nejspíš nějaké řešení mít měla a oni by ve svém výpočtu chybnou úvahu odhalili a opravili ji.

Bystrý čtenář už určitě nahlédl, že základním problémem při druhém přístupu k řešení dané úlohy je nutnost uvedení poměru na základní tvar. Tím bude zaručeno, že vezmeme v úvahu každá dvě čísla, která jsou v poměru 7 : 4 a nalezneme už několikrát uvedené řešení; to se přes násobky čísla 42 nestalo.

Jistě bychom našli i jiné příklady, kdy řešitelé uvádějí zdánlivě korektní postupy vedoucí ke správnému výsledku, v nichž však při důkladnějším prozkoumání objevíme hrubé chyby. Tito řešitelé si tyto nedostatky neuvědomují. Pokud posuzovatel takové chyby nepřehlédne, je vystaven tlaku řešitelů, dotazujících se s pocitem křivdy na bodovou penalizaci, když vědí, že jejich výsledek je správný. Smutnější ale je, pokud méně zkušený opravující nezjistí, že postup řešení je chybný.

V tomto příspěvku jsme chtěli upozornit především na důležitou skutečnost, že správný výsledek a postup řešení úlohy jsou dvě části, které neoddělitelně patří k sobě.

Literatura

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 7. ročník ZŠ, 2. díl. Prometheus, Praha, 1998.

[2] *Tlustý, P.*: Obecná algebra pro učitele. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2006.

[3] 63. MO, dostupné na: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/1024174/c63ii.pdf.

Čtyři body na kružnici

JAROSLAV ŠVRČEK – VOJTĚCH ZLÁMAL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem tohoto příspěvku je poskytnout čtenáři stručný a přehledný návod, jak řešit planimetrické důkazové úlohy, jejichž úkolem (nebo součástí řešení) je dokázat, že dané čtyři (popř. více než čtyři) body leží na téže kružnici.

Metodika popsaná v tomto článku není v potřebném rozsahu k dispozici žákům ani učitelům našich středních škol v příslušných učebnicích planimetrie pro gymnázia ani pro střední odborné školy. Tato skutečnost je limitována poměrně velkým množstvím dalších tematických (kurikulárních) celků obsažených v RVP. S uvedenou problematikou se však hojně setkávají matematicky zdatnější žáci (a potažmo i jejich učitelé) při řešení úloh z různých matematických soutěží. Zmíněné postupy jsou tak žáci nuceni nejprve objevit samostatně a poté aplikovat při řešení daných úkolů.

Při provádění důkazů, že dané čtyři body leží na téže kružnici (jsou koncyklické) lze postupovat dvěma základními (syntetickými) cestami. Nejprve oba základní postupy popíšeme a dále ukážeme aplikace obou popsaných metod při řešení několika snazších úloh.

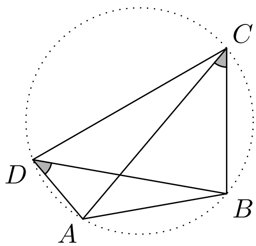
Kvůli zjednodušení úvah budeme (bez újmy na obecnosti) uvažovat body A, B, C, D, které v tomto pořadí tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku.

První způsob řešení důkazových úloh daného typu se opírá (ve trojí modifikaci) o základní vlastnosti *obvodových úhlů*, popř. známé kriterium pro tětivový čtyřúhelník. Lze jej charakterizovat následujícími známými tvrzeními, které zde nebudeme dokazovat. Důkazy těchto tvrzení je možno nalézt např. v [1], [5].

Věta 1

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|. \quad \text{(obr. 1)}$$



Obr. 1

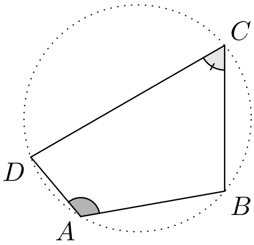
Věta 2a (kriterium tětivového čtyřúhelníku)

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

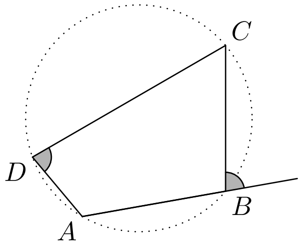
$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CBA| = 180^\circ. \quad \text{(obr. 2a)}$$

Věta 2b

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když velikost vnitřního úhlu při kterémkoliv jeho vrcholu je shodná s velikostí vedlejšího úhlu u vrcholu protějšího (obr. 2b).



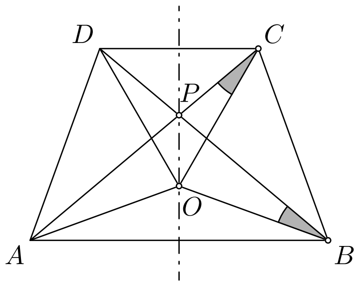
Obr. 2a



Obr. 2b

Příklad 1

Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AB a CD, P nechť značí průsečík jeho úhlopříček a O střed kružnice jemu opsané. Dokažte, že body B, C, P, O leží na téže kružnici.



