Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 255 a 256 můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, případně v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 255

Nechť CD je výška tupoúhlého trojúhelníku ABC s tupým úhlem při vrcholu B. Kružnice s průměrem CD protíná stranu AC v bodě E a úsečku BE v bodě F. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|.$$

Jacek Uryga

Úloha 256

Určete, kolika různými způsoby lze obarvit stěny pravidelného osmistěnu osmi různými barvami tak, aby každá stěna byla obarvena jednou barvou a různé stěny byly obarveny různými barvami. Obarvení čtyřstěnu považujeme za stejná, pokud se shodují v některém jeho otočení.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 251 a 252, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle nového (28.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 251

Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme P, Q po řadě paty kolmic z vrcholů C, D ke straně AB. Předpokládejme, že body P, Q leží na úsečce AB a platí $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$. Dokažte, že $|DA|+|AB|+|BC| > |AC|+|BD|$.

Josef Tkadlec

Řešení. Označme R takový bod úsečky PQ, pro který platí $|AQ| = |QR|$. Jeho existence plyne z nerovnosti

$$|AQ| \le |AB| - |PQ| = \frac{1}{2}|AB|.$$

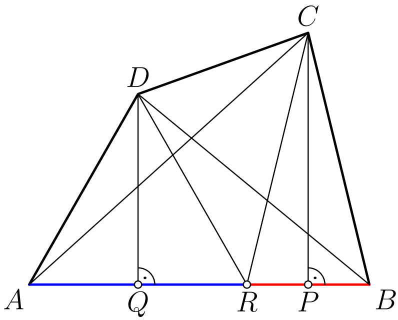
Trojúhelník ARD je tak rovnoramenný se základnou AR. Ze vztahu

$$\frac{1}{2}|AB| = |PQ| = |PR| + |RQ|$$

dále plyne

$$|RP| = |PB|,$$

tedy že trojúhelník BRC je také rovnoramenný.



Užitím trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku ARC máme

$$|AC| < |AR| + |RC| = |AR| + |BC|$$

a z trojúhelníkové nerovnost v trojúhelníku RBD dostaneme

$$|BD| < |DR| + |RB| = |DA| + |RB|.$$

Sečtením těchto dvou nerovností konečně dostaneme

$$|AC| + |BD| < |DA| + |AR| + |RB| + |BC| = |DA| + |AB| + |BC|,$$

což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Amálie Dostalíková Darian Poljak Vít Ulehla*, všichni z GJŠ v Přerově, *Jakub Michna* a *Štěpán Postava*, oba z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *Daniel Czinege* a *Michaela Svatošová*, oba z GMK v Bílovci.

Úloha 252

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0,$$
$$x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

právě jeden společný kořen.

Jaroslav Švrček

Řešení. Společný kořen obou rovnic je také kořenem rovnice

$$0 = (x^3 + ax^2 + bx + 1) - (x^3 + bx^2 + ax + 1) = (a - b)x(x - 1). \quad (1)$$

a) V případě $a = b \in \mathbb{R}$ jsou obě rovnice shodné a mají tvar

$$0 = x^3 + ax^2 + ax + 1 = (x + 1)\bigl[x^2 + (a - 1)x + 1\bigr].$$

Číslo -1 je tak kořenem obou zadaných rovnic a bude jediným reálným kořenem buď

(i) v případě, že kvadratická rovnice

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$$

nemá reálné kořeny, což znamená, že její diskriminant

$$(a - 1)^2 - 4 = (a - 3)(a + 1)$$

je záporný, tedy právě když $a \in (-1; 3)$,

(ii) nebo v případě, že číslo -1 je jediným kořenem kvadratické rovnice

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0.$$

Pak ale -1 je jejím dvojnásobným kořenem a platí

$$0 = x^2 + (a - 1)x + 1 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

což nastane pro $a = 3$.

b) V případě $a \neq b$ snadno vidíme, že číslo 0 nemůže být kořenem ani jedné ze zadaných rovnic, proto tyto rovnice mohou mít společný pouze kořen 1, musí tak platit

$$a + b + 2 = 0,$$

tedy $b = -(a + 2)$. Z podmínky $a \neq b$ dostáváme $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. V tomto případě obě rovnice nemohou jiné společné kořeny, protože ty by byly opět kořeny rovnice 1.

- Obě zadané rovnice tak mají v případě $(a, b) = (a, a)$, kde $a \in (-1; 3\rangle$, jediný společný kořen -1.
- Obě zadané rovnice dále mají jediný společný kořen 1 v případě $(a, b) = (a, -2 - a)$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Poznámka 1

Redakce bohužel neobdržela žádné správné řešení, řešitelé vždy nějakou drobnou chybičkou byli blízko správné hodnoty 101. Někteří řešitelé uvažovali kořeny obou rovnic v oboru komplexních čísel. Pokud by uvedli, že obě rovnice mají jediný společný kořen v případech $a = b = 3$ a $b = -2-a$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, bylo by jejich řešení také uznáno za správné. Všichni řešitelé, kteří mají částečně vyřešenou úlohu, správně přišli na podmínku $b = -2 - a$. Zde však nezkoumali, zda některá z rovnic nemá 1 jako násobný kořen, což by se dalo po (nesprávném) konstatování, že pro $a = b$ mají rovnice tři společné kořeny, považovat za konzistentní přístup.

Poznámka 2

V případě $a = b = -1$ mají obě rovnice tvar

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

a dva společné kořeny -1 a 1.

Správné řešení zaslala *Michaela Svatošová* z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan *Jozef Mészáros* z Jelky, *Amálie Dostalíková Darian Poljak Vít Ulehla Jakub Zdráhal Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově a *Marek Šikula* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek