O rozhodování

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Rozhodování je těžká věc. Někdo se rozhoduje rád a s chutí, jiný se rozhodování vyhýbá, co jen to jde. Pro ty druhé existují různé triky, třeba rada „Hoďte si korunou!“. Ta rada není tak hloupá, jak vypadá, protože pokračuje „A když nebudete s výsledkem spokojeni a budete mít chuť hodit si znovu, pak si vyberte tu druhou možnost rozhodnutí.“

Ale kdo by dnes, ve věku chytrých telefonů, házel korunou. Tvůrci aplikací hledají, co všechno by mohli uživatelům nabídnout, takže když se podíváte do příslušného obchodu, aplikací na rozhodování tam jsou mraky.

Napsat program, který bude „házet korunou“ a náhodně vypisovat *ANO* nebo *NE*, nevypadá moc přitažlivě (i když i takové aplikace najdete), lepší (důvěryhodnější, i když my víme svoje) by bylo, kdyby program nechal uživatele napsat otázku a teprve potom odpověděl *ANO* nebo *NE*. A ještě lepší by bylo, kdyby na stejnou otázku odpovídal stejně, to pro případ, že by si někdo chtěl ověřit, jestli ten program je solidní nebo jenom hádá.

Aby program na stejnou otázku odpovídal pokaždé stejně, by šlo zařídit. Nešikovně tak, že si bude pamatovat všechny otázky a odpovědi na ně, šikovně tak, že odpověď (stejně na ní nesejde) bude nějak odvozovat z otázky. Třeba tak, že sečte počet písmen nebo přímo číselné kódy příslušných znaků a odpověď *ANO* nebo *NE* poskytne podle toho, zda bude výsledek sudý nebo lichý.

A tady začíná matematika. Když se totiž bude odpověď odvozovat takhle jednoduše, bude výsledek záviset na každém znaku. Třeba když se místo otázky „Mám psát úkol z matiky?“ zeptáme „Mám psát úkol z matematiky?“, je možné, že ta čtyři písmenka navíc způsobí změnu v odpovědi. Dá se tomu zabránit? Částečně ano, ukažme jak.

Představme si, že otázku rozdělíme na 3 části (neřešme zde jak), potom spočteme odpověď pro každou část zvlášť a výsledek určíme „většinově“, tj. jako převažující ze tří dílčích odpovědí. Co když teď místo „matiky“ napíšeme „matematiky“?

Odpovědi na tři části otázky mohly dopadnout osmi různými způsoby (*ANO* a *NE* budeme značit A a N), které podle navržené „většinové“

strategie povedou k následujícím celkovým odpovědím našeho programu:

$$\begin{aligned} NNN &\to N\\ NNA &\to N\\ NAN &\to N\\ NAA &\to A\\ ANN &\to N\\ ANA &\to A\\ AAN &\to A\\ AAA &\to A \end{aligned}$$

Co když teď změníme jednu část otázky? Promyslete sami, proč platí následující dva závěry.

Zaprvé, s pravděpodobností jedna polovina ta změna části otázky *nezmění* odpověď na této části.

Za druhé, pokud se odpověď na jedné části změní, tak

- v případech NNN a AAA se tím celková odpověď nezmění,
- v ostatních případech se změní jen tehdy, pokud změna postihla jednu ze dvou částí, jejichž odpověď „vyhrála“ v poměru 2 : 1.

Celkově tedy z $8 \times 3 = 24$ možných změn výsledku jedné části jenom $6 \times 2 = 12$, to je $\frac{1}{2}$ všech změn, povede ke změně celkového výsledku. Když vezmeme v úvahu to, že změna části otázky povede ke změně jí příslušné dílčí odpovědi jen v polovině případů, vychází nám, že při změně jedné části otázky máme pravděpodobnost $\frac{3}{4}$, že naše aplikace vydá stejnou odpověď jako původně.

A teď si představte, že náš nápad zaujal pozornost investora, který by o takovou aplikaci stál a byl by ochoten podporovat její vývoj, jenom požaduje, aby pravděpodobnost změny odpovědi při změně jedné části otázky nebyla $\frac{1}{4}$, ale méně než $\frac{1}{10}$. K tomu asi pomůže zvětšit počet částí, na které celou otázku rozdělíme. Ale kolik jich potřebujeme?

Aby bylo možné „většinově“ určovat celkovou odpověď, musíme rozdělit text otázky na lichý počet částí, řekněme $n = 2k + 1$, kde k je přirozené číslo.

Počítejme nejprve pravděpodobnosti změny výsledku (odpovědi programu), když nastane právě jedna změna ve výsledcích jednotlivých částí (změna jedné části *textu* pak tuto změnu způsobí s poloviční pravděpodobností).

- Počet všech možných odpovědí na $2k+1$ částí otázky je roven 2^{2k+1}.
- V každé z nich může ona jediná změna nastat na $2k + 1$ místech.

- Máme tedy $2^{2k+1} \cdot (2k+1)$ možností pro změnu výsledku jedné části.
- Významné změny (ty, které způsobí změnu celkové odpovědi) nastanou jen v konfiguracích, kde se počet písmen A a písmen N liší o 1.
- Takových „rizikových“ konfigurací je $2 \cdot \binom{2k+1}{k+1}$ (pro $k+1$ písmen A a k písmen N, či pro $k+1$ písmen N a k písmen A).
- Významná změna je ta, která počty písmen A a N vymění, tj. přepíše jednu z dosud převažujících hodnot – tedy z těch hodnot, kterých bylo $k+1$. Významná změna tedy v každé „rizikové“ konfiguraci může nastat na $k+1$ pozicích.
- Počet všech takových významných změn je proto $(k+1) \cdot 2 \cdot \binom{2k+1}{k+1}$.

Pravděpodobnost, že změna odpovědi na jednu část textu změní celkovou odpověď, proto je

$$P(k) = \frac{(k+1) \cdot 2 \cdot \binom{2k+1}{k+1}}{(2k+1) \cdot 2^{2k+1}} = \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{\binom{2k+1}{k+1}}{2^{2k}} = \frac{\frac{k+1}{2k+1}\binom{2k+1}{k+1}}{2^{2k}} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}.$$

Pravděpodobnost, že změna *textu* jedné části otázky změní celkovou odpověď (pravděpodobnost, že změna *textu* změnila odpověď této části, je $\frac{1}{2}$), proto je

$$Q(k) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k+1}}.$$

Upravíme-li uvedený výraz v součin zlomků, dostaneme vzorec

$$Q(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i}.$$

- Pro $k = 1$, tj. 3 části: $Q(1) = \dfrac{\binom{2}{1}}{2^3} = \dfrac{1}{4}$.
- Pro $k = 2$, tj. 5 částí: $Q(2) = \dfrac{\binom{4}{2}}{2^5} = \dfrac{3}{16}$.
- Pro $k = 3$, tj. 7 částí: $Q(3) = \dfrac{\binom{6}{3}}{2^7} = \dfrac{5}{32}$.
- Pro $k = 4$, tj. 9 částí: $Q(4) = \dfrac{\binom{8}{4}}{2^9} = \dfrac{35}{256} \doteq 0{,}1367\ \ldots$

K požadované hodnotě $\frac{1}{10}$ se sice blížíme, ale dosti pomalu, neboť zlomky $\frac{2k-1}{2k}$ z rekurentního vztahu

$$Q(k) = \frac{2k-1}{2k}\,Q(k-1)$$

se se zvětšujícím se k rychle blíží jedné. A navíc můžeme očekávat, že investor přijde po roce s požadavkem na upgrade a požadovanou pravděpodobnost sníží na $\frac{1}{40}$ ($\frac{1}{100}$, ...). Na kolik částí bude potřeba rozdělit text otázky, aby pravděpodobnost, že změna textu v jedné části změní výsledek, byla menší než požadovaná hodnota? Ukažme v dalším textu, že posloupnost kladných čísel $Q(k)$ má skutečně nulovou limitu pro $k \to \infty$, takže potřebné dělení textu otázky je alespoň teoreticky možné.

Uvažujme opět pravděpodobnost, že změna jedné z $2k+1$ dílčích odpovědí změní celkovou odpověď, tedy hodnotu

$$P(k) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}.$$

Odhady hodnoty $\binom{2k}{k}$, tj. „prostředního binomického koeficientu“, jsou známy a můžeme je nalézt v literatuře. Odhady námi odvozené pravděpodobnosti nevyžadují žádné pokročilejší znalosti matematiky, proto je zde odvodíme. Vyžadují jen několik „trikových“ úprav spočívajících ve vhodném zápisu součinů. Pro $k = 1$ je

$$P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

a pro $k > 1$ platí (pro lepší představu vyjádříme $P(k)$ pro „velké“ k):

$$P(k) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot k!\cdot k!} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k} =$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}.$$

Místo hodnoty $P(k)$ budeme odhadovat (shora i zdola) její druhou mocninu.

$$P^2(k) = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2k)^2} =$$
$$= \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2k-1)\cdot(2k+1)}{(2k)^2}\cdot\frac{1}{2k+1}. \qquad (1)$$

Protože pro každé $m \neq 0$ je

$$\frac{(2m-1)\cdot(2m+1)}{(2m)^2} = \frac{(2m)^2-1}{(2m)^2} = 1 - \frac{1}{(2m)^2} < 1,$$

je výraz (1) menší než $\frac{1}{2k+1}$, tj.

$$P^2(k) < \frac{1}{2k+1},$$

a tedy

$$P(k) < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Pro dolní odhad $P^2(k)$ odhadněme shora převrácenou hodnotu $P^2(k)$. Použijeme přitom analogické rozdělení na zlomky, které jsme již odhadovali:

$$\frac{1}{P^2(k)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k-2)\cdot(2k)}{3^2\cdot5^2\cdot\ldots\cdot(2k-1)^2}\cdot\frac{2k}{1} =$$

$$= \frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{4\cdot6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2k-2)\cdot(2k)}{(2k-1)^2}\cdot\frac{2\cdot2k}{1}.$$

Protože pro každé $m \neq \frac{1}{2}$ je

$$\frac{(2m-2)\cdot(2m)}{(2m-1)^2} = \frac{(2m-1)^2-1}{(2m-1)^2} = 1 - \frac{1}{(2m-1)^2} < 1,$$

dostáváme pro každé $k > 1$ nerovnost

$$\frac{1}{P^2(k)} < 4k,$$

a tedy kýžený dolní odhad ve tvaru

$$P(k) > \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Zkoumanou pravděpodobnost jsme tak oboustranně odhadli nerovnostmi

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < P(k) < \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Proto pravděpodobnost

$$Q(k) = \frac{1}{2}P(k),$$

že totiž změna jedné z $2k+1$ částí textu otázky vyvolá změnu celkové odpovědi, je odhadnutelná výrazy

$$\frac{1}{4\sqrt{k}} < Q(k) < \frac{1}{2\sqrt{2k}}. \tag{2}$$

Využijme odvozené odhady pro řešení naší úlohy, ve které pro danou (malou) kladnou hodnotu L hledáme co nejmenší číslo k s vlastností $Q(k) < L$. Z levé nerovnosti v (2) plyne, že každé vyhovující k musí splňovat nerovnost

$$\frac{1}{4\sqrt{k}} < L \text{ neboli } k > \frac{1}{16L^2} \quad \text{(nutná podmínka).}$$

Naopak z pravé nerovnosti v (2) plyne, že požadovanou nerovnost $Q(k) < L$ má každé číslo k, pro které

$$\frac{1}{2\sqrt{2k}} < L \text{ neboli } k > \frac{1}{8L^2} \quad \text{(postačující podmínka).}$$

Má-li tudíž být pravděpodobnost, že změna jedné z $2k+1$ částí textu změní celkovou odpověď, menší než $L = 0{,}1$, dostáváme pro k postačující podmínku $k > \frac{1}{8} \cdot 10^2$, tj. $k > 12$, a nutnou podmínku $k > \frac{1}{16} \cdot 10^2$, tj. $k > 6$. Skutečná nejmenší hodnota k, při které bude hledaná pravděpodobnost menší než 0,1, leží mezi těmito hodnotami. Byli bychom se k ní dopočítali po osmi krocích: $k = 8$. Text bude proto nutné rozdělit alespoň na $2 \cdot 8 + 1 = 17$ částí.

Kdyby investor požadoval pravděpodobnost uvedeného jevu menší než $L = 0{,}025$, dostali bychom pro k postačující podmínku $k > \frac{1}{8} \cdot 40^2$, tj. $k > 200$, a nutnou podmínku $\frac{1}{16} \cdot 40^2$, tj. $k > 100$. Skutečná nejmenší hodnota k, pro které je hledaná pravděpodobnost menší než 0,025, je $k = 128$, tudíž text bude potřeba dělit na 257 částí.

Konečně, kdybychom pro obzvlášť důležité otázky chtěli jistotu větší než 99 % (tedy pravděpodobnost změny výsledku menší než 0,01), postačující a nutná podmínka budou po řadě $k > \frac{1}{8} \cdot 100^2$, tj. $k > 1250$, resp. $\frac{1}{16} \cdot 100^2$, tj. $k > 625$, se skutečnou nejmenší hodnotou k rovnou 796. Jenže zkuste rozdělit otázku „Má mě ráda?“ na 1 593 částí…