MATEMATIKA

Čtyřúhelníky pod mikroskopem

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V běžném životě se často setkáváme se situacemi, kdy je sledovaný soubor daných objektů rozdělen podle určitých hledisek do skupin. V takovýchto případech hovoříme o *klasifikaci* (nebo také *třídění*) objektů do *tříd* podle určených *kritérií*.

Chystáme-li se například na dovolenou k moři a hledáme-li ubytování v hotelu, je pro nás důležitá informace, zda hotel je ohodnocen třemi, čtyřmi či více hvězdičkami (kritériem je úroveň služeb hotelu). Dále sledujeme, zda je hotel přímo na pláži, či například do vzdálenosti 100 metrů od pláže nebo ještě dále (kritériem je vzdálenost hotelu od pláže).

Žáci v dané škole mohou být roztříděni do skupin například podle pohlaví, podle měsíce narození, podle známky z matematiky na posledním vysvědčení apod. Klasifikace objektů do tříd se objevuje rovněž ve vědních oborech. Například v medicíně je pro lékaře důležitá informace o krevní skupině pacienta (A, B, O, AB); stejný soubor pacientů může lékař také rozdělit podle onemocnění diabetem (pacient nemá diabetes, má diabetes I. typu, má diabetes II. typu).

Při každé klasifikaci objektů do tříd se jedná vždy o roztřídění prvků nějaké množiny podle zvoleného kritéria do podmnožin, které jsou po dvou disjunktní, tj. každé dvě mají prázdný průnik. Jednu a tu samou množinu prvků můžeme klasifikovat podle různých kritérií, jako tomu bylo v případě hotelů, žáků či pacientů.

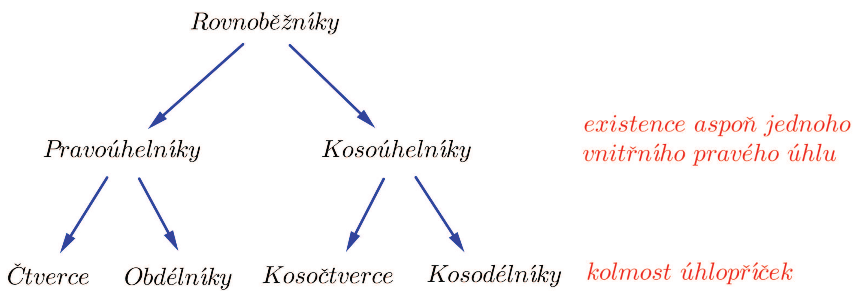
Ve školské matematice zavádíme řadu pojmů z různých tematických oblastí. Podstatné je, abychom nezkoumali jednotlivé pojmy izolovaně, ale abychom hledali co nejvíce vzájemných vazeb mezi nimi, abychom vytvářeli ucelené struktury pojmů. A to právě klasifikace umožňuje. Třídění pojmů obvykle realizujeme tehdy, kdy již máme probranou příslušnou partii učiva a v rámci procvičování nebo opakování upevňujeme vzájemné vazby mezi pojmy.

V tomto článku se zaměříme na klasifikaci rovnoběžníků a její význam pro hlubší pochopení samotného pojmu i jeho jednotlivých speciálních případů. Přitom se naskytne i řada možností k detailnějšímu poznávání čtyřúhelníků, které nejsou rovnoběžníky. Naše úvahy jsou vedeny tak, aby předložené postupy bylo možné využít při práci se žáky druhého stupně základní školy a odpovídajících ročníků víceletého gymnázia. Míra využití závisí na úrovni žáků i na časových možnostech.

