MATEMATIKA

Užití stochastického grafu ke sčítání aritmeticko-geometrické řady

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Uvažujme aritmetickou posloupnost s diferencí d, jejíž n-tý člen má tvar $a+(n-1)d$, a geometrickou posloupnost s kvocientem $|q|<1$ s n-tým členem bq^{n-1}. Nekonečnou *aritmeticko-geometrickou* řadou nazýváme řadu

$$ab+(a+d)bq+(a+2d)bq^2+\ldots+\big(a+(n-1)d\big)bq^{n-1}+\ldots$$

Její n-tý člen je součinem n-tých členů aritmetické a geometrické posloupnosti.

Cílem našeho příspěvku je ukázat několik přístupů, jak lze odvodit součet s této nekonečné řady. Svoji pozornost zaměříme především na využití stochastického grafu. Vzhledem k tomu, že

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}\big(a+nd\big)bq^n,$$

můžeme (po roznásobení a roztržení na dvě sumy[1)]) upravit s na tvar

$$s=ab\sum_{n=0}^{\infty}q^n+bd\sum_{n=0}^{\infty}nq^n.$$

[1)] Pro věcnou správnost je třeba poznamenat, že takové manipulace s nekonečnými řadami jsou korektní, pokud jde o tzv. *absolutně konvergentní řady*, což je tento případ.

První suma nepředstavuje žádný problém, neboť se jedná geometrickou řadu s kvocientem $|q| < 1$ a k jejímu součtu užijeme známý vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

K nalezení součtu řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$$

můžeme použít některý z následujících postupů:

1. (limitní přechod)

Vyjdeme z definice součtu nekonečné řady jako limity posloupnosti částečných součtů. Proto nejprve odvodíme vzorec pro částečný součet

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k.$$

Úpravou výrazu $s_n - qs_n$ získáme rovnost

$$s_n = \frac{q(1-q^{n-1})}{(1-q)^2} - \frac{q^n(n-1)}{1-q}.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme hledaný vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Podrobně je tento postup popsán v [1].

2. (derivování vzorce)

Tento přístup vychází ze vzorce

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

a věty o derivování řady člen po členu (k tomu je opět nutné, aby derivovaná řada byla absolutně konvergentní). Derivujeme podle q levou a pravou stranu rovnosti

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q},$$

dostaneme

$$0 + 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2},$$

a tedy platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Po vynásobení rovnosti výrazem q dostaneme hledaný vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

3. (přerovnání řady)

Jednotlivé sčítance řady $q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots$ přerovnáme a upravíme takto:

$$\begin{array}{r||ccccccccc}
q & q & & & & & & & & \\
2q^2 & q^2 & + & q^2 & & & & & & \\
3q^3 & q^3 & + & q^3 & + & q^3 & & & & \\
4q^4 & q^4 & + & q^4 & + & q^4 & + & q^4 & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
nq^n & q^n & + & q^n & + & q^n & + & q^n & & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\hline
\sum_{n=0}^{\infty} nq^n & \frac{q}{1-q} & & \frac{q^2}{1-q} & & \frac{q^3}{1-q} & & \frac{q^4}{1-q} & & \cdots
\end{array}$$

Nejprve sečteme jednotlivé sloupce, což jsou geometrické řady s kvocientem q. Tyto součty jsou v posledním řádku tabulky. Součet všech takových součtů je roven $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$. Odtud dostáváme

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q}+\frac{q^3}{1-q}+\frac{q^4}{1-q}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{1-q}(q+q^2+q^3+q^4+\ldots)=\frac{1}{1-q}\frac{q}{1-q}.$$

Tím jsme získali vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

4. (stochastický graf)

Uvažujme pokus mající dva možné výsledky – *úspěch* (nastane s pravděpodobností $1-q$) a *neúspěch* (nastane s pravděpodobností q). Pokus opakujme (nezávisle na výsledcích předchozích pokusů) tak dlouho, dokud nenastane první úspěch. Zajímá nás *Kolikrát (v průměru) musíme pokus opakovat, než nastane první úspěch?*

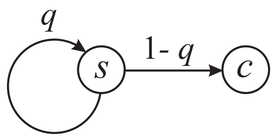
O tom, kolikrát budeme pokus opakovat, rozhoduje náhoda. Úspěch může nastat hned v prvním pokusu (a to s pravděpodobností $1-q$), nebo ve druhém pokusu (s pravděpodobností $(1-q)\cdot q$), nebo až ve třetím pokusu (s pravděpodobností $(1-q)\cdot q^2$), ale teoreticky můžeme na úspěch čekat do nekonečna. Zkoumaná náhodná veličina T tedy nabývá hodnot $1,2,3,\ldots$ s pravděpodobnostmi

$$P(T=n)=(1-q)\cdot q^{n-1}.$$

„Průměrný“ počet pokusů, které musíme vykonat, než poprvé nastane úspěch, je střední hodnota ET náhodné veličiny. Střední hodnota představuje vážený průměr možných hodnot, kde váhy jsou pravděpodobnosti těchto hodnot. Tedy

$$ET=1\cdot(1-q)+2\cdot(1-q)q+3\cdot(1-q)q^2+\ldots=(1-q)\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}. \quad (1)$$

Hodnotu ET určíme pomocí stochastického grafu na obr. 1. Na začátku stojíme v uzlu ⓢ a provedeme pokus. Pokud byl pokus úspěšný, přejdeme do uzlu ⓒ a naše čekání na úspěch končí. Byl-li pokus neúspěšný, zůstáváme v uzlu ⓢ a provádíme další pokus.



Obr. 1

Označme ET očekávaný počet pokusů, které musíme vykonat, stojíme-li v bodě ⓢ, než přejdeme do uzlu ⓒ. Pokud nastane úspěch hned v prvním pokusu, je délka čekání 1. Skončí-li pokus neúspěchem (což nastane s pravděpodobností q), zůstaneme v uzlu ⓢ. Situace se vrací na začátek, jen čekání se o 1 prodlužuje. Proto platí vztah

$$ET = 1 + qET.$$

Odtud dostaneme, že

$$ET = \frac{1}{1-q}.$$

Dosazením za ET do vztahu (1) vznikne rovnost

$$\frac{1}{1-q} = (1-q)\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1},$$

ze které po úpravě dostaneme hledaný vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n} = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Sčítání řad s využitím stochastického grafu je univerzální technika, kterou můžeme využít i pro jiné řady než jen pro řadu aritmeticko-geometrickou.

Literatura

[1] *Calda, E.*: Součet nekonečné řady aritmeticko-geometrické, MFI, roč. 22 (2013), č. 4.

[2] *Tlustý, P., Krech, I.*: Stochastické grafy jako nástroj řešení matematických úloh, MFI, roč. 19 (2010), č. 5.

[3] *Krech, I., Tlustý, P.*: Stochastické grafy a jejich aplikace, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2012.

[4] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé, Prometheus, Praha, 2007.