Česko-polsko-slovenská MO juniorů

JAROMÍR ŠIMŠA – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta MU, Brno – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Před časem lety jsme v našem časopise přinesli krátkou informaci o nové mezinárodní matematické soutěži pro žáky ve věku do 16 let, viz [1], která nese dnes již zaběhnutý název Česko-polsko-slovenská matematická olympiáda juniorů (CPS MO juniorů). Již z jejího názvu je patrné, které tři středoevropské země se exkluzivně této soutěže účastní.

Cílem tohoto příspěvku je podrobněji seznámit čtenáře se strukturou soutěže, její přípravou a také s úlohami, které soutěžící řešili v dosud posledním, 5. ročníku této soutěže. Ten se konal od 15. do 18. května 2016 na Slovensku (v hotelu Kľak na Fačkovském sedle). Pro úplnost uvádíme, že první tři ročníky soutěže organizovali polští kolegové (první a druhý ročník se konal v Mszaně Dolné, třetí ročník se uskutečnil ve Szczyrku, obojí v polských Beskydech). Čtvrtý ročník pak uspořádala česká Ústřední komise MO v Karlově pod Pradědem.

Během pěti let existence získala tato mezinárodní matematická soutěž svou autentickou podobu. Soutěže se pravidelně účastní šestičlenná družstva nejlepších mladých olympioniků z Polska, Slovenska a České republiky, tedy vždy 18 soutěžících. Vlastní soutěž má dvě části, které probíhají ve dvou soutěžních dnech. První soutěžní den je to soutěž jednotlivců, kdy žáci řeší v čase 3,5 hodiny pětici soutěžních úloh, druhý soutěžní den se pak koná soutěž (tříčlenných) družstev sestavených (vylosovaných) po jednom zástupci z každé participující země. Během této soutěže, která trvá 5 hodin, řeší družstva 6 náročnějších úloh. Jedná se tedy o zcela výjimečnou týmovou soutěž, při níž dorozumívacím jazykem mezi členy družstva je zpravidla angličtina. Na základě pětileté zkušenosti lze konstatovat, že právě tato část CPS MO juniorů je pro většinu soutěžících velmi atraktivní. Jejím výrazným pozitivem je navíc skutečnost, že soutěžící se tak poprvé seznamují s moderním pojetím mezinárodní týmové spolupráce v oblasti matematiky.

Nominace do reprezentačních družstev je v případě České republiky a Slovenska podobná. Družstva jsou vybírána na základě doporučení Krajských komisí MO a dále pak na základě dvou náročnějších testů v průběhu výběrového soustředění, na něž je každoročně zváno nejvýše 12 matematických nadějí z celé republiky. Polský reprezentační tým je sestavován přímo z vítězů finále polské Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (OMG), viz [3], což je matematická soutěž věkově odpovídající kategorii C v české a slovenské MO.

Aby si čtenář učinil lepší představu o náročnosti úloh v obou částech soutěže, uvedeme nejprve přehled všech úloh použitých v letošním 5. ročníku CPS MO juniorů. Úlohy soutěže jednotlivců jsou uvedeny v jazyce českém a zadání týmové soutěže v trojjazyčné verzi tak, jak ji obdrželi všichni účastníci.

Soutěž jednotlivců

(pondělí, 16. května 2016)

1. V rovině je dána úsečka AB se středem M. Uvažujme množinu všech pravoúhlých trojúhelníků ABC s přeponou AB, v nichž D značí patu výšky z vrcholu C a K, L jsou paty kolmic z bodu D po řadě k odvěsnám BC, AC. Určete, jaký je největší možný obsah čtyřúhelníku $MKCL$.

2. Pro reálná čísla x, y platí $x^2+y^2-1 < xy$. Dokažte, že $x+y-|x-y| < 2$.

3. Určete všechna celá čísla $n \geq 3$, pro něž je možné označit vrcholy pravidelného n-bokého hranolu navzájem různými kladnými celými čísly tak, aby vrcholy označené čísly a a b byly spojeny hranou, právě když platí $a \mid b$ nebo $b \mid a$.

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC| < |BC|$. Na stranách AC a BC jsou zvoleny po řadě body K a L tak, že platí $|AB| = |CK| = |CL|$. Osy úseček AK a BL protínají přímku AB po řadě v bodech P a Q. Úsečky KP a LQ se protínají v bodě M. Dokažte, že $|AK| + |KM| = |BL| + LM|$.