Klasifikace rovnoběžníků

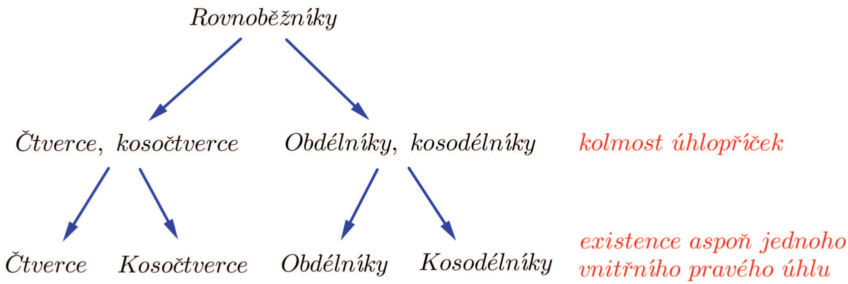
Rovnoběžníky lze klasifikovat podle různých kritérií. Základní úvaha při klasifikaci vychází z toho, že danou množinu rozložíme na podmnožinu a její doplněk (jde o tzv. dichotomické třídění).

Na obr. 1 je zachycena klasifikace, kdy množinu všech rovnoběžníků v rovině rozložíme nejdříve podle kritéria *existence aspoň jednoho vnitřního pravého úhlu* (podmnožina *Pravoúhelníky* a její doplněk ¬*Pravoúhelníky*, tj. *Kosoúhelníky*). Vytvořené třídy dále rozložíme podle druhého kritéria *kolmost úhlopříček* (v případě *Pravoúhelníků* jde o rozklad na podmnožinu *Čtverce* a její doplněk ¬*Čtverce*, tj. *Obdélníky*; obdobně rozložíme třídu *Kosoúhelníky*).



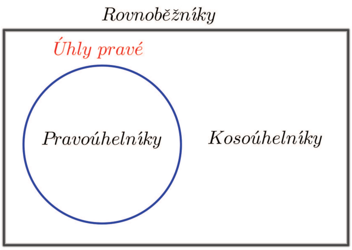
Obr. 1

Jiný možný způsob klasifikace rovnoběžníků je zachycen na obr. 2, kde oproti situaci na obr. 1 je zaměněno pořadí kritérií.

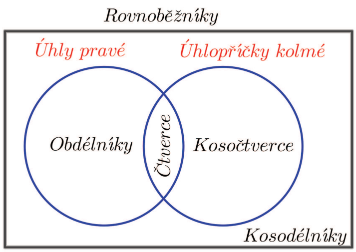


Obr. 2

Třídění pojmů můžeme znázorňovat také s využitím Vennových diagramů. Vrátíme-li se ke klasifikaci na obr. 1, situaci po užití prvního kritéria (existence aspoň jednoho vnitřního pravého úhlu) zachycuje obr. 3a, po přidání druhého kritéria (kolmost úhlopříček) získáme situaci na obr. 3b.

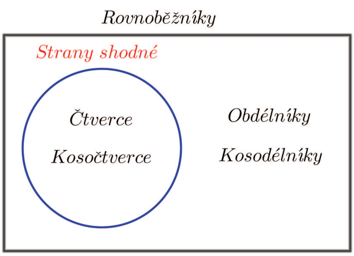


Obr. 3a

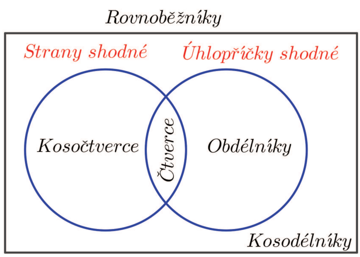


Obr. 3b

Další možné třídění rovnoběžníků ukazují obr. 4a a obr. 4b, kde prvním kritériem je *shodnost délek všech stran*, druhým *shodnost délek úhlopříček*.



Obr. 4a

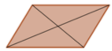


Obr. 4b

Tabulka vlastností rovnoběžníků poprvé

K prohloubení poznatků o rovnoběžnících může přispět zkoumání, zda daný typ rovnoběžníku má či nemá danou vlastnost. Na základní škole obvykle zavádíme *rovnoběžník jako čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné.*

V tab. 1 jsou v záhlaví uvedeny všechny čtyři případy rovnoběžníků a ve druhém sloupci je výčet jejich možných vlastností očíslovaných 1 až 12 (vlastnost 1 je použita v definici rovnoběžníku). Do každého řádku a sloupce se zaznamenává plus (+) čí minus (–) podle toho, zda příslušný rovnoběžník má či nemá danou vlastnost (tab. 1 je již vyplněna).

