Zajímavé matematické úlohy

V pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy začínáme nový ročník a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 231 a 232 můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 231

Nechť S je střed pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1A_2\dots A_{12}$. Označme R průsečík přímek A_4A_9 a A_6A_{11}. Dokažte, že čtyřúhelník A_9RSA_{11} je tětivový.

Karel Pazourek

Úloha 232

Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran a obvodem 28. Dokažte, že z kruhu o poloměru 10 lze vystřihnout čtyři kopie tohoto obdélníku.

Josef Tkadlec

Dále uvádíme řešení úloh 227 a 228, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle minulého ročníku našeho časopisu.

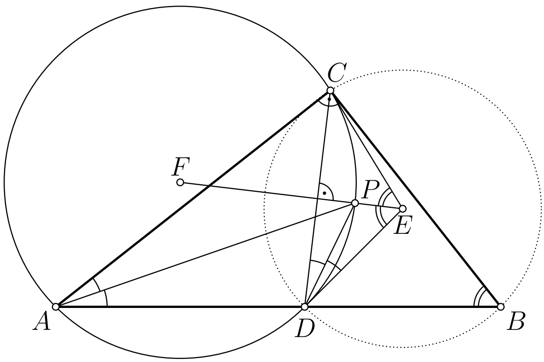
Úloha 227

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, pro jehož odvěsny platí $|AC|>|BC|$. Nechť D je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB a E, F nechť značí po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům BDC, ADC. Dokažte, že průsečík P osy vnitřního úhlu při vrcholu A a přímky EF je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE.

Jaroslav Švrček & Waldemar Pompe (Warszawa)

Řešení. Středy E a F kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům BDC, ADC leží na ose společné strany CD, tedy přímka EF je osou úsečky CD. Z rovnosti poloměrů $|CE| = |DE|$ kružnice opsané trojúhelníku BCD plyne, že trojúhelník CDE je rovnoramenný a osa jeho základny CD je tak osou jeho vnitřního úhlu při vrcholu E. Velikost středového úhlu CED kružnice opsané trojúhelníku BCD je rovna dvojnásobku jemu odpovídajícího úhlu CBD. Protože EF je osa úhlu CED, platí $|\sphericalangle FEC| = |\sphericalangle CBD|$ a zbývající úhly v pravoúhlých trojúhelnících s přeponami AB a ED (viz obr.) jsou shodné, a navíc platí $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAD|$.

Přímka AP je osou vnitřního úhlu trojúhelníku ACD při vrcholu A, přímka EF je osou jeho strany CD. Tyto dvě přímky se tedy protínají ve středu oblouku CD (neobahujícího bod A) kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Velikosti obvodových úhlů odpovídajících tětivě CP této kružnice jsou shodné, platí tedy $\frac{1}{2}|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CDP|$ a ze shodnosti úhlů DAC a EDC tak plyne, že přímka DP je osou vnitřního úhlu trojúhelníku CDE při vrcholu D.



Osy vnitřních úhlů trojúhelníku CED při vrcholech E a D se protínají v bodě P, který je tak středem kružnice vepsané tomuto trojúhelníku, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Josef Minařík* z G v Brně, Kpt. Jaroše, *Ondřej Motlíček* z G v Šumperku, *Hedvika Ranošová* z G v Praze 4, Budějovická, *Martin Raška* z WG v Ostravě-Porubě a *Jáchym Solecký* z PORG v Praze 8.

Úloha 228

Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ $(ac \neq 0)$, pro něž jsou

$$\overline{ab} + \overline{cd}, \quad \overline{ab} - \overline{cd}, \quad (\overline{ab} + \overline{cd})/(\overline{ab} - \overline{cd}) \quad \text{a} \quad a + b + c + d$$

druhými mocninami některých přirozených čísel.

Radek Horenský

Řešení. Nechť m, n jsou přirozená čísla, pro která platí

$$\overline{ab} + \overline{cd} = m^2, \qquad \overline{ab} - \overline{cd} = n^2.$$

Součet a rozdíl libovolných dvou celých čísel mají stejnou paritu, tedy i čísla m a n mají stejnou paritu. Řešením soustavy dostaneme

$$\overline{ab} = \tfrac{1}{2}(m^2 + n^2), \qquad \overline{cd} = \tfrac{1}{2}(m^2 - n^2).$$

Protože $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ jsou dvojmístná čísla, můžeme čísla m^2 a n^2 v odhadnout hodnotami $20 \le m^2 < 200$, $1 \le n^2 < 90$. Proto

$$m \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}, \quad n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Třetí podmínka, že $(\overline{ab} + \overline{cd})/(\overline{ab} - \overline{cd})$ je druhou mocninou přirozeného čísla, znamená, že $n \mid m$. Navíc $m > n$, protože $\overline{cd}$ je dvojmístné (tedy kladné) číslo.

Rozeberme jednotlivé situace podle proměnné n.

a) Pokud $n = 1$, potom m je liché číslo větší než n. Hodnoty vypočtené podle v těchto případech jsou uvedeny v následující tabulce.

m	5	7	9	11	13
n	1	1	1	1	1
$\overline{ab}$	13	25	41	61	85
$\overline{cd}$	12	24	40	60	84

Podmínce, že součet číslic $a + b + c + d$ je druhou mocninou přirozeného čísla vyhovují pouze čísla $\overline{abcd} \in \{4140; 8584\}$.

b) Pokud $n = 2$, potom m je sudé číslo větší než n. Hodnoty vypočtené podle v těchto případech jsou uvedeny v následující tabulce.

m	6	8	10	12	14
n	2	2	2	2	2
$\overline{ab}$	20	34	52	74	100
$\overline{cd}$	16	30	48	70	96

V poslední dvojici nejsou dvě dvojmístná čísla. Podmínce, že součet číslic $a+b+c+d$ je druhou mocninou přirozeného čísla vyhovuje pouze číslo $\overline{abcd} = 2016$.

c) Pokud $n = 3$, potom m je lichý násobek n větší než 3. Takový existuje právě jeden, a to $m = 9$. Těmto číslům odpovídají dvojice $\overline{ab} = 45$, $\overline{cd} = 36$. Tato dvojice ovšem nevyhovuje podmínce pro součet číslic $a + b + c + d$.

d) Pokud $n = 4$, potom m je násobek 4 větší než 4. Hodnoty vypočtené podle v těchto případech jsou uvedeny v následující tabulce.

m	8	12
n	4	4
$\overline{ab}$	40	80
$\overline{cd}$	24	64

Podmínce, že součet číslic $a+b+c+d$ je druhou mocninou přirozeného čísla nevyhovuje žádné číslo.

e) Pokud $n = 5; 7; 9$, potom m je lichý násobek n větší než n. Takové číslo m ovšem v dané množině neexistuje.

f) Pokud $n = 6$, potom m je násobek 6 větší než 6. Této podmínce vyhovuje pouze $m = 12$, potom $\overline{ab} = 90$, $\overline{cd} = 54$. Tato dvojice ovšem nevyhovuje podmínce pro součet číslic $a + b + c + d$.

g) Pokud $n = 8$, potom m je násobek 8 větší než 8. Takové číslo ovšem v přípustné množině neexistuje.

Podmínkám úlohy vyhovují tři trojice čísel $\overline{abcd}$, jsou to čísla 2016, 4140 a 8584.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Danil Koževnikov* a *Jan Petr*, oba z GJK v Praze 6, Parléřova, *Jakub Mestek* z G v Jihlavě, Jana Masaryka, *Josef Minařík* a *Ondřej Svoboda*, oba z G v Brně, Kpt. Jaroše, *Ondřej Motlíček* z G v Šumperku, *Martin Raška* a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě. Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek