Kritické jevy naší školské matematiky

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Inspirací tohoto článku byla pozoruhodná kniha *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, kterou napsal kolektiv autorů Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Za kritická místa považují autoři „ty oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a aby mohla být tvořivě využívána v každodenním životě" ([18], s. 8). Já považuji za kritické ty jevy naší školské reality, které jsou překážkou (brzdou) k dosahování lepších výsledků. Nejde tedy o jevy, které by kriticky ohrožovaly naši školu, ale o jevy, kterých bychom si měli všimnout a pokusit se o jejich zlepšení.

Učitelé

Jan Werich cituje svého středoškolského profesora Stacha: „Nejsi blbec, Honzo! Tak si matematiku, deskriptivu a tu češtinu dej pěkně dohromady, udělej reparáty a vypadni z téhle boudy (...). Pamatuj si, že většina těch, co se živí nějakým učením, nemá ráda lidi, kteří myslí samostatně" ([24], s. 27).

Stachovo tvrzení je staré téměř 100 let. Doufám, že neplatí. Nicméně mohu doložit, že učitelé, kteří potlačují samostatné myšlení žáků, existují i dnes. Tak např. jistá učitelka prvního stupně po dvanácti letech praxe píše:

Příspěvek byl finančně podpořen Specifickým výzkumem PřF UHK 2015.

„Chtěla bych se zastavit u této slovní úlohy: Tři kilogramy banánů stojí 48 Kč. Kolik stojí šest kilogramů? Dětem dělá strašný problém uvědomit si, že musí vypočítat, kolik stojí jeden kilogram“ ([18], s. 55). Děti dobře vědí, že nemusí, ale paní učitelka trvá na svém.

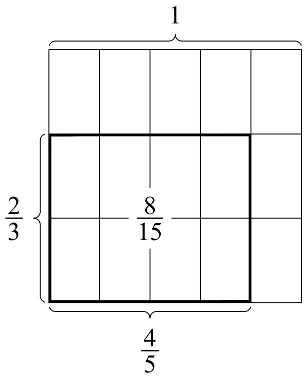
Jiná učitelka s deseti lety praxe si stěžuje: „Násobení zlomku zlomkem – to už je hrozně problematický. Jedna polovina, krát jedna polovina a ona vám z toho vyleze jedna čtvrtina. Takže jak tohle ukázat?“ ([18], s. 133).

Všimněme si otázky posledního příkladu trochu podrobněji. Zdá se mi, že tato paní učitelka má mezery ve svém didaktickém vzdělání. Vždyť přece kladná reálná čísla můžeme interpretovat jako velikosti úseček a jejich součin jako obsah obdélníku. Takže např. z obr. 1 vidíme, že

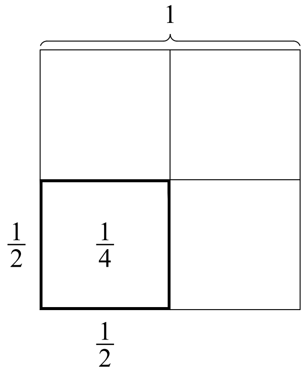
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

a z obr. 2 je zřejmé, že

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$



Obr. 1



Obr. 2

Součin dvou kladných reálných čísel můžeme ovšem interpretovat i jako velikost dráhy: $s = vt$ (v je rychlost, t je čas). Součin $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ můžeme tedy chápat např. jako odpověď na otázku: Jakou dráhu urazí model autíčka za půl minuty, jede-li rychlostí půl metru za minutu?

Tuto problematiku připomněla před několik lety v poněkud sofistikovanější formě americká autorka čínského původu *Liping Ma* úlohou: Vymyslete problém nebo příběh, který by vedl k výpočtu

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}.$$

Činí-li žákům potíže interpretace podílu, připomeneme jim interpretaci součinu. Součin $ab = c$ můžeme přirozeně chápat např. jako obsah c obdélníku s rozměry a, b nebo jako dráhu c za čas b při rychlosti a nebo jako objem c kapaliny vzniklé slitím a porcí, z nichž každá má objem b. Náš výpočet můžeme tedy interpretovat např. takto: Do kolika půllitrových hrnků můžeme rozlít $1\frac{3}{4}$ litru čaje?