5. Určete nejmenší celé číslo j, pro které lze do jednotlivých polí čtvercové tabulky 10×10 vepsat celá čísla od 1 do 100 tak, aby každých 10 po sobě jdoucích čísel leželo v některé čtvercové části $j \times j$ celé tabulky.

Úlohy týmové soutěže jsou pro soutěžící připraveny vždy po dvou v jazyce českém, slovenském a polském. Jejich řešení píší žáci v jazyce, který je stanoven v obdržených pokynech spolu s texty úloh (viz zadání soutěže družstev – níže). V soutěži jednotlivců odevzdávají žáci svá řešení v mateřském jazyce, podobně jako na IMO nebo na MEMO[1].

Team Competition

(Tuesday, 17th May 2016)

1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu výšky z vrcholu C. Nechť Q, R a P jsou po řadě středy úseček AD, BD a CD. Dokažte, že platí $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180°$.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

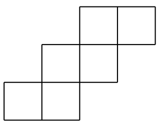
2. Najděte největší možné celé číslo d, které současně dělí tři trojmístná čísla $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ a $\overline{cab}$, kde a, b a c jsou vhodné nenulové a navzájem různé číslice.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Na płaszczyźnie poprowadzano pewną liczbę prostych tak, że każda przecina dokładnie 15 innych. Ile prostych poprowadzono? Scharakteryzuj wszestkie możliwe konfiguracje i uzasadnij, że nie ma innych.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Pewną liczbę płytek przystających do przedstawionej na rysunku należy umieścić wewnątrz kwadratu o wymiarach 11×11 podzielenego na pola będące kwadratami jednostkowymi w taki sposób, aby kazda plytka pokrywała dokładnie 6 pól, żadna nie wystawala poza kwadrat oraz żadne dwie nie niepokrywały tego samego pola.



(a) Wyznacz największą możliwą liczbę płytek, którą można umieścić wewnątrz kwadratu w opisany sposób.

(b) Znajdź wszystkie pola, które muszą zostać przykryte przy każdym pokryciu z użyciem maksymalnej liczby płytek

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

[1] Podrobné výsledky 5. CPS MO juniorů lze najít např. na webovských stránkách [2].

5. Daný je trojuholník ABC taký, že $|AB| : |AC| : |BC| = 5 : 5 : 6$. Označme M stred strany BC a N taký bod na strane BC, že $|BN| = 5\,|CN|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojúholníku ABN je stredom úsečky spájajúcej stredy kružíc vpísaných trojúholníkom ABC a ABM.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Dané je kladné celé číslo k. Nájdite všetky trojice kladných celých čísel a, b, c, ktoré spĺňajú rovnosti

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3k + 1, \\ ab + bc + ca &= 3k^2 + 2k. \end{aligned}$$

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

Jak se soutěž připravuje?

Příprava jednotlivých ročníků soutěže probíhá ustáleným způsobem. Každá účastnická země zašle po oslovení (zhruba 3 měsíce před vlastní soutěží) organizátorům aktuálního ročníku soutěže čtyři nové, původní úlohy. Tým organizátorů pak sestaví ve spolupráci s vedoucími družstev jednotlivých zemí z došlých návrhů oba soubory úloh (pro soutěž jednotlivců i soutěž družstev), a to ve čtyřech jazykových verzích pro soutěž jednotlivců (anglickou, českou, polskou a slovenskou) a ve dvou verzích pro soutěž družstev (anglickou a smíšenou).

Autoři úloh souběžně připraví vzorová řešení svých návrhů, která po skončení soutěže obdrží všichni soutěžící. Po ukončení obou částí soutěže (jednotlivců i týmů) – týž den v odpoledních hodinách se prezentují nejlepší žákovská řešení samotnými řešiteli, kteří tak mají možnost seznámit ostatní soutěžící ve svém rodném jazyce nebo anglicky s odlišnými přístupy k řešení zadaných úloh.

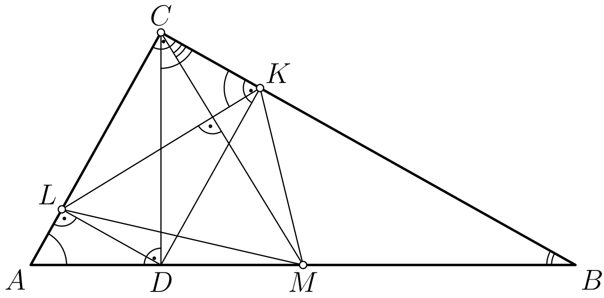
Řešení vybraných soutěžních úloh

V následující části příspěvku uvedeme ukázky řešení čtveřice českých soutěžních úloh, jejímiž navrhovateli byli podobně jako v předešlých ročnících soutěže, oba autoři článku. V soutěži jednotlivců se jednalo o 1. úlohu (J. Švrček) a 5. úlohu (J. Šimša a D. Klaška) a v týmové soutěži pak o 1. úlohu (J. Švrček) a o 2. úlohu (J. Šimša).

