pošty a jiné u měst na okrajích. A kolik bude celkem potřeba aut? I kdyby každé auto obsluhovalo jen jediné město, vystačili bychom s 1 024 auty, to by bylo mnohem lepší řešení než to minulé s dvojicemi měst. A protože na dopravu z centrální pošty do centrální pošty nepotřebujeme auto, tak jen 1 023. Stihne se to? To umíme spočítat...

### Závěr

K řešení úlohy potřebujeme nejenom znalosti a schopnost počítat, ale potřebujeme také nápady, tvořivost, představivost, fantazii. Odborníci [1] říkají, že to jsou dva různé způsoby přemýšlení, a že je dobré je nemíchat a nejdříve vymyslet nápady, a pak teprve propočítávat a zlepšovat. Tak to zkuste a pokud vymyslíte nějaké řešení, ať už sami nebo s kamarádem nebo ve škole za pomoci svého učitele, spočítejte, kolik potřebujete aut, popište ho a pošlete nám ho, zveřejníme ho.

### Literatura

[1] *Osborn, A.:* Unlocking Your Creative Power, Hamilton Book, 1991.

# Pes Elvis a piráti

*PAVEL LEISCHNER*

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Budeme se zabývat úlohou, která léta setrvávala v učebnicích bez větší pozornosti čtenářů a pak se z ní stal hit. Obecně ji lze zformulovat takto:

**Úloha 1.** Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABQ$ s přeponou $AB$. Na přímce $p = AQ$ volíme bod $X$. Bodový objekt $M$ se po přímce $p$ pohybuje rychlostí $v$ a po úsečce $BX$ rychlostí $u < v$.

Určete polohu bodu $X$ tak, aby byl celkový čas pohybu bodu $M$ z $A$ do $B$ po lomené čáře $AXB$ minimální.

Úlohu, i svého psa Elvise, proslavil roku 2003 T. J. Pennings článkem [5]. Pes Elvis měl za úkol aportovat míč vhozený do jezera. Běžel z $A$ do $X$ po břehu a pak plaval k míči do místa $B$. Pennings opakovaným měřením zjistil, že pes volil body $X$ blízko polohy odpovídající minimálnímu času.

Odezva byla velká. Vyskytla se různá řešení úlohy i jiné úvahy. Příspěvek [6] A. Slavíka mne podnítil ke vzpomínkám a následujícím úvahám.

## Komentář k následujícím řešením

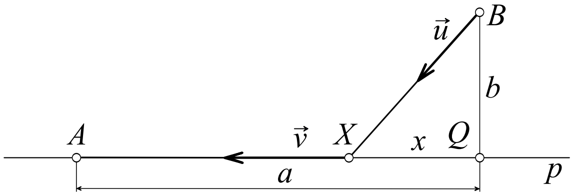
Označíme $a = |AQ|$, $b = |BQ|$, $x = |QX|$ a $t$ celkovou dobu pohybu. Výsledky se nezmění, probíhá-li pohyb v obráceném sledu. Ve všech řešeních tedy předpokládáme, že se objekt $M$ nejprve pohybuje rychlostí $u$ z $B$ do $X$ a pak rychlostí $v > u$ z $X$ do $A$ (obr. 1).

Bod $X$ budeme hledat na polopřímce $QA$. Pro ostatní situace je totiž $t$ větší než doba pohybu po trajektorii $BQA$.

Pro relativně malé hodnoty $a$ odpovídá nejrychlejšímu přemístění volba $X = A$, tedy pohyb rychlostí $u$ z $B$ do $A$. Takové situace vyloučíme předpokladem

$$a\sqrt{v^2 - u^2} > bu, \tag{1}$$

jenž plyne z níže nalezených vztahů (6) a (7).




Obr. 1 K úloze 1 pro pohyb z $B$ do $A$ přes $X$

## Metoda diskriminantu

Je to standardní a užitečná metoda. Podrobněji je popsána např. v [7]. Škoda, že se na ni v poslední době zapomíná. Mezi ohlasy na článek [5] ji snad nikdo nezmínil. Použijeme ji nyní k řešení naší úlohy.

