Literatura

[1] *Hejný, M. et al.*: Creative Teaching in Mathematics, vyd. UK Praha, 2006.

[2] https://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/12561/VYMEZENI-POJMU-MATEMATICKA-GRAMOTNOST.html/

[3] http://www.csicr.cz/cz/DOKUMENTY/Publikace/Ulohy-pro-rozvoj-matematicke-gramotnosti

[4] https://www.mathsisfun.com/

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 251 a 252 můžete zaslat nejpozději do 20. 5. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 251

Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme P, Q po řadě paty kolmic z vrcholů C, D ke straně AB. Předpokládejme, že body P, Q leží na úsečce AB a platí $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$. Dokažte, že $|DA|+|AB|+|BC| > |AC|+|BD|$.

Josef Tkadlec

Úloha 252

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0,$$
$$x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

právě jeden společný kořen.

Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 247 a 248, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (27.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 247

Kolik tupoúhlých trojúhelníků má všechny své vrcholy ve vrcholech daného pravidelného 26úhelníku. *Jacek Uryga*

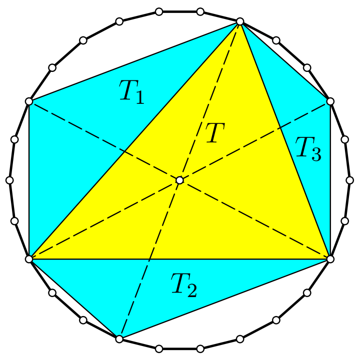
Řešení. Počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží ve vrcholech pravidelného 26úhelníku je

$$\binom{26}{3} = 2\,600.$$

Nyní určíme, kolik z nich je pravoúhlých. Vrcholy pravidelného 26úhelníku leží na kružnici jemu opsané. Podle Thaletovy věty je přepona takového trojúhelníku průměrem této kružnice. Ke každé z $\frac{1}{2} \cdot 26 = 13$ možných přepon existuje $26 - 2 = 24$ zbývajících vrcholů, které s krajními body dané přepony tvoří pravoúhlý trojúhelník, pravoúhlých trojúhelníků tak je $24 \cdot 13 = 312$. Zbývajících

$$2\,600 - 312 = 2\,288$$

trojúhelníků je tedy buď ostroúhlých, nebo tupoúhlých.



Nyní uvažujme ostroúhlý trojúhelník T, jehož vrcholy leží ve vrcholech pravidelného 26úhelníku. Bod souměrně sdružený s jedním jeho vrcholem podle středu tohoto mnohoúhelníku bude se zbývajícími dvěma vrcholy trojúhelníku T určovat tupoúhlý trojúhelník. Každému ostroúhlému trojúhelníku tak odpovídají tři tupoúhlé trojúhelníky (T_1, T_2 a T_3 na obrázku). Naopak, každému tupoúhlému trojúhelníku podobně odpovídá jeden ostroúhlý trojúhelník. Počet tupoúhlých trojúhelníků je tak třikrát větší než počet ostroúhlých trojúhelníků a je proto roven

$$\tfrac{3}{4} \cdot 2\,288 = 1\,716.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Vojtěch David* z WG v Ostravě-Porubě, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Karel Chwistek* z MG v Opavě, *Dalibor Kramář* z G v Brně-Řečkovicích,

Adam Křivka z CMGaSOPŠ v Brně, *Tomáš Křižák* z GMK v Bílovci, *Karolína Kučerová* z G v Českém Krumlově, *Tomáš Sourada* z G v Žamberku a *Petr Zahradník* z GaSOŠDVŠ v Ústí nad Labem.

Neúplné řešení zaslala *Lucie Kundratová* z GaJŠ ve Zlíně,

Úloha 248

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li (při obvyklém označení délek jeho stran a velikostí vnitřních úhlů) dáno: α, $a+b$, $a+c$. *Jaroslav Švrček*

Řešení podle J. Mészárose a K. Gajdoše. Nejprve sestrojme trojúhelník $AB'C'$, kde $|AB'| = a+b$, $|AC'| = a+c$ a $|\sphericalangle B'AC'| = \alpha$. Označme N střed kružnice vně připsané straně BC trojúhelníku ABC, U_a je dotykový bod této kružnice se stranou BC a U_b, U_c po řadě dotykové body této kružnice s prodlouženími stran AC, AB. Bod N je průsečíkem osy vnitřního úhlu při vrcholu A a os vnějších úhlů při vrcholech B a C v trojúhelníku ABC, viz např obr. 1. Dále platí $a = |BC| = |BC'| = |CB'|$ a podle věty *sus* o shodnosti trojúhelníků tak máme

$$\triangle B'CN \simeq \triangle BCN \simeq \triangle BC'N. \tag{1}$$

Paty výšek z vrcholu N ke stranám BC, $B'C$ a BC' (body U_a, U_b a U_c) dělí tyto strany vždy na dva shodné úseky, tj. platí $|B'U_b| = |BU_a| = |BU_c|$ a také $|CU_b| = |CU_a| = |C'U_c|$. Odtud plyne

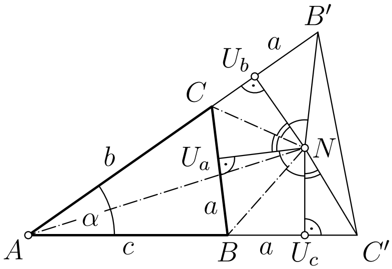
$$\varepsilon = |\sphericalangle B'NU_b| = |\sphericalangle U_aNB| = |\sphericalangle U_cNB|$$

a také

$$\varphi = |\sphericalangle CNU_b| = |\sphericalangle CNU_a| = |\sphericalangle U_cNC'|.$$

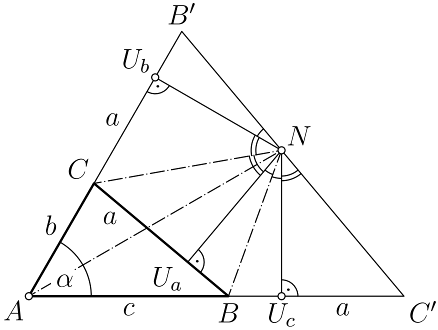
Vzhledem k tomu, že čtyřúhelník AU_cNU_b je tětivový, platí $2(\varepsilon+\varphi) = 180^\circ - \alpha$, a tedy $\varepsilon + \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

Je-li $\alpha < 60^\circ$, je N vnitřním bodem trojúhelníku $AB'C'$ a jeho stranu $B'C'$ vidíme z bodu N pod úhlem $360^\circ - 3(\varepsilon+\varphi) = 90^\circ + \frac{3}{2}\alpha$ (obr. 1).



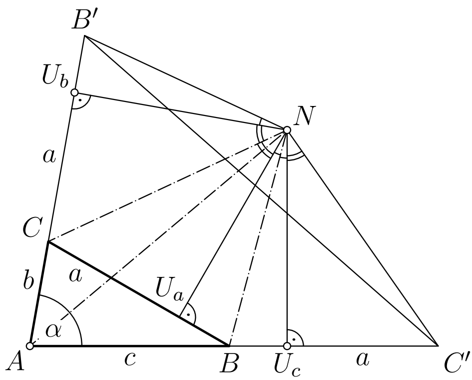
Obr. 1

Je-li $\alpha = 60°$, je bod N vnitřním bodem strany $B'C'$ (obr. 2).



Obr. 2

Je-li $\alpha > 60°$, je N vnějším bodem trojúhelníku $AB'C'$ a jeho stranu $B'C'$ vidíme z tohoto bodu pod úhlem $3(\varepsilon + \varphi) = 270° - \frac{3}{2}\alpha$ (obr. 3).



Obr. 3

Odtud již plyne konstrukce trojúhelníku ABC: Sestrojíme střed N kružnice vně připsané straně BC hledaného trojúhelníku ABC jako průsečík kružnicového oblouku (popř. přímo strany $B'C'$, je-li $\alpha = 60°$), z jehož každého bodu vidíme úsečku $B'C'$ pod výše uvedeným úhlem (rozlišíme případy, kdy $\alpha < 60°$, $\alpha = 60°$ a $\alpha > 60°$). K sestrojení bodů B a C po řadě uvnitř stran AC' a AB' využijeme např. shodnosti trojúhelníků (1), z nichž plyne $|NB| = |NB'|$ a $|NC| = |NC'|$.

Úloha má vždy právě 1 řešení.

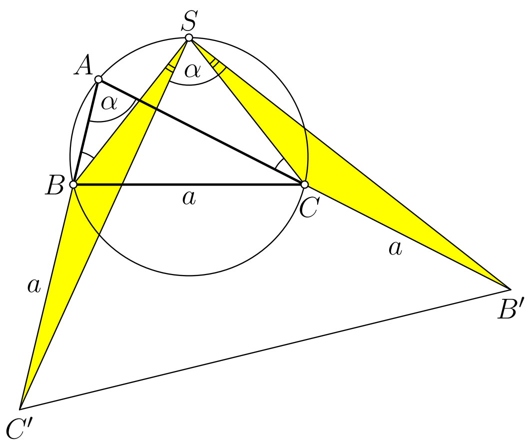
Jiné řešení (podle R. Olšáka). Na polopřímkách AB a AC sestrojme po řadě body C' a B' tak, že platí $|AC'| = a + c$ a $|AB'| = a + b$. Uvažujme střed S oblouku BAC kružnice opsané trojúhelníku ABC. Podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly ABS a ACS shodné, tedy jsou shodné i úhly $C'BS$ a $B'CS$. Z rovností $|SB| = |SC|$ a $|BC'| = |BC| = |B'C|(= a)$ plyne, že trojúhelníky $BC'S$ a $CB'S$ jsou shodné podle věty *sus*, tedy

$$|SC'| = |SB'|.$$

Navíc ze shodnosti úhlů BSC' a CSB' plyne, že

$$|\sphericalangle C'SB'| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha.$$

Tedy bod S je také středem oblouku $C'AB'$ kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$.



Obr. 4

Dále z rovnosti $|BC| = |B'C|$ a z podobnosti trojúhelníků BSC a $C'SB'$ plyne

$$\frac{|B'C|}{|C'B'|} = \frac{|BC|}{|C'B'|} = \frac{|SB|}{|SC'|} = \frac{|SC|}{|SC'|},$$

tedy

$$\frac{|B'C|}{|SC|} = \frac{|B'C'|}{|SC'|}.$$

Body C' a C tak mají stejný poměr vzdáleností od bodů B' a S, leží proto na téže Apolloniově kružnici vzhledem k bodům B' a S (v případě $\alpha = 60°$ se jedná o přímku). Takovou kružnici již umíme sestrojit, jejím průměrem ($\alpha \neq 60°$) je průsečík os vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu C' trojúhelníku $B'C'S$ s přímkou $B'S$.

Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme trojúhelník $AB'C'$ a střed S oblouku $C'AB'$ kružnice jemu opsané. Dále sestrojíme příslušnou Apolloniovu kružnici a její průsečík s úsečkou AB' je hledaný bod C.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Radek Olšák* z Mensa G v Praze 6.

Po uzávěrce minulého čísla ještě redakce obdržela správná řešení úloh 245 a 246 od *Martina Raszyka* z ETH Zürich.

Pavel Calábek