Obr. 3

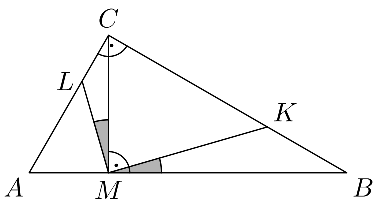
Řešení. Předpokládejme, že $P \neq O$. V opačném případě je řešení triviální. Dále předpokládejme, že body B, C, P, O tvoří v uvedeném pořadí vrcholy čtyřúhelníku stejně jako na obr. 3.

Předně si uvědomme, že body P a O leží na společné ose základen AB, CD rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ a že úhlopříčky AC a BD lichoběžníku $ABCD$ jsou shodné. V případě čtyřúhelníku $BCOP$ (vrcholy čtyřúhelníku jsou po řadě body B, C, O, P) je možno situaci řešit analogicky. Jelikož bod O je středem kružnice opsané uvažovanému lichoběžníku a $|AC| = |BD|$, jsou trojúhelníky AOC a DOB shodné (podle věty *sss*).

Platí tedy $|\sphericalangle PCO| = |\sphericalangle PBO|$. Podle věty 1 je tak čtyřúhelník $BCPO$ tětivový (B, C, P, O leží na téže kružnici).

Příklad 2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, bod M jako pata kolmice z vrcholu C na stranu c a body K, L ležící po řadě na stranách BC, CA, přičemž platí $2\,|BK| = |CK|$ a $2\,|CL| = |AL|$ (obr. 4). Dokažte, že body K, C, L a M leží na téže kružnici.



Obr. 4

Řešení. Vzhledem k tomu, že úsečka CM je kolmá ke straně AB, platí

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACM|, \qquad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MCB|,$$

z čehož vyplývá, že trojúhelníky CAM a BCM jsou podle věty *uu* podobné.

Jelikož body K a L dělí po řadě strany BC a CA ve stejném poměru, jsou také trojúhelníky MBK a MCL podobné. Platí tedy $|\sphericalangle BMK| = |\sphericalangle CML|$. Odtud plyne

$$90^\circ = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BMK| + |\sphericalangle KMC| = \\ = |\sphericalangle KMC| + |\sphericalangle CML| = |\sphericalangle KML|.$$

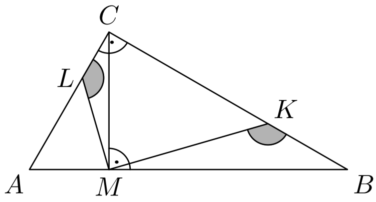
Jelikož

$$|\sphericalangle LCK| + |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle KML| = 180^\circ,$$

body K, C, L, M leží (podle věty 2a) na téže kružnici.

Jiné řešení. Opět využijeme skutečnosti, že trojúhelník MBK je podobný trojúhelníku MCL (viz první řešení). Platí tudíž $|\sphericalangle MLC| = |\sphericalangle MKB|$ (obr. 5).

S ohledem na větu 2b je tak dokázáno, že body K, C, L, M leží na téže kružnici.

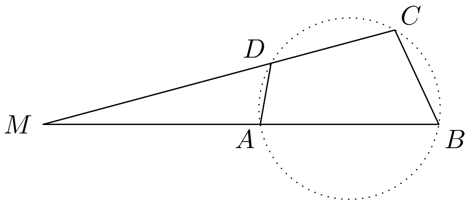


Obr. 5

Další způsob provádění důkazů, že dané čtyři body leží na téže kružnici, využívá tzv. *mocnosti bodu ke kružnici*, viz např. [2]. Tento způsob je charakterizován následujícími dvěma známými tvrzeními.

Věta 3a

Nechť je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a předpokládejme, že se přímky AB a CD protínají v bodě M (obr. 6). Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí $|MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|$.

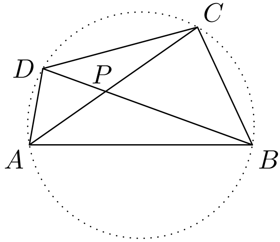


Obr. 6

Věta 3b

Nechť P je průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 7). Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$



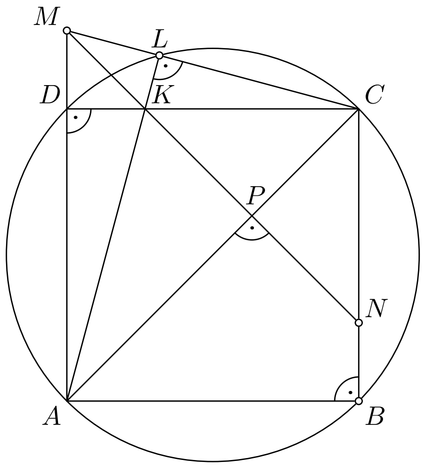
Obr. 7

Poznámka. Věta 3b se však v praxi využívá především při řešení metrických úloh vycházejících z umístění čtyř bodů na kružnici, nikoliv tedy s cílem dokázat koncykličnost čtyř bodů.