Označme $t_{BX}$ dobu pohybu z $B$ do $X$ a $t_{XA}$ dobu pohybu z $X$ do $A$. Pro celkovou dobu pohybu $t = t_{BX} + t_{XA}$ snadno nalezneme

$$t = \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{u} + \frac{a - x}{v} \tag{2}$$

a odtud ekvivalentní vztah

$$(tv - a) + x = \frac{v}{u}\sqrt{b^2 + x^2}, \tag{3}$$

který pokládáme za rovnici s neznámou $x \in (0, a)$ a parametrem $t > 0$.

Obě strany rovnice (3) jsou kladné, neboť

$$tv = vt_{BX} + vt_{XA} > ut_{BX} + vt_{XA} = |BX| + |XA| > a.$$

Umocněním a dalšími ekvivalentními úpravami obdržíme kvadratickou rovnici

$$Ex^2 + Fx + G = 0, \tag{4}$$

kde

$$E = \frac{v^2}{u^2} - 1, \quad F = -2(tv - a), \quad G = \frac{b^2v^2}{u^2} - (tv - a)^2. \tag{5}$$

Rovnice má reálné řešení, právě když je její diskriminant nezáporný. Tedy právě když platí $F^2 \geq 4EG$. Po dosazení ze vztahů (5) a ekvivalentních úpravách odtud obdržíme

$$(tv - a)^2 \geq b^2 \left(\frac{v^2}{u^2} - 1\right).$$

Výrazy v obou závorkách posledního vztahu jsou kladné. Po jeho odmocnění nakonec zjistíme, že

$$t \geq \frac{a}{v} + \frac{b}{v}\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}.$$

Za podmínky (1) tedy minimálnímu času

$$t_{\min} = \frac{a}{v} + \frac{b}{v}\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1} \tag{6}$$

odpovídá dvojnásobný kořen rovnice (4)

$$x(t_{\min}) = -\frac{F(t_{\min})}{2E} = \frac{b}{\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}}. \tag{7}$$

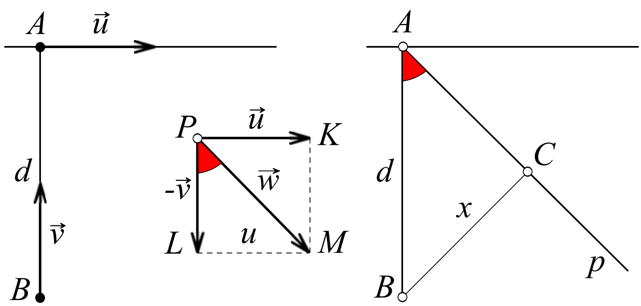
## Piráti v Rozhledech matematicko-fyzikálních

Na počátku devadesátých let nastala krize ve vydávání časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální. Jako autor začátečník jsem tehdy napsal pro Rozhledy několik článků na podporu rozvoje matematických talentů, mezi nimi též [3] a [4].

První z nich seznamoval s metodou diskriminantu. Druhý jsem zaměřil na využívání relativní rychlosti. Kromě jiného mne k tomu inspirovalo i řešení úlohy 2 uvedené v publikaci [8].

**Úloha 2.** Po dvou na sebe kolmých přímých cestách jdou dva chodci, jeden rychlostí $u$, druhý rychlostí $v$. Když byl první chodec v průsečíku obou cest, zbývalo druhému ještě $d$ kilometrů do tohoto místa. Určete nejmenší vzdálenost obou chodců.

*Řešení* (podle [8]). Na obr. 2 vlevo je znázorněna počáteční situace. Vzhledem ke vztažné soustavě pevně spojené s druhým chodcem se první chodec pohybuje relativní rychlostí $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, tedy po přímce $p$ na obr. 2 vpravo, kdežto druhý chodec setrvává v místě $B$.




Obr. 2 Řešení úlohy 2

Nejkratší vzdálenost chodců je tedy $x = |BC|$, kde $C$ je pata kolmice z $B$ na $p$.

Z podobných pravoúhlých trojúhelníků $ABC$ a $PML$ dostáváme

$$\frac{x}{d} = \frac{u}{w}, \quad w = \sqrt{u^2 + v^2}$$

a odtud

$$x = \frac{d}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}}}.$$

Za touto úlohou následuje v [8] neřešená úloha 1 ve formulaci „Chodec jde z $A$ do $B$ nejprve po přímé cestě a pak menší rychlostí po louce…“

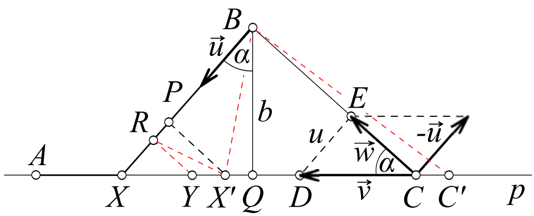
Hledal jsem analogické řešení a vypůjčil jsem si na pomoc piráty ze Stevensonova románu Ostrov pokladů:

Kapitán Flint měl najít bod $X$ na přímém rozhraní $p$ mezi mořem a pevninou, přes který by se nejrychleji dostal z lodi zakotvené v místě $B$ (člunem do $X$ rychlostí $u$ a pak po břehu rychlostí $v > u$) k bedně se zlaťáky, jež ležela na $p$ v místě $A$ (obr.3).

Představil si, že současně s ním se dá do pohybu po přímce $p$ jeho druh Bill Bones, který má na pevnině stejnou rychlost chůze a nachází se v takovém místě $C \in p$, aby dorazil do $X$ ve stejném okamžiku jako Flint a šli pak oba (beze změny směru Billovy rychlosti) společně k bedně. Celková doba jejich pohybu bude

$$t = \frac{|BX|}{u} + \frac{|XA|}{v} = \frac{|CA|}{v}. \tag{8}$$

Z hlediska vztažné soustavy pevně spojené s Flintovým člunem se bude Bill během plavby přibližovat k Flintovi relativní rychlostí $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$. Flint na základě zkušeností s přepadáváním lodí usoudil, že nejkratší celková doba pohybu nastane když $\vec{w} \perp \vec{u}$ (obr. 3).




Obr. 3 Flintova volba trajektorie

Pro plavbu tedy zvolil takový úhel $\alpha$ a tím i bod $X \in p$, pro něž při označení podle obr. 3 platí

$$\sin\alpha = \frac{u}{v}, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{u}{w} = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}} = \frac{x}{b}. \tag{9}$$

Poslední rovnost je v souladu s (7). Důkaz, že pro tento bod $X$ je čas $t$ opravdu minimální, lze provést následovně.

Kdyby Flint plul do bodu $X'$, který je uvnitř úsečky $QX$, můžeme na úsečce $BX$ sestrojit bod $R$ tak, aby $|BR| = |BX'|$. V rovnoramenném trojúhelníku $RX'B$ označíme $P$ patu výšky z vrcholu $X'$. Ta leží uvnitř ramene $BR$, protože úhel $RBX'$ při hlavním vrcholu $B$ je ostrý. Sestrojme ještě příčku $RY \parallel PX'$ v trojúhelníku $X'PX$.

Pomocí podobnosti trojúhelníků $XYR$ a $DCE$ zjistíme, že Flint dorazí do bodu $X'$ o čas $t' = \frac{|RX|}{u} = \frac{|XY|}{v}$ dříve, než do $X$. Zároveň si prodlouží cestu po břehu o délku $|XX'| = |XY| + |YX'| > |XY|$. Celkový čas $t$ bude o $\Delta t = \frac{|YX'|}{v}$ větší a Billovo výchozí stanoviště se na polopřímce $AQ$ přemístí do bodu $C'$, jenž splňuje vztah $|AC'| = |AC| + |YX'|$.

Analogickou úvahu pro situaci, kdy se bod $X'$ nachází uvnitř úsečky $AX$, ponechme čtenáři.

