Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 237 a 238 můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 237

Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D. Na jeho hranách AD, BD, CD uvažujme po řadě body X, Y, Z, pro něž platí

$$\frac{|AX|}{|XD|} + \frac{|BY|}{|YD|} + \frac{|CZ|}{|ZD|} = 1.$$

Dokažte, že těžiště tohoto čtyřstěnu leží v rovině XYZ.

Jaroslav Švrček

Úloha 238

Určete všechna celá čísla n, pro která je číslo

$$4n^2 - 9n + 16$$

druhou mocninou některého přirozeného čísla.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 233 a 234, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 233

Dokažte, že desítkový zápis nekonečně mnoha přirozených mocnin čísla 4 začíná číslicí 9.

Jacek Uryga & Pavel Calábek

Řešení. Důkaz tvrzení úlohy provedeme sporem. Předpokládejme, že takových mocnin existuje jen konečný počet. Potom existuje takové přirozené číslo a, že všechny přirozené mocniny čísla 4 začínající číslicí 9 jsou menší než 4^a. V dalším označme $\lfloor x \rfloor$ celou část reálného čísla x, tedy největší celé číslo, které není větší než x a $\{x\}$ desetinnou část reálného čísla x, tj číslo $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in \langle 0; 1)$.

Uvědomme si, že desítkový zápis přirozeného čísla A začíná číslicí 9, právě když $\log 9 \leq \{\log A\} < 1$. Tato nerovnost je totiž ekvivalentní s nerovností

$$9 \leq 10^{\log A - \lfloor \log A \rfloor} < 10,$$

a tedy i s nerovností

$$9 \cdot 10^{\lfloor \log A \rfloor} \leq A < 10 \cdot 10^{\lfloor \log A \rfloor},$$

která už uvedené tvrzení dokazuje, protože pro přirozené číslo A je $\lfloor \log A \rfloor$ celé nezáporné číslo. Číslo 4^a nezačíná číslicí 9, tedy platí $\{\log 4^a\} < \log 9$.

V další části si uvědomme, že číslo $4^5 = 1024$ je „velmi blízko“ třetí mocnině desítky. Vynásobením čísla 4^a číslem 4^5 se desetinná část jeho logaritmu zvětší o desetinnou část logaritmu čísla 4^5, tedy o číslo

$$\{\log 4^5\} = 5 \log 4 - 3 \doteq 0{,}0103.$$

Protože $\{\log 4^5\} < 1 - \log 9 \doteq 0{,}0456$, po jistém počtu k násobení číslem 4^5 bude desetinná část logaritmu čísla 4^{a+5k} ležet mezi čísly $\log 9$ a 1, přesněji řečeno po k vynásobeních, kde

$$k = \left\lfloor \frac{\log 9 - \{\log 4^a\}}{5 \log 4 - 3} \right\rfloor + 1.$$

Tím jsme dostali větší mocninu čísla 4 než 4^a, tedy číslo 4^{a+5k}, která začíná číslicí 9, což je hledaný spor.

Poznámka. Číslicí 9 začínají mocniny 4^a pro

$$a = 78, 83, 88, 93, 176, 181, 186, 191, \ldots$$

Správná řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

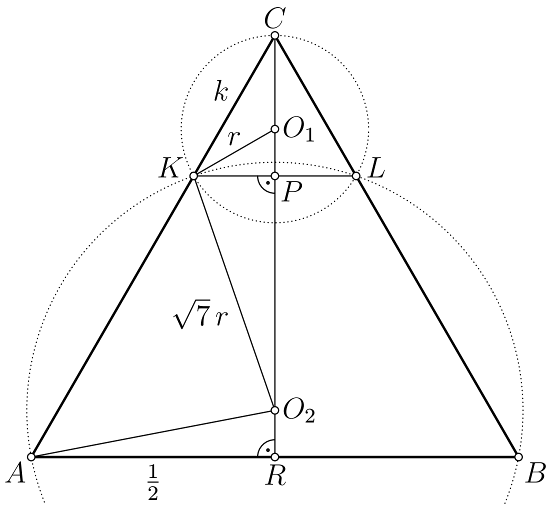
Úloha 234

Na stranách AC a BC rovnostranného trojúhelníku ABC leží po řadě body K a L tak, že čtyřúhelníku $ABLK$ lze opsat kružnici. Poloměr této kružnice je $\sqrt{7}$krát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku CKL. Určete poměr, ve kterém dělí body K a L strany AC a BC.

Jaroslav Zhouf

Řešení podle Karola Gajdoše.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany rovnostranného trojúhelníku ABC je 1. Vnitřní úhly při vrcholech A, B tětivového čtyřúhelníku $ABKL$ mají velikost 60°, proto velikosti jejich protějších úhlů mají velikost 120°, tedy $ABKL$ je rovnoramenný lichoběžník. Body K a L tak dělí strany AC a BC ve stejném poměru a trojúhelník CKL je rovnostranný. Označme k velikost jeho strany a r poloměr kružnice jemu opsané. Zřejmě platí $k = \sqrt{3}\, r$.



Označme O_1 střed kružnice opsané trojúhelníku CKL, P střed jeho strany KL, O_2 střed kružnice opsané čtyřúhelníku $ABLK$ a R střed jeho strany AB. Body C, O_1, P, O_2 a R zřejmě leží na společné ose úseček KL a AB. Velikost přepony KO_2 pravoúhlého trojúhelníku PKO_2 je dle zadání $\sqrt{7}\, r$, velikost jeho odvěsny je

$$|PK| = \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, r.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$|PO_2| = \frac{5}{2}\,r.$$

Dále podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku AO_2R s přeponou AO_2 délky $\sqrt{7}\,r$ a odvěsnou AR délky $\frac{1}{2}$ platí

$$|RO_2| = \sqrt{7r^2 - \frac{1}{4}}.$$

Výška PR lichoběžníku $ABKL$ má velikost

$$|PR| = |CR| - |CP| = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}r.$$

Tedy platí

$$(|PR| - |PO_2|)^2 = |RO_2|^2,$$

což po dosazení dává

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 4r\right)^2 = 7r^2 - \frac{1}{4}.$$

(Tato rovnice pokrývá oba případy, kdy bod O_2 může ležet uvnitř nebo vně lichoběžníku $ABKL$.) Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$9r^2 - 4\sqrt{3}\,r + 1 = 0$$

s kořeny $r_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a $r_2 = \frac{1}{9}\sqrt{3}$. Odtud vychází $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{3}$. V prvním případě nejsou body K, L vnitřními body úseček AC a BC. Ve druhém dělí úsečky AC a BC ve shodném poměru

$$\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{1}.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Walczak* z II LO v Tarnowskich Górach (Polsko).

Pavel Calábek