Příklad 1 (soutěž jednotlivců)

V rovině je dána úsečka AB se středem M. Uvažujme množinu všech pravoúhlých trojúhelníků ABC s přeponou AB, v nichž D značí patu výšky z vrcholu C a K, L jsou paty kolmic z bodu D po řadě k odvěsnám BC, AC. Určete, jaký je největší možný obsah čtyřúhelníku $MKCL$.

Řešení. Nejprve ukážeme, že přímky KL a MC jsou navzájem kolmé. Na základě podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABC a CBD je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCD|$.



Obr. 1

Protože $CLDK$ je pravoúhelník, platí $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BAC|$. Střed M úsečky AB je současně středem Thaletovy kružnice (opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC), a proto BCM je rovnoramenný trojúhelník, v němž

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle BCM|.$$

Na základě odvozených rovností dále platí

$$|\sphericalangle LKC| + |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| = 90°,$$

a proto jsou přímky LK a CM navzájem kolmé (obr. 1). Uvažovaný čtyřúhelník $MKCL$ má tedy navzájem kolmé úhlopříčky KL a CM a pro jeho obsah S pak platí známý vztah (popř. jej lze snadno odvodit)

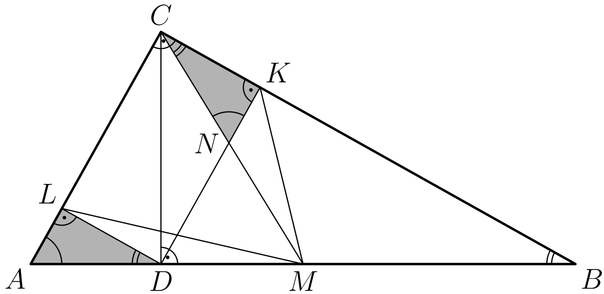
$$S = \frac{1}{2} \cdot |KL| \cdot |CM|.$$

Vzhledem k tomu, že $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$, má uvažovaný čtyřúhelník největší obsah, právě když jeho úhlopříčka KL má největší možnou délku. Protože $|KL| = |CD|$, je délka úhlopříčky KL maximální, právě když má maximální možnou délku (velikost) výška CD z vrcholu C v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pevně danou délkou přepony AB. Očividně je tedy délka úhlopříčky KL maximální, právě když pravoúhlý trojúhelník ABC má největší možnou výšku z vrcholu C, tj. v případě, kdy $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. V takovém případě má čtyřúhelník $MKCL$ maximální možný obsah

$$S = \frac{1}{8}|AB|^2.$$

Tím je úloha vyřešena.

Jiné řešení (podle *Josefa Minaříka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že D je bodem úsečky AM ($D \neq A$). Označme N průsečík úseček MC a DK. Pravoúhlé trojúhelníky ADL a NCK (na obr. 2 jsou vyznačeny šedě) jsou shodné, neboť se shodují ve velikostech vnitřních úhlů a odpovídající si strany DL a CK jsou rovněž shodné (protilehlé strany v pravoúhelníku $DKCL$), a proto jsou shodné i výšky k přeponám v obou uvažovaných pravoúhlých trojúhelnících.



Obr. 2

Protože navíc platí $|MA| = |MC|$, mají trojúhelníky AML a CMK stejné obsahy, takže zkoumaný čtyřúhelník $MKCL$ a rovnoramenný trojúhelník AMC mají stejný obsah. Čtyřúhelník $MKCL$ má tedy maximální obsah, právě když má maximální možný obsah trojúhelník AMC, tedy v případě, když výška z vrcholu C má největší možnou délku. To nastane jen tehdy, když $|CD| = |MC|$, tj. když C je vrcholem pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou AB.

Výpočet obsahu tohoto pravoúhlého trojúhelníku vede ke stejnému výsledku jako v předchozím řešení této úlohy.

