po uzávěrce minulého čísla ještě redakce obdržela správná řešení úloh 257 a 258 od *Jozefa Mészároše* z Jelky.

Pavel Calábek