					
	Vlastnost	**čtverec**	**obdélník**	**kosočtverec**	**kosodélník**
1	Každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné	+	+	+	+
2	Každé dvě protější strany mají shodnou délku	+	+	+	+
3	Každé dvě sousední strany jsou shodné	+	–	+	–
4	Všechny vnitřní úhly jsou pravé	+	+	–	–
5	Každé dva protější úhly jsou shodné	+	+	+	+
6	Každé dva sousední úhly jsou shodné	+	+	–	–
7	Součet velikostí každých dvou sousedních úhlů je 180°	+	+	+	+
8	Úhlopříčky se půlí	+	+	+	+
9	Úhlopříčky jsou k sobě kolmé	+	–	+	–
10	Úhlopříčky mají stejnou délku	+	+	–	–
11	Úhlopříčky půlí příslušné vnitřní úhly	+	–	+	–
12	Každá úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky	+	+	+	+

Tab. 1

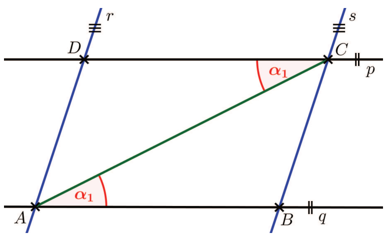
Na základě tab. 1 lze řešit další úlohy, které jsou zajímavější a které ukazují různé možnosti využití klasifikace ke zjišťování nových vazeb mezi rovnoběžníky, a dokonce i k *objevování nových* dosud nezařazených *objektů.*

Tabulka vlastností rovnoběžníků podruhé

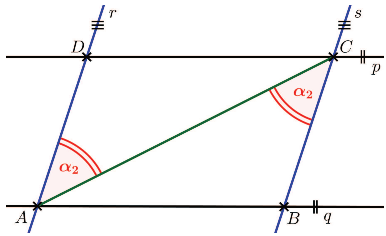
Jak již bylo uvedeno, ve školské matematice je rovnoběžník definován jako čtyřúhelník, jehož *každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné* (vlastnost 1 v tab. 1). Z tab. 1 je zřejmé, že vlastnosti 2, 5, 7, 8 a 12 mají všechny rovnoběžníky (zde jsou totiž uvedeny pouze symboly +). Tato skutečnost se většinou žákům předkládá pomocí názorných obrázků; přitom exaktní zdůvodnění není nijak náročné a podle našeho názoru je užitečné. Jde o vhodnou příležitost procvičit již dříve osvojené poznatky (vlastnosti souhlasných a střídavých úhlů, pojem přímého úhlu, věty o shodnosti trojúhelníků). Současně se žáci učí na matematicky jednoduchých příkladech své úvahy zdůvodňovat. V následující části se budeme věnovat zdůvodnění tvrzení platných pro libovolný rovnoběžník, která vyplývají z uvedené definice rovnoběžníku.

Každé dvě protější strany rovnoběžníku mají shodnou délku (vlastnost 2 v tab. 1).

Na obr. 5 jsou dvě dvojice rovnoběžek p, q a r, s, které vymezují rovnoběžník $ABCD$ a jeho úhlopříčku AC. Z rovnoběžnosti přímek p, q plyne shodnost střídavých úhlů označených jako α_1. Obdobně na obr. 6 z rovnoběžnosti přímek r, s vyplývá shodnost střídavých úhlů označených jako α_2. Trojúhelníky ACD a CAB mají společnou stranu AC; s využitím poznatků o úhlech α_1, α_2 jsou proto trojúhelníky shodné podle věty *usu*. Odtud už plyne shodnost délek protějších stran AB a CD, rovněž AD a CB.



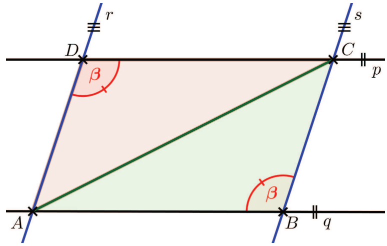
Obr. 5



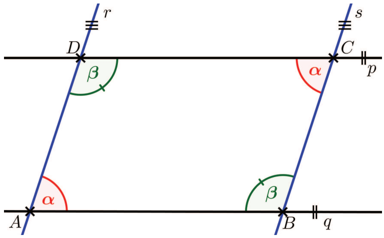
Obr. 6

V každém rovnoběžníku jsou protější úhly shodné (vlastnost 5 v tab. 1).

