L i t e r a t u r a

[1] *Andreescu, T. – Rolínek, M. – Tkadlec, M.*: 107 Geometry Problems From the Awesome Math Year-Round Program. XYZ Press, Plano, 2013.

[2] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.*: Mocnost bodu ke kružnici v důkazech. MFI, roč. 24 (2015), č. 4, 252–263.

[3] *Monk, D.*: New Problems in Euclidean Geometry. United Kingdom of Mathematics Trust, Leeds, 2009.

[4] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. 4. upravené vyd., Prometheus, Praha, 2000.

[5] *Ponarin, J. P.*: Elementarnaja geometrija. Tom 1: Planimetrija, preobrazovanija ploskosti. 1. vyd., MCNMO, Moskva, 2004 (rusky).

[6] *Švrček, J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. 1. vyd., Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2014.

[7] *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? In: Sborník příspěvků k výjezdnímu soustřední matematických talentů (Karlov pod Pradědem, únor 2012), Olomouc, 2014.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz.*

Úloha 219

Celá čísla k, n splňují nerovnost

$$n \geq \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Dokažte, že pokud $k \geq 3$, lze číslo n lze zapsat ve tvaru součtu k navzájem různých celých kladných čísel, přičemž nejmenší z nich je sudé, druhé nejmenší je násobkem tří, třetí nejmenší násobkem čtyř atd., až největší z k sčítanců je násobkem $k+1$. Platí stejný závěr i v případě $k = 2$?

Jaromír Šimša

Úloha 220

V každém ze dvou výrazů

$$A = 2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}, \qquad B = 3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$$

se pravidelně střídá 2016 dvojek a 2016 trojek. Hodnota kterého výrazu je větší?

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 215 a 216, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle letošního (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 215

Najděte všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro které má rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$$

kořeny $-a$, $-b$ a $-ab$.

Jaroslav Švrček

Řešení. Podle Viètových vztahů je zadání úlohy ekvivalentní splnění rovnic

$$\begin{aligned} -a &= -a - b - ab, \\ b &= ab + a^2b + ab^2, \\ -ab &= -a^2b^2, \end{aligned}$$

neboli po úpravě

$$\begin{aligned} (1 + a)b &= 0, \\ b(a^2 + ab + a - 1) &= 0, \\ ab(ab - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Pokud $b = 0$, jsou všechny tři rovnice splněny a pro libovolné číslo a má rovnice $x^3 + ax^2 = 0$ kořeny $-a$, 0 a $-a \cdot 0 = 0$. Předpokládejme dále, že $b \neq 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} 1 + a &= 0, \\ a^2 + ab + a - 1 &= 0, \\ a(ab - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice $a = -1$, což po dosazení do libovolné ze zbývajících dvou rovnic po úpravě dává
$$b + 1 = 0,$$
tedy $b = -1$ a rovnice
$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$
má kořeny -1, 1 a $(-1) \cdot 1 = -1$.

Všechny dvojice (a, b) reálných čísel vyhovujících zadání jsou dvojice $(1, -1)$ a dvojice tvaru $(a, 0)$ pro libovolné reálné číslo a.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich. *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Domes* a *Lenka Kopfová*, oba z MG v Opavě, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Ivana Krumlová*, *Jan Šorm*, *Tran Anh Minh* a *Petr Zelina*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jakub Matěna* z G v Praze 9, Českolipská, *Jan Petr* z GJK v Praze 6, *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

Neúplné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Tomáš Konečný* z GJVJ v Českých Budějovicích, *Daniel Kopf* ze SG v Opavě, *Ester Sgalová* z GChD v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8 a *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni.

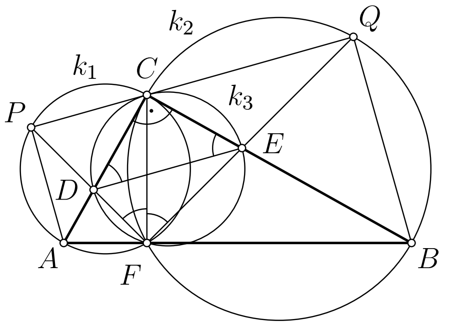
Poznámka. Mezi řešitele s neúplným řešením jsou zařazeni i ti, kteří řešili úlohu: Najděte všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž je každé z čísel $-a$, $-b$ a $-ab$ kořenem rovnice
$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0.$$

Úloha 216

Nechť ABC je trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť dále ACP a BCQ jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech P and Q sestrojené vně trojúhelníku ABC. Označme F patu výšky z vrcholu C na stranu AB a D, E po řadě průsečíky přímek AC a PF, resp. BC a QF. Dokažte, že $|DC| = |EC|$.

Gottfried Perz

Řešení. Podle Thaletovy věty leží body P a F na kružnici s průměrem AC, označme ji k_1. Obdobně leží body Q a F na kružnici k_2 s průměrem BC. Bod P půlí oblouk AC kružnice k_1, přímka PF je tedy osou pravého úhlu AFC, úhel PFC tak má velikost 45°. Analogicky FQ je osou úhlu BFC a velikost úhlu QFC je 45°. Úhel PFQ jako součet úhlů PFC a QFC je tedy pravý a proto body C a P leží na kružnici s průměrem DE, kterou označíme k_3. Přitom jsou úhly EFC a PFC shodné (mají velikost 45°), tedy FC je osou úhlu EFD a proto bod C je středem oblouku DE kružnice k_3. Trojúhelník DCE je tak rovnoramenný a jeho ramena DC a EC tak mají stejnou délku, což jsme měli dokázat.



Správná řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky,*Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Domes* a *Lenka Kopfová*, oba z MG v Opavě, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Tomáš Konečný* z GJVJ v Českých Budějovicích, *Daniel Kopf* ze SG v Opavě, *Ivana Krumlová*, *Jan Šorm*, *Tran Anh Minh* a *Petr Zelina*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni. *Jakub Matěna* z G v Praze 9, Českolipská, *Jan Petr* z GJK v Praze 6, *Ester Sgalová* z GChD v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8 a *Pavel Turek* z G v Olomouci--Hejčíně a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek