INFORMATIKA

Webové stránky pro testování hypotéz

FRANTIŠEK MOŠNA – DANIEL MBUY LUBANDA

Technická fakulta, Česká zemědělská univerzita, Praha

V našich zemích se stochastické myšlení nikdy netěšilo velké oblibě (např. sousední Polsko či Německo je na tom o mnoho lépe). Na základních a středních školách se u nás výuka pravděpodobnosti a statistiky omezuje zpravidla na dosazování do vzorců pro aritmetický průměr a nebývá výjimečné, že se čas plánovaný na tuto látku využívá pro jiná „užitečnější“ témata. Statistika nepatří k oblíbeným předmětům ani mezi studenty. Důvody tohoto neutěšeného stavu jsou rozebírány např. v [2, 3, 10].

Přitom statistika má rozsáhlé aplikace ve fyzice, medicíně, ekonomii, sociologii, biologii a podobně. Představuje velmi užitečný nástroj při získávání informací a podkladů pro kvalifikovaná rozhodnutí v nejrůznějších oborech lidské činnosti.

Před několika lety jsme se pokoušeli zjistit, jak je na tom pravděpodobnost a statistika na pedagogických fakultách vysokých škol. Těmto předmětům bývají věnovány zpravidla 3 až 4 hodiny týdně v jednom semestru (výjimečně ve dvou). Kurzy jsou zařazené většinou do vyšších ročníků. Na všech fakultách jsou probírány základní pojmy z pravděpodobnosti (např. náhodné veličiny, distribuční funkce, nezávislost, limitní věty). Statistická témata se omezují na základní klasické testy a lineární regresi, někdy jsou probírány i neparametrické metody nebo třídění. V některých případech je využívána počítačová technika, většinou statistické prvky Excelu nebo program Statistica.

Dodnes visí otazník nad tím, co by se vlastně na univerzitách (ať už technického nebo společenskovědního zaměření) mělo ze statistiky vyučovat, v jakém rozsahu, do jaké hloubky. Zajímavé práce na toto téma přinášejí [2, 4, 11].

Internet výrazně zlepšuje přístup k informacím. U studentů přispívají ke zkvalitnění vzdělávacího procesu různé stránky, kurzy, testy, aplety apod. Takové nástroje souhrnně nazýváme e-learning. Mají své nesporné výhody ale také své meze (viz [6, 7, 8, 9]). My bychom rádi představili jeden skromný elektronický příspěvek ke zlepšení výuky matematické statistiky. Nalézá se na adrese http://statisticsonweb.tf.czu.cz. Zde uvedené stránky umožňují interaktivně provádět testování hypotéz pro zadaná data.

Metody jsou rozděleny do pěti skupin – testy jednovýběrové, dvouvýběrové, třídění, testy vzájemného vztahu a regrese. Výběr testů odpovídá základním kurzům statistiky na vysokých školách. Do každé skupiny (kromě regrese) je zařazena aspoň jedna neparametrická metoda. Uveďme si přehled:

- jednovýběrové testy:
  - Studentův jednovýběrový test pro střední hodnotu – oboustranný
  - Studentův jednovýběrový test pro střední hodnotu – jednostranný
  - jednovýběrový test pro rozptyl
  - Wilcoxonův jednovýběrový test
- dvouvýběrové testy:
  - Studentův dvouvýběrový test pro střední hodnoty
  - Studentův párový test pro střední hodnoty
  - Fisherův dvouvýběrový test pro rozptyly
  - Wilcoxonův dvouvýběrový test
- třídění (analýza rozptylu – ANOVA):
  - jednoduché třídění
  - Kruskal–Wallisův test
  - dvojné třídění – s interakcemi
  - dvojné třídění – bez interakcí
  - Friedmanův test
- testy nezávislosti:
  - test Pearsonova korelačního koeficientu
  - test Spearmanova korelačního koeficientu
  - kontingenční tabulky
  - lineární regrese

Na konci stránek je uveden soubor se základními pojmy z pravděpodobnosti a statistickými vzorci a také soubor se statistickými tabulkami. Webové stránky mají českou a anglickou verzi (viz [5]).

Ukážeme si fungování stránek na třech příkladech. Hladinu testu uvažujeme vždy $\alpha = 0{,}05$.

1. Při kontrole balicího automatu, plnícího cukrem balíčky o váze 1 kg, byly při přesném převážení 5 balíčků zjištěny tyto odchylky v gramech od požadované hodnoty -3, 2, -2, 0, -1. Je třeba zjistit, zda automat nemá systematickou odchylku od požadované hodnoty. ([1, př. 4.24, s. 75])

Jednotlivé odchylky považujeme za hodnoty náhodného výběru z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu; \sigma^2)$. U tohoto příkladu použijeme oboustranný jednovýběrový test založený na veličině (testovací statistice)

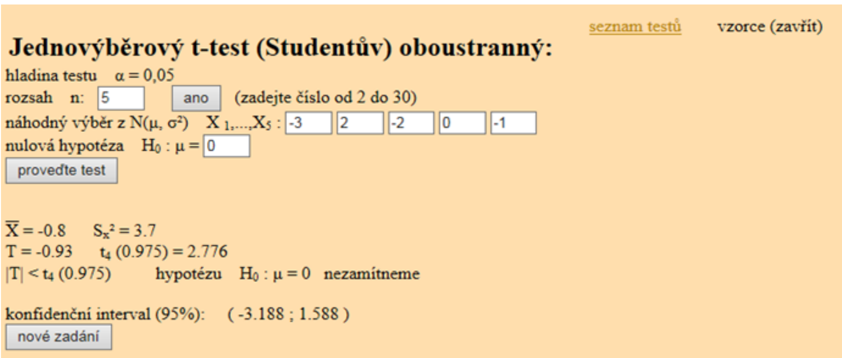
$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S_X^2/n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S_X}\sqrt{n} \sim t_{n-1},$$

kde průměr je $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ a výběrový rozptyl je

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\left((X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2\right).$$

Nulovou hypotézu $H_0\colon \mu = 0$ zamítneme, právě když $|T| \geq t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$. V našem případě hypotézu nezamítneme, protože je $\overline{X} = -0{,}8$, $S_X^2 = 3{,}7$, $T = -0{,}930$ a $t_4(0{,}975) = 2{,}776$.

Při využití stránek nejprve zvolíme rozsah náhodného výběru ($n = 5$), jednoduše zadáme hodnoty výběru $(X_1, \ldots, X_5)$, hodnotu pro srovnání ($\mu = 0$) a potvrdíme výpočet. Pak se vše potřebné objeví na stránkách včetně konfidenčního intervalu, viz obr. 1. Poznamenejme, že při zadávání desetinných čísel je třeba užít desetinnou tečku.



Obr. 1 Příklad na Studentův jednovýběrový test

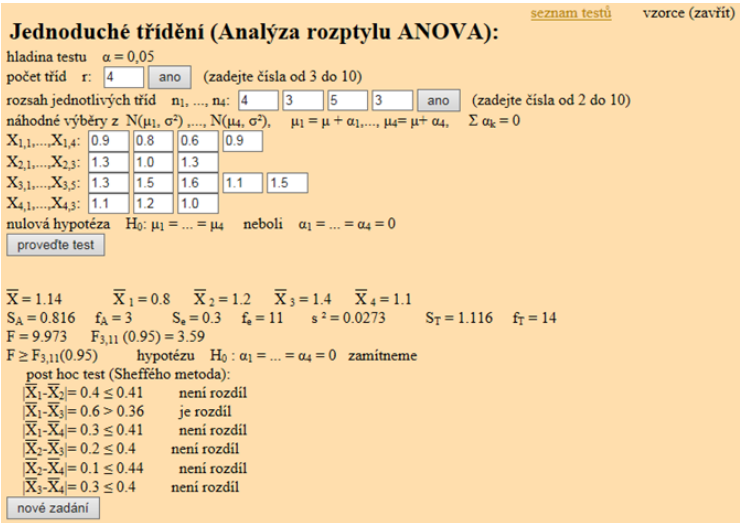
2. U čtyř odrůd brambor A, B, C, D se zjišťovala celková hmotnost brambor vzrostlých vždy z jednoho trsu (v kg):

A	0,9	0,8	0,6	0,9	
B	1,3	1,0	1,3		
C	1,3	1,5	1,6	1,1	1,5
D	1,1	1,2	1,0		

Chceme zjistit, zda se od sebe odrůdy liší. [1, př. 10.5, s. 215]

Provedeme jednoduché třídění metodou analýza rozptylu (ANOVA). Opět předpokládáme, že čtyři skupiny dat pocházejí z normálního rozdělení se středními hodnotami $\mu_1, \ldots, \mu_4$ a stejným rozptylem a testujeme nulovou hypotézu $H_0\colon \mu_1 = \cdots = \mu_4$. Nebudeme zde uvádět všechny použité vzorce, pouze připomeneme, že počítáme nejprve průměry uvnitř skupin, celkový průměr a tzv. součty čtverců mezi skupinami, uvnitř skupin (reziduální) a celkový. Nakonec vypočítáme hodnotu $F = 9{,}973$ a porovnáme s kvantilem Fisherova rozdělení $F_{3,11}(0{,}95) = 3{,}59$. Protože hodnota F tento kvantil překročila, nulovou hypotézu zamítneme.

Postup na stránkách je podobný jako u předchozího příkladu. Opět dostaneme všechny potřebné hodnoty, rozhodnutí o nulové hypotéze a post-hoc testy založené na Sheffého metodě, které nám udávají mezi kterými odrůdami je rozdíl signifikantní, viz obr. 2.


seznam testů vzorce (zavřít)

Jednoduché třídění (Analýza rozptylu ANOVA):

hladina testu $\alpha = 0{,}05$
počet tříd r: 4 ano (zadejte čísla od 3 do 10)
rozsah jednotlivých tříd $n_1, \ldots, n_4$: 4 3 5 3 ano (zadejte čísla od 2 do 10)
náhodné výběry z $N(\mu_1, \sigma^2), \ldots, N(\mu_4, \sigma^2)$, $\mu_1 = \mu + \alpha_1, \ldots, \mu_4 = \mu + \alpha_4$, $\Sigma\,\alpha_k = 0$
$X_{1,1},\ldots,X_{1,4}$: 0.9 0.8 0.6 0.9
$X_{2,1},\ldots,X_{2,3}$: 1.3 1.0 1.3
$X_{3,1},\ldots,X_{3,5}$: 1.3 1.5 1.6 1.1 1.5
$X_{4,1},\ldots,X_{4,3}$: 1.1 1.2 1.0
nulová hypotéza H_0: $\mu_1 = \ldots = \mu_4$ neboli $\alpha_1 = \ldots = \alpha_4 = 0$
proveďte test

$\overline{X} = 1.14$ $\overline{X}_1 = 0.8$ $\overline{X}_2 = 1.2$ $\overline{X}_3 = 1.4$ $\overline{X}_4 = 1.1$
$S_A = 0.816$ $f_A = 3$ $S_e = 0.3$ $f_e = 11$ $s^2 = 0.0273$ $S_T = 1.116$ $f_T = 14$
$F = 9.973$ $F_{3,11}(0.95) = 3.59$
$F \geq F_{3,11}(0.95)$ hypotézu $H_0: \alpha_1 = \ldots = \alpha_4 = 0$ zamítneme
post hoc test (Sheffého metoda):
$|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| = 0.4 \leq 0.41$ není rozdíl
$|\overline{X}_1 - \overline{X}_3| = 0.6 > 0.36$ je rozdíl
$|\overline{X}_1 - \overline{X}_4| = 0.3 \leq 0.41$ není rozdíl
$|\overline{X}_2 - \overline{X}_3| = 0.2 \leq 0.4$ není rozdíl
$|\overline{X}_2 - \overline{X}_4| = 0.1 \leq 0.44$ není rozdíl
$|\overline{X}_3 - \overline{X}_4| = 0.3 \leq 0.4$ není rozdíl
nové zadání

Obr. 2 Příklad na jednoduché třídění (ANOVA)

3. Máme k dispozici spotřebu alkoholu (v litrech na osobu a na rok) a úmrtnost na cirhózu jater (počet zemřelých na 100 000 obyvatel) pro některé evropské země:

spotřeba alkoholu	3,9	4,2	5,6	5,7	6,6	7,2	10,8	10,9	12,3	15,7	24,7
úmrtnost	3,6	4,3	3,4	3,7	7,2	3,0	12,3	7,0	23,7	23,6	46,1

Máme ověřit, jestli tyto veličiny spolu souvisejí. [1, př. 11.22, s. 257]

Použijeme tentokrát Spearmanův korelační koeficient. Při této neparametrické metodě nemusíme předpokládat normalitu náhodných výběrů, (postačí spojitost distribuční funkce). K uvedeným hodnotám $X_1, \ldots, X_n$ přiřadíme jejich pořadí $Q_1, \ldots, Q_n$ a hodnotám $Y_1, \ldots, Y_n$ pořadí $R_1, \ldots, R_n$. Spearmannův koeficient pak počítáme podle vzorce

$$r_S = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_k (Q_k - R_k)^2 \,.$$

Nulovou hypotézu o nezávislosti uvažovaných náhodných veličin zamítneme, jestliže absolutní hodnota $|r_S|$ překročí kritickou hodnotu $k = 0{,}6091$ uvedenou ve statistických tabulkách pro $n = 11$ a $\alpha = 0{,}05$. V našem případě prohlásíme veličiny za závislé, neboť vychází $r_S = 0{,}7727$.

Na webových stránkách postupujeme analogicky jako u předchozích příkladů (obr. 3).

Obr. 3 Příklad na testování Spearmanova korelačního koeficientu

Prezentované stránky si v žádném případě nekladou za cíl a ani nemohou nahradit statistické programy R, SPSS, Statistica, Statgraphic, SAS nebo nástroje Excelu, systému Mathematica apod. Stránky nabízejí pouze zpracování dat o malém rozsahu. Jiná technická omezení vyplývají ze skutečnosti, že byly sestaveny pouze pomocí jazyka PHP a nespolupracují s žádným matematickým softwarem.

Stránky jsou určeny pouze pro účely výuky, studia, procvičování, zkoušení, ověřování.

Testování statistických hypotéz umožňuje na základě výběrových souborů dat provádět kvalifikovaná rozhodnutí o charakteru a kvantitativních vlastnostech veličin, jež reprezentují. Studenti se při zpracování dat často soustředí jen na provádění výpočtů (ono dosazování do vzorců) a základní principy užívaných metod jim mnohdy unikají. I když se rozhodnou použít pro výpočty nějaký z uvedených statistických programů, musejí značnou energii věnovat k proniknutí do tohoto nástroje, seznamují se s jeho možnostmi, se způsobem ovládání těchto programů či nástrojů a komunikací s nimi.

Předností našich stránek je naopak jejich značná jednoduchost při užívání a „interaktivita".

Webové stránky byly využívány při vysokoškolských kurzech statistických metod na Pedagogické fakultě UK a na Technické fakultě ČZU v Praze v letech 2014 a 2015. Zkušenosti s užíváním tohoto nástroje jsou velice pozitivní. Studenti se mohou při seznamování se s testováním hypotéz v prvních fázích soustředit na podstatu principu, mohou zadávat různá data, postupně je měnit a pozorovat, co se děje s výsledky při jejich zpracování a vyhodnocení. Uživatel si tak snadno může při testování hypotéz ověřit význam rozptylu nebo si uvědomit odlišný vliv odlehlých hodnot pro klasické a neparametrické metody a podobně. U každého testu je vložen odkaz na soubor s užitými vzorci. Podle nich si lze výsledky přepočítat.

Stránka pro lineární regresi obsahuje jednoduchý obrázek. Jeho načítání probíhá bez problému při použití prohlížečů Chrome, Firefox apod. Prohlížeč Explorer však někdy po změně dat nenačítá obnovený obrázek a je třeba stránku aktualizovat (na liště nebo klávesou F5).

Na stránkách je třeba odstranit nedostatky, opravit chyby a nepřesnosti. Vhodné by bylo také jejich rozšíření o další testy, zlepšení grafické úrovně, obohacení průvodním textem a převedením do jiných jazyků. Autoři budou vděční za každé upozornění či návrh ke zlepšení.

L i t e r a t u r a

[1] *Anděl, J.*: Základy matematické statistiky. Praha, Matfyzpress, 2005.

[2] *Hindls, R., Hronová, S.*: Jak výuka odrazuje nestatisticky od statistiky, Statistika, roč. 42, (2005), č. 2, s. 168–172.

[3] *Jeleňová, I.*: Postoje študentov ku štatistike, Sociálne a politické analýzy, roč. 2, (2008), č. 1, s. 72–81.

[4] *Kvaszová, M.*: Didaktika statistiky. Rigorózní práce, Praha, MFF UK, 2012.

[5] *Mošna, F.*: Web-sites for hypothesis testing. In: WASET, International Scholarly and Scientific Research & Inovation, New Delhi, 2015. s. 103–106.

[6] *Mošna, F.*: Výhody a nevýhody některých prvků e-learningu. In: Alternativní metody výuky 2006, Praha, Brno, 2006. s. 29.

[7] *Robová, J.*: Výukové programy z matematiky na internetu. In: Řehout, V. a kol. (ed.), Pedagogický software, České Budějovice, Scientific Pedagogical Publishing, České Budějovice, 2004, 4 s.

[8] *Robová, J.*: Webové stránky a výuka matematiky. In: Dostál, J. (ed.), Infotech (CD ROM), Olomouc, 2007, s. 407–410.

[9] *Řezanková, H.*: Výuka statistiky prostřednictvím internetu. Dostupné z: http://badame.vse.cz/clanky/vyuka-statistiky.php.

[10] *Schau, C.*: Students attitudes: the “other” important outcome in statistics education. In: Joint Statistical Meetings, San Francisco, CA, JSM, s. 3673–3683.

[11] *Žváček, J.*: S čím dnes na statistiku. Informační bulletin České statistické společnosti, roč. 8 (1997), č. 3, s. 17–26.

Bobřík učí informatiku

4. díl – Použití logiky v informatice

DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK

Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

V reakcích některých učitelů na soutěžní úlohy soutěže Bobřík informatiky (viz 1. díl seriálu) jsme se setkávali s kritikou, že některé úlohy jsou logické a tedy nikoliv informatické, a proto do soutěže nepatří. Dovolíme si úvod tohoto článku věnovat právě vztahu matematiky, potažmo logiky, a informatiky.