Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 245 a 246 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2018 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 245

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro všechna reálná čísla x vyhovují rovnici

$$f(2x) + f(-2x) = x\bigl(f(3x) + x^3\bigr).$$

Józef Kalinowski (*Kalety*)

Úloha 246

Kruhový terč s průměrem 12 zasáhlo 10 šípů. Rozhodněte, zda vzdálenost mezi každou dvojicí šípů může být aspoň 5.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 241 a 242, jejichž zadání najdete v prvním čísle tohoto (26.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 241

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 \geq \frac{2}{3}\,(xy + yz + zx + x + y + z).$$

Kdy nastane rovnost? *Jaroslav Švrček*

Řešení. Nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) + \\ + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) \geq 0$$

neboli

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0.$$

Poslední nerovnost evidentně platí, jelikož druhá mocnina reálného čísla je číslo nezáporné. Rovnost v ní nastane, právě když všechny sčítance na levé straně budou rovny nule, tedy právě když $x = y = z = 1$.

Jiné řešení. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí pro libovolná reálná čísla x a y

$$\frac{1}{3}(x^2 + y^2) \geq \frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2} = \frac{2}{3}|xy| \geq \frac{2}{3}xy.$$

Rovnost nastane, právě když nastane rovnost v obou postupných nerovnostech, tedy právě když $x = y$. Podobně platí

$$\frac{1}{3}(y^2 + z^2) \geq \frac{2}{3}yz, \qquad \frac{1}{3}(z^2 + x^2) \geq \frac{2}{3}xz,$$

přičemž rovnosti nastávají, právě když $y = z$ a $z = x$. Pokud v první z právě dokázaných nerovností položíme $y = 1$, ve druhé $z = 1$ a ve třetí $x = 1$, dostaneme nerovnosti

$$\frac{1}{3}(x^2 + 1) \geq \frac{2}{3}x, \qquad \frac{1}{3}(y^2 + 1) \geq \frac{2}{3}y, \qquad \frac{1}{3}(z^2 + 1) \geq \frac{2}{3}z,$$

ve kterých nastává rovnost pro $x = 1$, $y = 1$ a $z = 1$.

Sečtením všech šesti výše uvedených nerovností pak dostaneme požadovanou nerovnost, ve které rovnost nastává, právě když $x = y = z = 1$.

Jiné řešení (Alexy Wałczak). Čtveřice $(x, y, z, 1)$ a $(x, y, z, 1)$ jsou „souhlasně“ uspořádány, proto podle permutační nerovnosti současně platí

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 + 1^2 &\geq x \cdot y + y \cdot z + z \cdot 1 + 1 \cdot x,\\
x^2 + y^2 + z^2 + 1^2 &\geq x \cdot z + y \cdot 1 + z \cdot x + 1 \cdot y,\\
x^2 + y^2 + z^2 + 1^2 &\geq x \cdot 1 + y \cdot x + z \cdot y + 1 \cdot z.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností a vydělením 3 dostaneme požadovanou nerovnost.

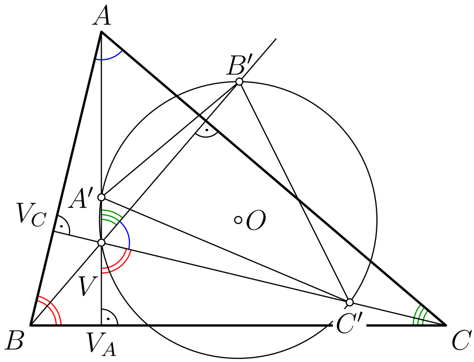
Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Wałczak*, LO Tarnowskie Góry.

Úloha 242

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek (ortocentrum). Předpokládejme, že kružnice $k(O, |OV|)$ protíná jeho výšky (jako přímky) z vrcholů A, B, C kromě bodu V po řadě v bodech $A' \neq V$, $B' \neq V$, $C' \neq V$. Dokažte, že trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC. *Šárka Gergelitsová*

Řešení. Pokud je trojúhelník pravoúhlý, jeho průsečíkem výšek je vrchol, u kterého svírají stany pravý úhel, bez újmy na obecnosti jej označme C a O je střed přepony AB. Potom platí $A' = A$, $B' = B$ a bod C' je souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB. Snadno nahlédneme, že v tomto případě tvrzení úlohy platí, protože trojúhelník $A'B'C'$ je souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle přímky AB.