Příklad 5 (soutěž jednotlivců)

Určete nejmenší celé číslo j, pro které lze do jednotlivých polí čtvercové tabulky 10×10 vepsat celá čísla od 1 do 100 tak, aby každých 10 po sobě jdoucích čísel leželo v některé čtvercové části $j \times j$ celé tabulky.

Řešení. Předpokládejme, že tabulka je zaplněna způsobem, který vyhovuje zadání úlohy pro některé $j < 10$, a ukažme nejprve, že nutně platí $j \geq 5$. Díky předpokladu $j < 10$ žádná dvě ze čtyř čísel v rohových polích celé tabulky neleží ve čtverci $j \times j$, takže se každá dvě z těchto čtyř čísel liší alespoň o 10. Pro druhé nejmenší z těchto čísel, které označíme a, tak platí $11 \leq a \leq 80$. V tabulce je tedy zapsáno všech 19 čísel

$$a-9,\ a-8,\ a-7,\ \dots,\ a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ \dots,\ a+9$$

a všechna musí ležet v jednom čtverci $j \times j$ s rohovým polem obsazeným číslem a, takže platí $j^2 \geq 19$ neboli $j \geq 5$.

Ve druhé části řešení uvedeme zaplnění tabulky, které vyhovuje zadání úlohy pro $j = 5$ (obr. 3).

1	2	3	4	5	96	97	98	99	100
10	9	8	7	6	95	94	93	92	91
11	12	13	14	15	86	87	88	89	90
20	19	18	17	16	85	84	83	82	81
21	22	23	24	25	76	77	78	79	80
30	29	28	27	26	75	74	73	72	71
31	32	45	46	47	54	55	56	69	70
34	33	44	43	48	53	58	57	68	67
35	38	39	42	49	52	59	62	63	66
36	37	40	41	50	51	60	61	64	65

Obr. 3

Pro snazší kontrolu toho, že každých 10 po sobě jdoucích čísel leží v jednom čtverci 5×5, může čtenář využít toho, že čísla od 1 do 100 jsou při cestě šachového pěšce postupně zapisována do této tabulky, která má jako celek svislou osu souměrnosti – přímku mezi pátým a šestým sloupcem tabulky.

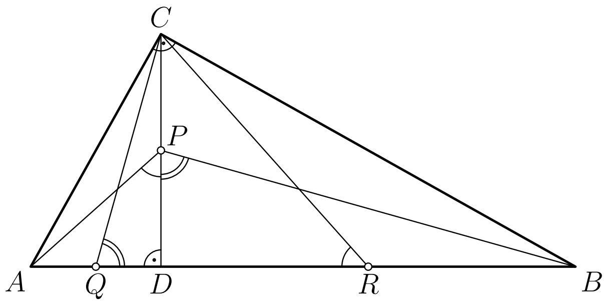
Příklad 1 (soutěž družstev)

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu výšky z vrcholu C. Nechť Q, R a P jsou po řadě středy úseček AD, BD a CD. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180^\circ.$$

Řešení. Protože trojúhelníky ADC a CDB jsou podobné (věta uu), svírají těžnice z odpovídajících si vrcholů týž úhel s protější stranou (obr. 4). Pro dvojice těžnic AP, CR a CQ, BP v uvedené dvojici podobných trojúhelníků proto platí

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CRD| = |\sphericalangle CRQ| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CQR| = |\sphericalangle CQD| = |\sphericalangle BPD|.$$



Obr. 4

Odtud plyne

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle CRQ| + |\sphericalangle CQR| = 180^\circ - |\sphericalangle QCR|,$$

a tudíž $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180^\circ$. Tím je důkaz uzavřen.

Jiné řešení. Snadno se můžeme přesvědčit o tom, že trojúhelníky ABP a QRC mají stejné obsahy. Z podobnosti trojúhelníků ADC a CDB plyne pro poměr délek odpovídajících si těžnic v obou trojúhelnících

$$\frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|CR|}{|BP|}, \quad \text{neboli} \quad |AP| \cdot |BP| = |CQ| \cdot |CR|. \tag{1}$$

Na základě rovnosti obsahů S_{ABP}, S_{QRC} trojúhelníků ABP, QRC dostaneme využitím známé formule pro jejich obsah

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \sin |\sphericalangle APB| = \frac{1}{2} \cdot |CQ| \cdot |CR| \cdot \sin |\sphericalangle QCR| = S_{QRC}.$$

S ohledem na (1) je pak $\sin|\sphericalangle APB| = \sin|\sphericalangle QCR|$. Protože oba (neshodné) úhly APB a QCR mají velikosti menší než $180°$, je tedy

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180°,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 2 (soutěž družstev)

Najděte největší možné celé číslo d, které současně dělí tři trojmístná čísla $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ a $\overline{cab}$, kde a, b a c jsou vhodné nenulové a navzájem různé číslice.