Na doklad toho, že tyto zcela elementární problémy mají „rozměr celosvětový", připomeňme, že Ma prováděla toto šetření v Číně a v USA. Úlohu vyřešilo 90 % účastníků šetření v Číně, ale jen 5 % ze skupiny učitelů amerických. Úlohu jsme opakovali se skupinou našich učitelů, kteří byli úspěšní v 35 %. Školská praxe nemusí přispívat k rozvoji matematické zdatnosti učitele: několik učitelů s dlouholetou praxí pochopilo úlohu tak, že dělili $1\frac{3}{4}$ na polovinu, místo aby dělili polovinou.

S otázkou interpretace souvisí i didaktický problém, proč součin dvou záporných čísel je číslo kladné. „To se vysvětlit nedá. To se musejí naučit." „Je až zavádějící nad tím přemýšlet. Řeknu hotově, že to tak prostě je, a nepřemýšlíme nad tím." Tak se vyjadřují „zkušení" učitelé ([18], s. 137). Klasická didaktika tuto otázku řeší umělou konstrukcí, která asi mnohé žáky nepřesvědčí: Zvolíme-li na dráze pohybu určité místo za počátek pohybu, můžeme polohu na trati určit kladným nebo záporným číslem. Podobně za počátek měření času můžeme vzít určitý okamžik a dobu před nebo za ním označíme kladnou nebo zápornou hodnotou. Jede-li např. vlak rychlostí -50 km za hodinu (tj. směrem, který udává pokles údajů polohy), pak v čase -2 hodiny, tj. před dvěma hodinami, je 100 km před místem, které je označeno jako počátek pohybu. Je tedy $(-2) \cdot (-50) = 100$.

Názorněji můžeme výsledek o násobení dvou záporných čísel osvětlit např. takto:

$$\text{Platí } (-2) \cdot (-3) = 6 \text{ nebo } (-2) \cdot (-3) = -6\,?$$

Protože žáci už vědí, že $(-2) \cdot 3 = -6$, vyplynulo by z rovnosti

$$(-2) \cdot (-3) = (-2) \cdot 3,$$

že $-3 = 3$, což není možné. Je tedy $(-2) \cdot (-3) = 6$.

Jazyk hraje ve vyučování matematice mimořádnou roli. To v souvislosti s řešením úloh potvrdila řada šetření v knize [18]. Za nevhodné považuji např. poučení typu: „Sčítat znamená dát dohromady," neboť dáme-li dohromady dva zajíčky a lišku, dostaneme dva zajíčky a lišku a nikoliv číslo 3, dáme-li dohromady čísla 2 a 1 dostaneme číslo 21 a ne 3. Citovanou „definici" má k dispozici učitelka v učebnici ([9], s. 12). Jeden z nejdůležitějších matematických pojmů, pojem rovnosti, bychom snad měli od samého počátku chápat ve smyslu Leibnizově:

$$x = y, \text{ když a jen když } x \text{ a } y \text{ mají všechny vlastnosti společné}$$

(citováno podle ([22], s. 66).

Větu: „Dvě množiny si jsou rovny, mají-li týž počet prvků" snad bychom ani v modifikaci pro první třídu neměli připouštět ([9], s. 33). Zde rovnost staveb nebo hejn ptáčků znamená rovnost počtu kostek nebo rovnost počtu ptáčků, v učebnici ([10], s. 12) znamená rovnost $MM = K$ (zapsaná obrázkově), že dvě myši mají stejnou sílu jako kočka. Fyzikální svět věcí je různý od matematického světa čísel.

Otázka interpretace čísel, které jsme se zde dotkli, se ovšem dotýká i interpretace proměnných. Připomeňme to na úrovni středoškolské matematiky.

Např. derivace funkce $y = f(x)$ v bodě x může být formálně zavedena jako limita

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tuto limitu můžeme interpretovat jako směrnici tečny grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x.

Označíme-li $s(t)$ dráhu bodu za dobu t, pak

$$s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

je okamžitá rychlost uvažovaného pohybu v čase t.