Příklad 3 (53. MO, A–III–5)

Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M a N leží na téže kružnici.

Řešení. Jelikož úhlopříčka AC je průměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, je úhel ALC pravý (podle Thaletovy věty). V trojúhelníku ACM tak tvoří úsečky AL a CD výšky a bod K je jejich průsečíkem, tj. *ortocentrem* trojúhelníku ACM. Označme P průsečík přímek AC a MK. Protože úsečka MP prochází bodem K, je výškou v trojúhelníku ACM k jeho straně AC. Odtud vyplývá, že úhel MPA je pravý (obr. 8).



Obr. 8

Přímka MK protíná stranu BC v jejím vnitřním bodě N, neboť přímka MK je rovnoběžná s úhlopříčkou BD (obě jsou kolmé na AC). Vzhledem k tomu, že úhly NBA, APN, ADC a ALC jsou pravé, jsou podle Thaletovy věty čtyřúhelníky $DKLM$, $APKD$, $ABNP$ tětivové. Bod C leží vně kružnic opsaných uvedeným čtyřúhelníkům, je možné tak využít větu 3a.

Platí tedy

$$|CM| \cdot |CL| = |CD| \cdot |CK|,$$
$$|CD| \cdot |CK| = |CA| \cdot |CP|,$$
$$|CA| \cdot |CP| = |CB| \cdot |CN|.$$

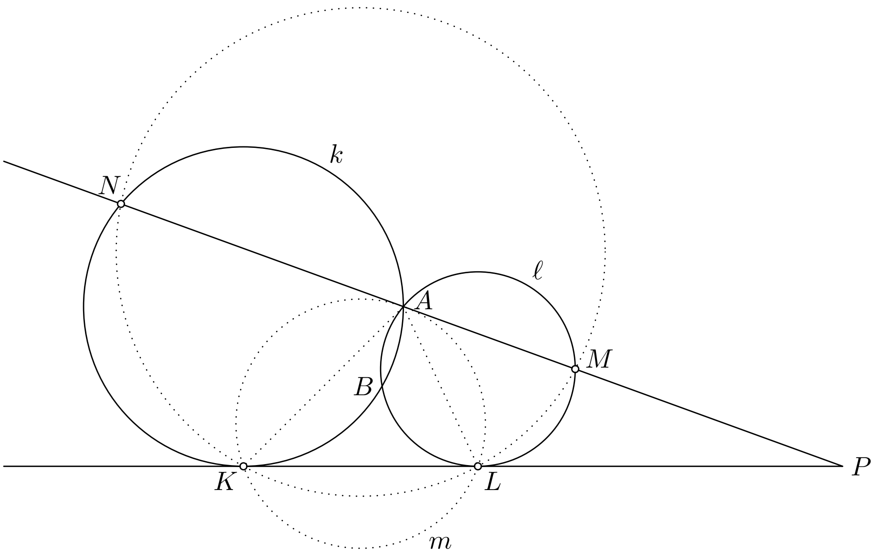
Odtud

$$|CM| \cdot |CL| = |CD| \cdot |CK| = |CA| \cdot |CP| = |CB| \cdot |CN|,$$
$$|CM| \cdot |CL| = |CB| \cdot |CN|.$$

Tím je podle věty 3a dokázáno, že body B, L, M a N jsou koncyklické.

Příklad 4 (60. MO, modifikace úlohy A–I–3)

Jsou dány kružnice k, ℓ, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a ℓ zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN, kde MN a KL jsou různoběžky (obr. 9). Dokažte, že pokud přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL, je čtyřúhelník $KLMN$ tětivový.



Obr. 9

Řešení. Označme P průsečík přímek KL a MN. Jelikož je bod P vně kružnic k, ℓ, platí

$$|PK|^2 = |PA| \cdot |PN|, \qquad |PL|^2 = |PA| \cdot |PM|,$$

což je možno přepsat do tvaru

$$|PA| = \frac{|PK|^2}{|PN|}, \qquad |PA| = \frac{|PL|^2}{|PM|}. \tag{1}$$

Označme m kružnici opsanou trojúhelníku AKL. Je zřejmé, že bod P leží vně této kružnice. Z předpokladu, že přímka MN je tečnou kružnice m (s bodem doteku A), vyplývá

$$|PA|^2 = |PK| \cdot |PL|. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne

$$|PK| \cdot |PL| = |PA|^2 = \frac{|PK|^2}{|PN|} \cdot \frac{|PL|^2}{|PM|},$$

$$|PK| \cdot |PL| = \frac{|PK|^2}{|PN|} \cdot \frac{|PL|^2}{|PM|} = |PK| \cdot |PL| \cdot \frac{|PK| \cdot |PL|}{|PN| \cdot |PM|}.$$

Nutně pak

$$\frac{|PK| \cdot |PL|}{|PN| \cdot |PM|} = 1,$$

tedy $|PK| \cdot |PL| = |PN| \cdot |PM|$. Podle věty 3a tak body K, L, M, N leží na téže kružnici, čímž je důkaz ukončen.

Dále uvádíme neřešené úlohy s podobnou tematikou, které jsou určeny zájemcům o tuto problematiku.

Příklad 5

Ve čtverci $ABCD$ jsou zvoleny na stranách BC a CD po řadě body L a M tak, že úhel LAM má velikost 45°; úhlopříčka BD protíná přímku AL v bodě K a přímku AM v bodě N. Dokažte, že body K, L, C, M a N leží na téže kružnici.

[Určete velikost úhlu ANL ve čtyřúhelníku $ABLN$.]

Příklad 6

V rovině jsou dány dvě různé polopřímky VX a VY. Na polopřímce VX jsou dány body A, C, E, G (v tomto pořadí podle vzdálenosti od bodu V, od nejbližšího po nejvzdálenější) a na polopřímce VY body B, D, F, H (v tomto pořadí podle vzdálenosti od bodu V, od nejbližšího po nejvzdálenější), přičemž body A, B, C, D leží na téže kružnici, body C, D, E, F leží na téže kružnici a body E, F, G, H leží na téže kružnici. Dokažte, že také body A, B, G, H leží na téže kružnici. [Použijte větu 2b.]

Příklad 7

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, O průsečík jeho výšek a O' bod souměrně sdružený s bodem O podle osy AB. Dokažte, že body A, O', B a C leží na téže kružnici. [Použijte větu 1.]

Příklad 8

Nechť ABC je tupoúhlý trojúhelník, O průsečík jeho výšek a O' bod souměrně sdružený s bodem O podle osy AB. Dokažte, že body A, O', B a C leží na téže kružnici. [Uvažte velikost úhlu $CO'B$.]

Příklad 9

Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami, které se protínají v bodě O. Dokažte, že kolmé průměty A', B', C', D' bodu O po řadě na úsečky AB, BC, CD a DA leží na téže kružnici.

[Dokažte, že čtyřúhelník $AA'OD'$ je tětivový a dále užijte větu 1.]

Příklad 10

Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Nechť jsou I_1, I_2 středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ABC a ABD. Dokažte, že také čtyřúhelník ABI_1I_2 je tětivový. [Určete velikosti úhlů AI_1B a AI_2B.]

Příklad 11

Je dán trojúhelník ABC, kružnice k opsaná trojúhelníku ABC a průsečík T tečen vedených ke kružnici k body A, B. Přímka rovnoběžná s AC a procházející bodem T protíná úsečku BC v bodě D. Dokažte, že body B, D, A a T leží na téže kružnici.

[Vezměte v úvahu různé vzájemné polohy přímek TC a AB.]

Literatura

[1] *Andreescu, T. – Rolínek, M. – Tkadlec, M.*: 107 Geometry Problems From the Awesome Math Year-Round Program. XYZ Press, Plano, 2013.

[2] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.*: Mocnost bodu ke kružnici v důkazech. MFI, roč. 24 (2015), č. 4, 252–263.

[3] *Monk, D.*: New Problems in Euclidean Geometry. United Kingdom of Mathematics Trust, Leeds, 2009.

[4] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. 4. upravené vyd., Prometheus, Praha, 2000.

[5] *Ponarin, J. P.*: Elementarnaja geometrija. Tom 1: Planimetrija, preobrazovanija ploskosti. 1. vyd., MCNMO, Moskva, 2004 (rusky).

[6] *Švrček, J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. 1. vyd., Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2014.

[7] *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? In: Sborník příspěvků k výjezdnímu soustřední matematických talentů (Karlov pod Pradědem, únor 2012), Olomouc, 2014.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 219

Celá čísla k, n splňují nerovnost

$$n \geq \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Dokažte, že pokud $k \geq 3$, lze číslo n lze zapsat ve tvaru součtu k navzájem různých celých kladných čísel, přičemž nejmenší z nich je sudé, druhé nejmenší je násobkem tří, třetí nejmenší násobkem čtyř atd., až největší z k sčítanců je násobkem $k+1$. Platí stejný závěr i v případě $k = 2$?

Jaromír Šimša