Řešení. Uvažujme pevná tři trojmístná čísla

$$A = 100a + 10b + c, \quad B = 100b + 10c + a, \quad C = 100c + 10a + b$$

s třemi nenulovými navzájem různými číslicemi a, b, c a dokažme, že každý jejich společný dělitel d má tyto vlastnosti:

(i) V rozkladu d na prvočinitele mohou být zastoupena pouze prvočísla 2, 3 a 37, ne však v mocninách vyšších než 2^1, 3^3 a 37^1.

(ii) Je-li d dělitelné číslem 37, pak d není dělitelné číslem 3.

Skutečně, z rovností

$$10A - B = 999a, \quad 10B - C = 999b, \quad 10C - A = 999c$$

vyplývá, že číslo d dělí každé z čísel $999a$, $999b$ a $999c$. Protože $999 = 3^3 \cdot 37$ a každý dělitel tří různých nenulových číslic (čísel) a, b, c je roven 1, 2 nebo 3, zbývá k důkazu části (i) ukázat, že 3^4 nedělí d. To plyne okamžitě z rovnosti

$$A + B + C = 111(a + b + c),$$

neboť 3^2 nedělí 111 a 3^3 nedělí $a+b+c$, protože $a+b+c \leq 9+8+7 = 24$. Tvrzení (ii) snadno dokážeme sporem: kdyby číslo d bylo dělitelné oběma (nesoudělnými) čísly 37 a 3, a tedy i jejich součinem $37 \cdot 3 = 111$, byl by každý trojmístný násobek čísla d (mezi nimiž jsou čísla A, B, C) zapsán *třemi stejnými* číslicemi, a to je spor.

Z dokázaných vlastností (i) a (ii) plyne, že pro společný dělitel čísel A, B, C platí

$$d \in \{1, 2, 3, 9, 18, 27, 37, 54, 74\}.$$

Zatímco mezi trojmístnými násobky čísla 54

$$108, 162, 216, 270, 324, 378, 432, \underline{486}, 540, 594, \underline{648}, 702, 756, \underline{864}, 918, 972$$

požadovaná trojice čísel existuje (tvoří ji podtržená čísla), mezi trojmístnými násobky čísla 74

$$148, 222, 296, 370, 444, 518, 592, 666, 740, 814, 888, 962$$

taková trojice není.

Závěr. Největší hledané celé číslo d je tedy 54.

Česká účast v CPS MO juniorů

Pro české a slovenské žáky prvních ročníků středních škol je v matematické olympiádě obou našich zemí určena kategorie C, která vrcholí krajským kolem. Jejich vítězové tak mohou jen závidět svým polským vrstevníkům, pro které podobná soutěž končí až ústředním (celopolským) kolem, konaným každoročně ve Varšavě. Polská zkušenost prokazuje, že i tři roky před maturitou, kdy žáci ještě neznají většinu středoškolské matematiky, pro ně lze připravovat soutěž v řešení náročných matematických úloh, které i na republikové úrovni dokážou rozhodnout o nejlepších jednotlivcích. Považujeme proto za velmi prospěšnou iniciativu polských kolegů, za níž stojí jmenovitě *Jerzy Bednarczuk* a *Waldemar Pompe*, kteří přišli jako první s myšlenkou česko-polsko-slovenské juniorské matematické soutěže.

Prvních pět jejích ročníků prokázalo, že naši žáci svou účastí získávají významnou pobídku k tomu, aby dále rozvíjeli své matematické dovednosti. Docela reálnou se totiž pro ně stává představa, že se v dalších ročnících MO probojují v kategorii A až do reprezentačních družstev ČR pro prestižní soutěže, jakými jsou IMO a MEMO. Tento osobní „plán růstu“ úspěšně naplnili někteří účastníci prvních ročníků CPS MO juniorů, jako jsou Radovan Švarc, Pavel Turek, Marian Poljak nebo Filip Bialas.

Literatura

[1] *Švrček, J.*: 2. Česko-polsko-slovenská MO juniorů. MFI, 22/4, s. 312–313.

[2] http://www.math.muni.cz/mo.

[3] http://www.omg.edu.pl.