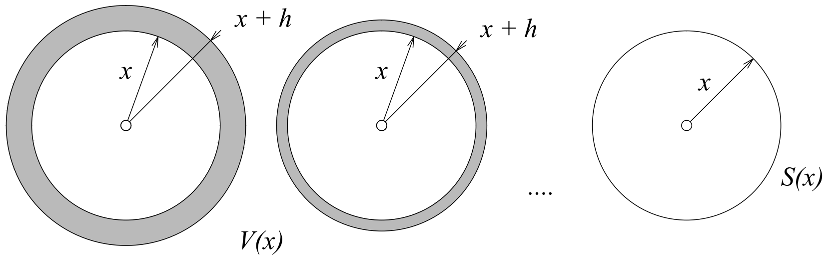
Označíme-li např. $V(x)$ objem koule o poloměru x, pak

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = S(x),$$

což je povrch této koule (obr. 3). První dvě interpretace jsou popsány v učebnici [12], poslední pak v článku [15].[1] Existují vysokoškolské učeb-

[1] Tato interpretace však neplatí obecně pro všechna tělesa.

nice, dokonce pro vysoké školy technické, kde se u definice derivace neuvádí vůbec žádná intepretace (např. [16], s. 99).



Obr. 3

Interpretace symbolů znamená jejich jistou konkretizaci, je to proces obrácený k procesu abstrakce, pomocí něhož docházejí žáci např. k číslům a proměnným. Na interpretace se můžeme dívat jako na první stupeň aplikací.

Kritickým místem matematického vzdělávání je také geometrie. I zde se výrazně projevuje, že učitelé učí tak, jak byli „sami učeni, jak tomu rozumí a jak úlohy sami řeší“ ([18], s. 36). Nedostatky ve vyučování geometrii souvisejí s nedostatky v geometrickém vzdělávání učitelů. Odrazem představ o axiomatické výstavbě geometrie s primitivními pojmy bod, přímka a incidence je soustředění školní geometrie na rýsování a terminologii. Geometrie by však měla být od samého začátku orientována na poznávání prostoru, v němž žák žije, a na rozvíjení představivosti. Základem zde mohou být zkušenosti žáků s dělením prostoru (kružnice, trojúhelník, rovina, ...) s vyplňováním prostoru (objem tělesa, obsah útvaru, délka úsečky), s pohybem v prostoru (rýsování, modelování, ...) a s dimenzí prostoru (krychle a její obrázek, koule a její stín, ...). Tento přístup jsem mnohokrát popsal – na úrovni vzdělávání učitelů v knihách [13] a [14], na úrovni prvního stupně ZŠ v učebnicích [4], na úrovni druhého stupně pak v učebnicích, které na přelomu tisíciletí vydával Matematický ústav AV v nakladatelství Albra.

Problematika řešení konstruktivních úloh je relativně složitá. Řešením konstruktivní úlohy je sestrojení útvaru, který má požadované vlastnosti, nikoliv zápis rozboru a konstrukce. Jestliže žák ví, jak konstrukci provést, je snad zbytečné, aby předstíral, že to neví a prováděl rozbor. Naše současná škola vyžaduje formální zápis rozboru a konstrukce předepsanou symbolikou, která je reliktem množinové matematiky. Řešení úlohy se tak stává jakýmsi protokolem o postupu, což ovšem není úkol matematického vzdělávání. Žáci právem pociťují absurdnost tohoto přístupu a zbytečnost relativně složité symboliky (viz např. [18], s. 110). Rozbor úlohy není hotový projekt (jak píše učitelka s třicetiletou praxí ([18], s. 108), ale cesta k projektu. Podle mého názoru, který ovšem nelze při současných zvyklostech realizovat, by měl být postup takovýto: Důkladně odvodit základní geometrické konstrukce (konstrukce trojúhelníku ze základních prvků, osy úsečky, osy úhlu, kružnice opsané a vepsané trojúhelníku, ...), které by měli žáci zvládnout analogicky jako např. řešení soustavy rovnic, a pak by měli samostatně řešit nemnoho konstrukčních úloh, u nichž by na základě obrázku hledali řešení, které by graficky provedli. Postup řešení by mohli zapisovat slovně, jen s minimální symbolikou. Takový přístup byl obvyklý v „předmnožinových" učebnicích (viz např. ([2], s. 78)). Geometrická symbolika našich současných učebnic se nepoužívá v matematice ani v jejích aplikacích. Je ovšem výhodná pro (obvykle negativní) hodnocení výsledků práce žáků.

Otázka řešení úlohy a jejího zápisu není však jen problém druhého stupně. Např. učitelka prvního stupně s třináctiletou praxí píše: „Děti to umí vyřešit, řeknou vám i výsledek, oni okamžitě vědí ten výsledek, ale oni vůbec nedokážou v tom najít ty základní údaje. Ten zápis neumí, ale tu úlohu, ten příklad sestaví. Ale problém je ten zápis, ten prostě oni neudělají, ten neumí..." ([18], s. 55).

Najít rovnováhu mezi řešením úlohy a jejím zápisem je důležitý úkol. Ovšem: matematika je o řešení úloh, ne o zápisech.

„Kvalitu vyučování určuje učitel" (Hejný). Složkou osobnosti učitele je jeho pedagogické přesvědčení, které formovala jeho rodina, společnost a školy, které absolvoval. Všimněme si zde tří typů přesvědčení učitele matematiky a jejich kladných či záporných působení ve vzdělávacích procesech.

První typ, říkejme mu FORMALISTA, zdůrazňuje: V úvodním kurzu „je především nutno studujícím podávat pojmy a věty skutečně exaktní formou, systémem ‚definice', ‚věta', ‚důkaz', a to už proto, aby se naučili správnému matematickému myšlení a vyjadřování" ([25], s. 9).

Druhý typ, říkejme mu UTOPISTA, zdůrazňuje, že prvořadým úkolem matematiky je vychovat, druhořadým naučit ([11], s. 36).

Třetí typ, říkejme mu REALISTA, zdůrazňuje, že základem vzdělávání jsou zkušenosti žáků a řešení problémů. Jde zde o konstruktivistické přístupy k vyučování matematice [6].

Ve škole přirozeně žádného učitele takto vyhraněného typu nepotkáme, nicméně patrně lze u každého kantora vysledovat rysy některého z uvedených typů. Prosím případného čtenáře, aby se pokusil zařadit sebe sama do některého z uvedených typů, nebo aby popsal další typ přesvědčení učitele.

Milan Hejný formuloval v roce 2014 své didaktické přesvědčení slovy: „Hlavním vzdělávacím cílem vyučování matematice je rozvoj matematického duševního orgánu každého žáka“ ([7], s. 120). Distancuje se zde od termínu konstruktivismus a přechází k „vyučování orientovanému na budování schémat“, které v r. 2015 charakterizuje lapidárně jako „Hejného metoda“ [21]. K seznámení se s touto metodou doporučuji prostudování zmíněné publikace z r. 2014. V práci [18] se můžeme o Hejného přístupech dočíst na řadě míst. Zde bych uvedl jen jeden příklad, kdy problém „vyřeší“ tím, že ho „ignoruje“. Mám na mysli otázku počítání s přechodem přes desítku. Řada učitelek uvádí toto téma jako „kritické místo“, ačkoliv ty, které pracují s učebnicemi M. Hejného, píší např.: „V pohodě, neřešíme to a prostě jde to. Nikdo neřeší nějaké složité rozklady čísla a dopočítávání do desítky, ne. (...). My jsme rozdali i dětem domů krokovací pásy, aby si mohly ťapkat těma prstíkama a zatím mě nikdo neoslovil.“ Jiná učitelka píše: „Začali jsme krokovat a ani nevím, že nějaký přechod přes desítku nastal“ ([18], s. 32). Pokud je cílem, aby se děti naučily početní spoje „přes desítku“ zpaměti, pak je jistě tento postup možný. Zastírá se tím ovšem pohled na desítkovou soustavu.

Já bych se rád zařadil mezi „realisty“. Své didaktické přesvědčení, označené jako „realistický konstruktivismus“ jsem formuloval v 11. kapitole knihy [8]. Připomenu je zde stručně. V prostředí apatie, nezájmu, lhostejnosti, či dokonce bojkotu a nepřátelství nelze realizovat žádné účinné vzdělávání. Probuzení zájmu žáků je nutnou, ne však postačující podmínkou k nastartování vzdělávacího procesu. Zájem by měl být dále živen především úspěchy žáků, zajímavostí problematiky, uspokojením z vykonané práce. Projevem zájmu jsou otázky, které žák klade, např.:

- Co to je?
- Jak to je?
- K čemu to je?
- Proč to tak je?

Tyto otázky souvisejí s řešením úloh, s hledáním postupů, s vytvářením pojmů, s poznáváním smyslu a s použitím poznatků. Při řešení problémů můžeme přirozeně sdělovat žáku potřebné informace, vysvětlovat pojmy, odkazovat na informace v encyklopediích a literatuře, avšak vše ve službách matematiky rodící se v dušením světě žáka. Konstruktivní vyučování tak může obsahovat i výklady určitých partií a návody k řešení některých úloh. Důležitou složkou výuky jsou diskuze mezi žáky i žáků s učitelem a srozumitelný, zejména shrnující výklad učitele. Aktivita učitele je prioritně zaměřena na rozvíjení aktivity žáka, na konstrukci poznatků v jeho duševním světě. Nejde jen o to, aby žák rozuměl. Je třeba, aby si utvářel ucelený soubor aplikovatelných poznatků. Formativní aspekty vzdělávacího procesu (rozvíjení duševních schopností, aktivita, kritičnost, systematičnost, schopnost komunikace, ...) tvoří jen jednu složku praxe školy. Druhou je úroveň a kvalita soustavy poznatků, které si žák vytváří a které umí použít.

Domnívám se, že tento přístup k výuce je v souladu s idejemi dvou mých velkých univerzitních učitelů *Bohumila Bydžovského* (1880–1969) a *Eduarda Čecha* (1893–1960), které zde připomenu.

„Škola si musí stále býti vědoma toho, že výchova se neobejde bez jakéhosi třeba sebemírnějšího a zastřenějšího nátlaku. Je kus morálního násilí v tom, že musíme tvora od přírody primitivního, jako je dítě, v době několika let pozdvihnout ke kulturní úrovni, ke které se lidstvo probojovávalo s obtížemi a oklikami po tisíciletí. Říkáme-li, že škola vede žáky k výšinám osvěty, víme dobře, že to neznamená vždy, že se žák dává vésti dobrovolně. Umění výchovné je právě v tom, přiměti žáka k tomu, aby se tomuto vedení podvolil a aby cítil co nejméně morální nátlak školního prostředí“ ([1], s. 55).

„Učitelé by měli odstraňovat strach před matematikou a naučit žáky lásce k matematice. Ovšem: odstranit strach před matematikou tak, že bychom z ní udělali lehký předmět, nebylo by správné; matematika byla, je a zůstane předmětem těžkým. Lásku k matematice je třeba chápat jako podstatnou část lásky k práci vůbec“ ([3], s. 202).

Žáci

Významný německý filosof *Dietrich Schwanitz* (1940–2004) napsal: „Zkuste nadchnout“ pro vzdělávání „hordu nevychovaných bestií s naprostým nezájmem o učení a navyklých pouze na televizní zábavu, jejichž jediným cílem je vymýšlet další a další útoky na učitelovu důstojnost. Nikdo, kdo stojí mimo školu, si nedokáže představit tento každodenní boj s ryzí nestoudností, sadistickou zlobou a duševní sprostotou. Nejvykutálenější na tom všem je, že učitel ještě musí strpět, aby nevychovanost a pošklebování byly připsány na jeho konto: vinu nese on sám, protože nemá svou třídu v moci, jeho výuka děti nebaví, naopak cítí se znuděny (...). Nikdo už u nich nečeká ani minimální dávku civilizovanosti jako samozřejmý rodinný vklad. Jejich chování je vysvětlováno pouze z vyučování, zatímco ve skutečnosti trpí již z domova neschopností se soustředit a špatnou výchovou“ ([20], s. 31). Nemohu nepřipomenout v této souvislosti slova středoškolského učitele z Jaroměře *Jaroslava Žáka*, který napsal v r. 1937: „Mezi neinformovaným občanstvem převládá od nepaměti bludný názor, že školství (...) je blahodárná instituce, kde zástupy mládeže toužící po vědění a vzdělání, jsou poučovány a vychovávány obětavými muži a ženami (...). Škola je ve skutečnosti kolbiště, kde utlačovaný lid studentský vede nesmiřitelný boj proti panující kastě (...) kantorů“ ([26], s. 7). Naši současní učitelé charakterizující děti např. takto: „Jsou odtržené od reality všedního dne, nepraktické, pohodlné a neschopné oddálit uspokojení svých potřeb“ ([18], s. 235). „Sedí u počítače a hrajou si hry, nebo koukají na televizi a ten mozek se nerozvíjí“ ([18], s. 138). „Ta uspěchaná doba se přenáší i na ty děti a pak nejsou schopny se soustředit“ ([18], s. 219).

Pasivita žáků není pochopitelně dobré klima pro rozvíjení myšlení a samostatné řešení úloh. Snad to je hlavní důvod k orientaci části naší školy na učení bez porozumění. „Moje výuka matematiky je postavena na procvičování.“ „V matematice (...) je důležitý takový ten dril, opakování, důslednost“ ([18], s. 157). To byly hlasy učitelů. A Rendl s Vondrovou vysvětlují: „Často je patrné, že učení zpaměti vychází z intuitivního přesvědčení, že když se některé věci děti nenaučí zpaměti, nebudou z matematiky umět nic (...). Učení zpaměti je ovšem také alternativou tam, kde učitelé nevidí způsob, jak něco vysvětlit názorně a logicky, případně takové vysvětlení považují za příliš komplikované, než aby u žáků vedlo k porozumění“ ([18], s. 137). Přitom *Irena Smetáčková* upozorňuje, že „četným opakováním určitého postupu“ (...) může vzniknout vhled a tedy vyšší kvalita zvládání určitého algoritmu (tj. přesun z úrovně osvojení do úrovně porozumění) ([18], s. 275).

Učitelé zmiňují i existenci „pohodlných žáků“, kteří nejsou ochotni ani myslet, ani rutinně pracovat ([18], s. 249). Některé děti jsou „líný a budou dělat cokoli jiného než se učit, když nebudou muset“ ([18], s. 203). „Hlavní výhrady, které vyučující mají vůči dnešním žákům, se týkají tří oblastí: zkušeností, zručnosti a vůle. V nich mají děti nedostatky, tj. něco podstatného jim chybí, a proto mají v matematice potíže. Všechny tři oblasti přitom vyučující řadí do sféry rodiny, jejíž kompetence škola nemůže v plné míře suplovat“ ([18], s. 278). Nejde však jen o negativní roli rodiny. Negativní vliv na dítě má i korupcí prolezlá společnost. Škola, učitelé i žáci jsou produktem společenského vývoje. Tézi, že „školy vytvářejí lidi s doživotně zdeformovanými pracovními návyky“, kterou formuloval vědecký pracovník *Jiří Šponer* [19], je podle mého názoru třeba vnímat v širších souvislostech.

Závěr

Za přínos publikace [18] považuji, že uvádí do naší didaktiky pět *Kilpatrickových pilířů zdatnosti*:

1. *Konceptuální porozumění*: chápání matematických pojmů a objektů, matematických operací a vztahů.
2. *Procedurální zběhlost*: dovednost provádění procedur přesně, vzhledem ke kontextu vhodně a účinně.
3. *Strategické kompetence*: schopnost formulovat, znázorňovat a řešit matematické úlohy.
4. *Adaptivní úsudek*: schopnost logického myšlení, reflexe, vysvětlování a odůvodňování.
5. *Sklon k produktivní činnosti*: běžně projevovaný sklon chápat matematiku jako smysluplnou, užitečnou a hodnotnou činnost spojenou s vírou v píli a s vnímavou schopností výkonu ([18], s. 64).