Ze shodnosti trojúhelníků ACD a CAB plyne, že úhly CDA a ABC jsou shodné (obr. 7). Na základě obr. 5 a obr. 6 je patrné, že jsou shodné úhly DAB a BCD. Odtud již získáme platnost daného tvrzení (obr. 8).



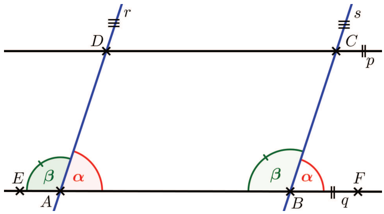
Obr. 7



Obr. 8

Součet velikostí každých dvou sousedních úhlů rovnoběžníku je 180° *(vlastnost 7 v tab. 1)*

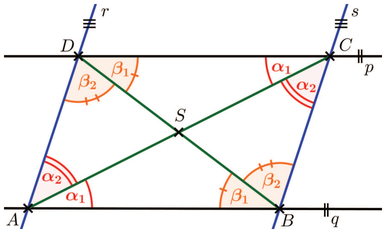
Z rovnoběžnosti přímek r, s na obr. 9 plyne, že souhlasné úhly BAD a FBC jsou shodné. Obdobně z rovnoběžnosti přímek r, s je zřejmé, že souhlasné úhly DAE a CBA jsou také shodné. Vyznačené úhly α, β jsou úhly vedlejší, a jejich součet je proto 180°.



Obr. 9

V každém rovnoběžníku se úhlopříčky půlí (vlastnost 8 v tab. 1).

Ze shodnosti dvojic střídavých úhlů označených postupně jako α_1, α_2, β_1, β_2 (obr. 10) a ze shodnosti protějších stran rovnoběžníku plyne, že trojúhelníky ABS a CDS jsou shodné podle věty *usu*. Na základě obdobné úvahy jsou také shodné trojúhelníky BCS a DAS dle věty *usu*. Ze shodnosti odpovídajících si stran v těchto trojúhelnících plyne, že bod S je středem obou úhlopříček, a úhlopříčky se tedy půlí.



Obr. 10

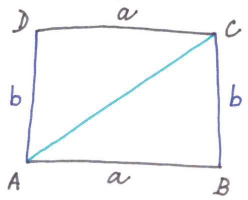
Každá úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky (vlastnost 12 v tab. 1).

Z údajů na obr. 10 je zřejmé, že každá úhlopříčka půlí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky ACD a CAB, resp. DAB a BCD.

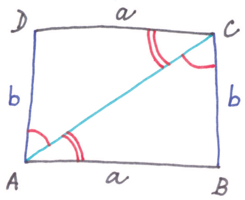
Tabulka vlastností rovnoběžníků potřetí

V předcházející části jsme na základě definice rovnoběžníku odvodili pět tvrzení o jeho vlastnostech. Víme už například, že každé dvě protější strany rovnoběžníku mají shodnou délku. Vzniká otázka, zda platí uvedené tvrzení také obráceně: *Mají-li v čtyřúhelníku každé dvě protější strany shodnou délku, potom se jedná o rovnoběžník.*

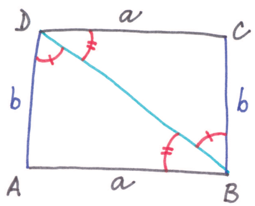
Na obr. 11 je zobrazena výchozí situace, kde v načrtnutém čtyřúhelníku jsou protější strany shodné a je zde navíc dokreslena úhlopříčka AC. Vyznačené trojúhelníky ACD a CAB jsou shodné dle věty *sss*. Odpovídající úhly ležící v trojúhelnících při straně AC jsou střídavé a ze shodnosti trojúhelníků plyne, že jsou shodné (obr. 12). Odtud dostáváme, že strany AB a CD a stejně i strany BC a AD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou rovnoběžné. Čtyřúhelník $ABCD$ je tedy rovnoběžník, a tím je tvrzení dokázáno. K důkazu tohoto tvrzení můžeme využít také obr. 13, kde čtyřúhelník $ABCD$ je rozdělen na dva shodné trojúhelníky pomocí úhlopříčky BD.



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

Rovnoběžník můžeme také definovat jako čtyřúhelník, ve kterém mají každé dvě protější strany shodnou délku (vlastnost 2). K obdobným závěrům bychom dospěli i v případech souvisejících s vlastnostmi 5, 7, 8 a 12:

Každý čtyřúhelník, ve kterém platí některá z vlastností

– *všechny protější úhly jsou shodné,*

– *součet velikostí každých dvou sousedních úhlů je* $180°$*,*

– *úhlopříčky se půlí,*

– *každá úhlopříčka dělí čtyřúhelník na dva shodné trojúhelníky*

je rovnoběžník.

Odtud plyne, že rovnoběžník lze definovat nejen pomocí rovnoběžnosti nebo shodnosti protějších stran, ale také každou z vlastností 5, 7, 8 a 12.

Tabulka vlastností rovnoběžníků počtvrté

V tab. 1 si nyní všimneme řádků 3, 4, 6, 9, 10 a 11, ve kterých se vyskytují symboly + i −. Budeme zkoumat, zda existují čtyřúhelníky, které *nejsou rovnoběžníky* a přitom mají některou z těchto vlastností. Zaměříme se nejprve na vlastnosti uvedené v řádcích 3, 4, 6 a 11.

Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož každé dvě sousední strany jsou shodné?

Ze shodnosti každých dvou sousedních stran plyne shodnost všech čtyř stran čtyřúhelníku. V předchozí části jsme ukázali, že již ze shodnosti protějších stran čtyřúhelníku plyne, že jde o rovnoběžník.

Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé?

Z předpokladu, že všechny vnitřní úhly jsou pravé, plyne, že protější úhly jsou shodné. V předchozí části jsme vysvětlili, že již ze shodnosti protějších úhlů čtyřúhelníku plyne, že jde o rovnoběžník.

Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož každé dva sousední úhly jsou shodné?

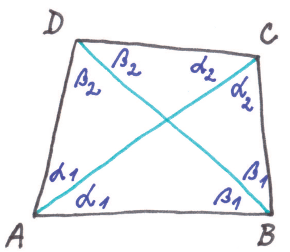
Jsou-li sousední úhly shodné, potom jsou všechny úhly shodné, a proto i protější úhly jsou shodné. Jde tedy o rovnoběžník.

Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož úhlopříčky půlí příslušné vnitřní úhly?

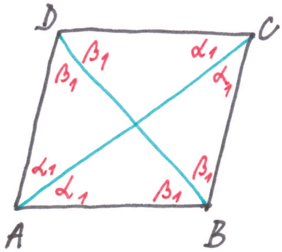
Načrtneme si čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky půlí vnitřní úhly (obr. 14). Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelnících ABC i ACD je $180°$, a proto platí $\alpha_1 + 2\beta_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2\beta_2 + \alpha_2$. Jednoduchou úpravou získané rovnosti dospějeme ke vztahu $\beta_1 = \beta_2$. Obdobně bychom dospěli při využití trojúhelníků ABD a BCD, že $\alpha_1 = \alpha_2$. Z uvedeného plyne, že každé dva protější úhly jsou shodné (obr. 15), proto jde o rovnoběžník.

Ukázali jsme, že čtyřúhelník s kteroukoliv vlastností 3, 4, 6 a 11 je vždy rovnoběžník.

Zbývají vlastnosti 9 a 10, pro které prověříme, zda je mají i jiné čtyřúhelníky než rovnoběžníky.