### Geometrické řešení

Označme $q$ rovnoběžku s přímkou $p$ v bodě $B$ a uvažujme umístění vektorů $\overrightarrow{v}$ a $\overrightarrow{u}$ taková, aby $B$ byl jejich počáteční bod (obr. 4). Koncový bod $V$ vektoru $\overrightarrow{v}$ je pevně umístěn na $q$. Koncový bod vektoru $\overrightarrow{u}$ leží v průniku kružnice $k(B; u)$ s vnitřkem úhlu $VBQ$. Zvolme za něj bod $U$ dotyku tečny z bodu $V$ ke kružnici $k$. Bod $X$ je průsečíkem přímek $p$ a $BU$.

Rovnoběžky s tečnou $VU$ vedené body $X$ a $A$ určují trojúhelníky $EXB$ a $CDB$ stejnolehlé s trojúhelníkem $VUB$. Koeficienty těchto stejnolehlostí,

$$\frac{|BE|}{v} = \frac{|BX|}{u} = t_{BX} \quad \text{a} \quad \frac{|BC|}{v} = \frac{|BD|}{u} = t, \tag{10}$$

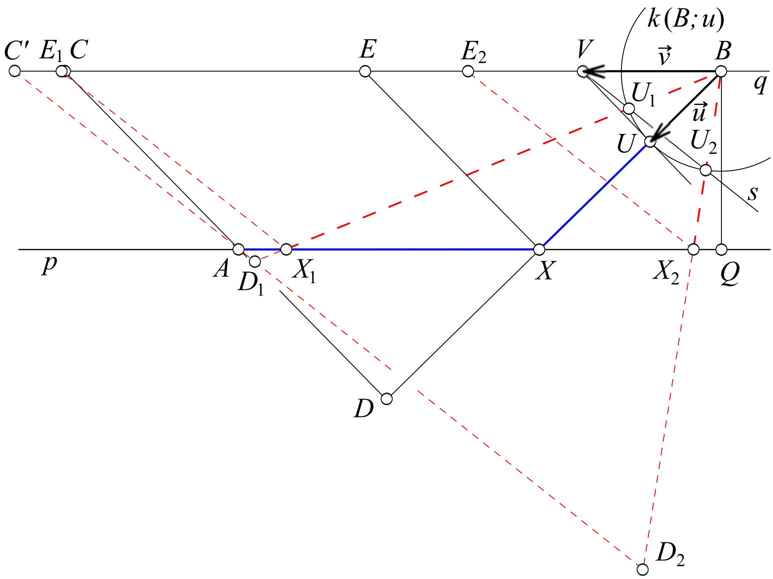
jsou zároveň doby příslušných rovnoměrných pohybů. Přitom $t$ je (v souladu s předchozím značením) celková doba pohybu po trajektorii $BXA$, neboť ze vztahů (10) a rovnoběžníku $CAXE$ plyne

$$t = \frac{|BC|}{v} = \frac{|BE|}{v} + \frac{|EC|}{v} = \frac{|BX|}{u} + \frac{|XA|}{v} = t_{BX} + t_{XA}.$$

Ukážeme, že $t$ je minimální.

Každý koncový bod vektoru $\overrightarrow{u}$, který přichází v úvahu a je různý od $U$, leží v průniku kružnice $k$ s její sečnou $s$ z bodu $V$. Položme $s \cap k = \{U_1, U_2\}$.

Rovnoběžky s přímkou $s$ vedené body $X_i$ a $A$ určují trojúhelníky $E_iX_iB$ a $C'D_iB$ stejnolehlé s trojúhelníkem $VU_iB$ $(i \in \{1, 2\})$. Přitom platí $|BC'| > |BC|$, neboť $|\sphericalangle BC'A| = |\sphericalangle BVU_i| < |\sphericalangle BVU| = |\sphericalangle BCA|$.