Nyní předpokládejme, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme V_A, V_C patu výšek z vrcholů A resp. C (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky CBV_C a CVV_A se mimo pravého úhlu shodují také ve vnitřním úhlu při vrcholu C, jsou proto podobné. Shodují se tak i ve třetím vnitřním úhlu, proto má úhel V_AVC stejnou velikost jako vnitřní úhel trojúhelníku ABC při vrcholu B. Tedy je to úhel, který svírají výšky trojúhelníku ABC z vrcholů A a C. Podobně zjistíme, že výšky z vrcholů B a A svírají úhel jehož velikost je rovna velikosti vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C, resp. že výšky z vrcholů C a B svírají úhel, jehož velikost je rovna velikosti vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A.

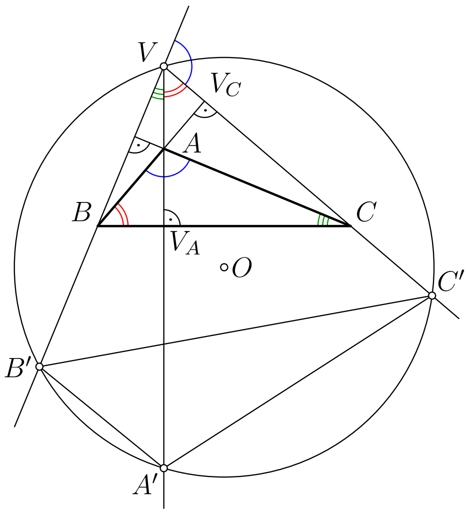


Obr. 1

Body A', B', C' a V leží na jedné kružnici. Uvažujme oblouky $A'B'C'$, $B'C'A'$ a $C'A'B'$ této kružnice. Pokud je bod V vnitřním bodem těchto oblouků (jako u oblouků $B'C'A'$ a $C'A'B'$ na obr. 1), je vidět podle věty o obvodovém úhlu v našem případě tětiva $A'B'$ pod stejným úhlem z vrcholů C' a V, tedy velikost vnitřního úhlu při vrcholu C' trojúhelníku $A'B'C'$ je stejná jako velikost vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC. Stejně dokážeme, že velikost vnitřního úhlu při vrcholu A' trojúhelníku $A'B'C'$ je stejná jako velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC.

Pokud není V vnitřním bodem těchto oblouků (jako u oblouku $A'B'C'$ na obr. 1) potom součet velikostí vnitřních úhlů v našem případě při vrcholech B' a V tětivového čtyřúhelníku $A'B'C'V$ je rovna 180°, tedy velikost vnějšího úhlu při vrcholu V je rovna velikosti vnitřního úhlu při vrcholu B' a trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ se tak shodují i ve velikosti vnitřních úhlů při vrcholech B a B'. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou proto podobné, jak jsme měli dokázat.

Zbývá dokázat tvrzení úlohy pro trojúhelník tupoúhlý. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tupý úhel je při vrcholu A (obr. 2).



Obr. 2

Stejně jako v předcházejícím případě můžeme dokázat, že výšky z vrcholů A a B svírají úhel o velikosti vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC a podobně výšky z vrcholů A a C svírají úhel o velikosti vnitřního úhlu při vrcholu B. Jelikož vnitřní úhel při vrcholu A je tupý, svírají výšky z vrcholů B a C úhel o velikosti vnějšího úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC.

Stejně jako v předcházejícím případě pak dokážeme, že velikost vnitřních úhlů při vrcholech B' a C' tro‘juhelníku $A'B'C'$ je stejná jako velikost vnitřních úhlů při vrcholech B a C trojúhelníku ABC, což postačuje k jejich podobnosti.

Poznámka. Jelikož (podle předpokladů) čtyři různé body A', B', C' a V leží na téže kružnici, je bod V vnitřním bodem právě dvou z výše zmíněných oblouků a vnějším bodem třetího. Dále si můžeme všimnout, že uvedené tvrzení platí nejen pro kružnici se středem v bodě O, ale pro libovolnou kružnici, která prochází bodem V a protíná výšky trojúhelníku ABC ve třech různých bodech.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Po uzávěrce minulého čísla ještě redakce obdržela správná řešení úloh 239 a 240 *Alexyho Wałczaka*, LO Tarnowskie Góry.

Pavel Calábek