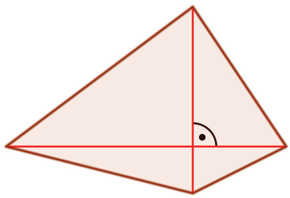
Obr. 14



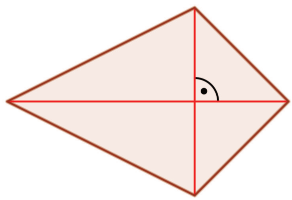
Obr. 15

Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé?

V případě hledání čtyřúhelníků, které mají kolmé úhlopříčky, lze v programu GeoGebra tyto úhlopříčky sestrojit a změnou polohy jejich krajních bodů (při zachování kolmosti úhlopříček) postupně objevovat různé případy čtyřúhelníků (obr. 16). Ve speciálním případě dospějeme k *deltoidu* (obr. 17).



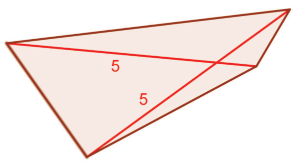
Obr. 16



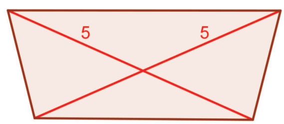
Obr. 17

Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož úhlopříčky mají shodnou délku?

Obdobně jako v předchozím případě můžeme v GeoGebře zadat stejně dlouhé a protínající se úsečky–úhlopříčky, např. délky 5 cm. Krajní body těchto dvou úseček určují vrcholy čtyřúhelníku. Změnou polohy krajních bodů sestrojených úseček získáme různé obecné čtyřúhelníky (obr. 18). Jako speciální případ obdržíme *rovnoramenný lichoběžník* (obr. 19).



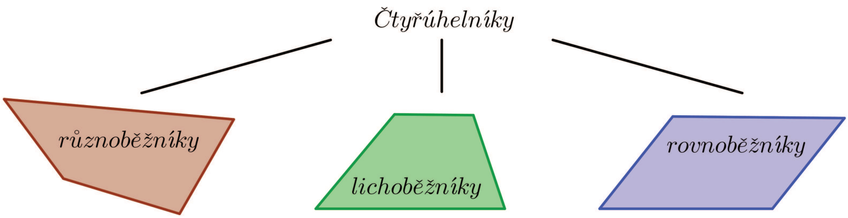
Obr. 18



Obr. 19

Tabulka vlastností rovnoběžníků popáté

Můžeme se opět vrátit k tab. 1, kde v řádku 1 je uvedena vlastnost-kritérium *každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné*. Můžeme se ptát, které čtyřúhelníky tuto vlastnost nemají. Postupně tak dospějeme k rozkladu množiny všech čtyřúhelníků podle počtu dvojic rovnoběžných stran (obr. 20).



Obr. 20

Obdobně můžeme provádět klasifikace čtyřúhelníků „zeslabováním“ podmínek, například v řádku 4 tab. 1: *všechny vnitřní úhly jsou pravé* – dostáváme pravoúhelníky, *tři vnitřní úhly jsou pravé* – jde o prázdnou množinu, *dva vnitřní úhly jsou pravé* – jde např. o pravoúhlé lichoběžníky a některé deltoidy, *jeden vnitřní úhel pravý* – např. některé deltoidy a některé další různoběžníky, *žádný úhel pravý* – např. kosoúhelníky, obecné lichoběžníky, rovnoramenné lichoběžníky a některé deltoidy.

Podstatné je, aby žáci při probírání čtyřúhelníků byli vedeni k aktivní práci, aby experimentovali, vytvářeli sami příslušné hypotézy o vlastnostech čtyřúhelníků, zdůvodňovali je a užívali získané poznatky. V uvedeném tématu doporučujeme při modelování různých situací využít program GeoGebra. Pokud není k dispozici, mohou žáci črtat obrázky a používat k modelování čtyřúhelníků špejle nebo tužky.

Literatura

[1] *Hermann, J. a kol.*: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Trojúhelníky a čtyřúhelníky. Prometheus, Praha, 1995.

[2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 7. ročník ZŠ, 3. díl: Shodnost; středová souměrnost; čtyřúhelníky; hranoly. Prometheus, Praha, 2012.