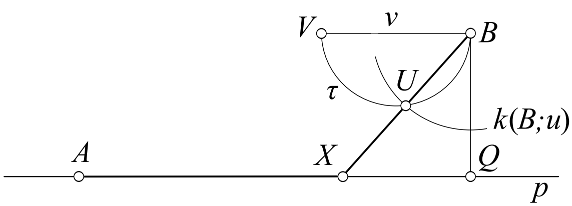



Obr. 4  Geometrické řešení úlohy 1

Výše uvedeným postupem analogicky zjistíme, že pro doby $t_1$ a $t_2$ pohybů po trajektoriích $BX_1A$ a $BX_2A$ platí

$$t_1 = t_2 = \frac{|BC'|}{v} > \frac{|BC|}{v} = t = t_{\min}.$$

*Konstrukce.* Trojúhelník $AQB$ s přímkou $p$ je za předpokladu (1) dán. Nejprve sestrojíme v polorovině $BQA$ úsečku $BV \parallel p$ délky $v$, nad ní pak Thaletovu půlkružnici $\tau$ v polorovině $BVA$ (obr. 5) a bod $U \in \tau \cap k(B; u)$. Hledaný bod $X$ je průsečíkem polopřímky $BU$ a přímky $p$.




Obr. 5  Konstrukce bodu $X(t_{\min})$

## Závěr

Byly popsány tři elementární řešení úlohy 1. Všechna se dají využít pro zájmovou práci se středoškoláky, a to i v nižších ročnících. První z nich procvičuje algebraické úpravy a řešení rovnic s parametry.

Druhé řešení je z roku 1993 a využívá základní poznatky z fyziky. V roce 2017 zveřejnila trojice portugalských matematiků v [1] postup (česky popsaný v [6, str. 32]), který má stejný základ – trojúhelník $XBC$ při označení podle obr. 3. Portugalci na rozdíl od našeho řešení zkoumali trojúhelník pomocí trigonometrie a zjistili, že $t = t_{\min}$, právě když je úhel $XBC$ pravý. Toto zjištění je ekvivalentní s Flintovou úvahou $t = t_{\min}$, právě když $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$.

Poslední, ryze geometrický postup je asi nejjednodušší. Jestliže je poloha bodu $X$ učena průnikem kružnice $k(B; u)$ a přímky z vnějšího bodu $V$, pak je přirozené hledat extrém pro situaci, kdy je přímka tečnou. Domnívám se, že takové řešení očekávali autoři publikace [8] od čtenářů. Přišel jsem na ně až po nynějším návratu k úloze.

Ke konverzacím na téma matematických znalostí psů dodávám: *Nejlepší námět pro všechny je ten, o němž nikdo nic neví* [2, s. 282].

Flint si na lodi předem vypočítal úhel $\alpha$ a stanovil azimut, podle kterého pak plul ve člunu do místa $X(t_{\min})$. Elvis neměl při výkonu svého úkolu čas na výpočet, ani potřebné údaje. Sebelepší znalost matematické analýzy by mu nepomohla.

### Literatura

[1] *Carvalho, A., Pereira dos Santos, C., Silva, J. N.*: The geometer dog who did not know calculus. College Math. J., roč. 48 (2017), č. 5, s. 339–345.

[2] *Feynman, R. P.*: To snad nemyslíte vážně! Mladá fronta, Praha, 1989.

[3] *Leischner, P.*: Flint, Silver a metoda diskriminantu. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 71 (1993/4), č. 4, s. 168–173.

[4] *Leischner, P.*: Kapitán Flint a fyzika. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 71 (1993/4), č. 5, s. 220–225.

[5] *Pennings, T. J.*: Do dogs know calculus? College Math. J., roč. 34 (2003), č. 3, s. 178–182.

[6] *Slavík, A.*: Znají psi matematiku? In: Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Vydavatelský servis Plzeň, 2018, s. 29–38.

[7] *Švrček, J., Hrubý, D.*: Využití diskriminantu kvadratické rovnice. MFI, roč. 24 (2015), č. 1, s. 6–17. , roč. 26 (2017), č. 5, s. 321–327.

[8] *Vasiljev, N. B., Gutenmacher V. L.*: Přímky a křivky. Škola mladých matematiků, sv. 51, Mladá fronta, Praha, 1982.