Kdyby se nám dařilo na našich školách realizovat matematické obsahy formulované v publikacích [5] v souladu se zmíněnými Kilpatrickovými pilíři, mohli bychom být spokojeni.

Realizace těchto myšlenek je obtížná.

Dva exministři školství – Petr Vopěnka a Petr Piťha – k tomu napsali: „Není druhé lidské činnosti, která by tak důvěrně provázela duševní vývoj lidstva (...) jako pěstování a vytváření matematiky. V ní se odráží vývoj myšlení a naopak její vývoj rozvoj myšlení ovlivňuje (...). Matematika je do krajní přesvědčivosti vyvedené neustále se vyvíjející učení, do něhož ti více zasvěcení zasvěcují ty méně zasvěcené (...). Není utěšenějšího povolání nad učení dětí, které se učit chtějí a není odpornějšího poslání nad učení dětí, které se učit nechtějí“ [23]. „Neznám nic tak ničivého, jako je tichá symbióza líného učitele s vypočítavým studentem, jev dnes bohužel častý“ ([17], s. 31). Podle mého názoru jsou učitelky a učitelé našich škol ve své většině pracovití, zodpovědní a snaživí. Líný učitel snad není jev častý, i když: dotázal jsem se svých studentů, zda se potkali s líným učitelem. Odpověděli ANO, a to na škole základní, střední i vysoké.

Literatura

[1] *Bydžovský, B.*: Naše středoškolská reforma. Profesorské nakladatelství, Praha, 1937.

[2] *Čech, E. a kol.*: Geometrie pro čtvrtou třídu středních škol. JČMF, Praha, 1950.

[3] *Čech, E.*: Nový školský zákon a matematika. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78, (1953), s. 199–205.

[4] *Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F.*: Svět čísel a tvarů. Prometheus, Praha, 1996–2000.

[5] *Fuchs, E., Hrubý, D. a kol.*: Standardy a testové úlohy. Prometheus, Praha, 2000.

[6] *Gravemeijer, K., M. van den Heuvel, L.*: Streefland. Context Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education. Owoc, Utrecht.

[7] *Hejný, J.*: Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně. Univerzita Karlova, Praha, 2014.

[8] *Hejný, M., Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha, 2009.

[9] *Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J.*: Matematika 1. Fraus, Plzeň, 2007.

[10] *Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J.*: Matematika pro druhý ročník základní školy. 1. díl. Fraus, Plzeň, 2008.

[11] *Hejný, M., Michalcová, A.*: Skúmanie matematického riešitelského postupu. Metodické centrum, Bratislava, 2001.

[12] *Hrubý, D., Kubát, J.*: Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet. Prometheus, Praha, 1997.

[13] *Kuřina, F. a kol.*: Matematika a porozumění světu. Academia, Praha, 2009.

[14] *Kuřina, F.*: Deset pohledů na geometrii. MÚ AV ČR, Praha, 1996.

[15] *Kuřina, F.*: Povrch je derivací objemu. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 60 (2015).

[16] *Pelantová, E., Vondráčková, J.*: Matematická analýza I. ČVUT, Praha, 2007.

[17] *Piťha, P.*: Hledání učitele. Pedagogická fakulta UK, Praha, 1996.

[18] *Rendl, M., Vondrová, N. a kol.*: Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2013.

[19] *Rychlík, M.*: Manželé otřásají teorií o vzniku života. Lidové noviny 4. 2. 2015.

[20] *Schwanitz, D.*: Vzdělanost. Prostor, Praha, 2013.

[21] *Štefflová, J.*: Matematiku nesmíme memorovat, ale tvořit. Učitelské noviny č. 1, 2015.

[22] *Tarski, A.*: Úvod do logiky. Academia, Praha, 1966.

[23] *Vopěnka, P.*: Memorandum o škole a matematice. 1. 9. 2013.

[24] *Werich, J.*: Všechno je jinak. Olympia, Praha, 1991.

[25] *Zelinka, B.*: Předmluva překladatele. In.: Marcus, S.: Matematická analýza čtená podruhé. Academia, Praha, 1976.

[26] *Žák, J.*: Študáci a kantoři. Beta, Praha, 2005.