Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 215

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro které má rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$$

kořeny $-a$, $-b$ a $-ab$.

Jaroslav Švrček

Úloha 216

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť dále ACP a BCQ jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech P and Q sestrojené vně trojúhelníku ABC. Označme F patu výšky z vrcholu C na stranu AB a D, E po řadě průsečíky přímek AC a PF, resp. BC a QF. Dokažte, že $|DC| = |EC|$.

Gottfried Perz

Dále uvádíme řešení úloh 211 a 212, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle letošního (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 211

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n nabývá výraz

$$n^2\left(\frac{n^2+11}{12}\right) + n\left(\frac{3n^2+13}{2}\right)$$

celočíselnou hodnotu.

Stanislav Trávníček

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro všechna přirozená čísla n je

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12} \tag{1}$$

přirozené číslo. V čitateli je součin čtyř po sobě jdoucích čísel, aspoň jedno je dělitelné čtyřmi a tedy čitatel (1) dělitelný 4. Stejnou úvahou ukážeme, že je současně dělitelný i třemi a proto je dělitelný i 12, což jsme chtěli ukázat. Celočíselnost výrazu (1) lze dokázat také pomocí kombinačního čísla. Výraz (1) zapíšeme jako $2\binom{n+3}{4}$, což je zřejmě přirozené číslo, neboť každé kombinační číslo je přirozené.

Dále snadno ověříme, že

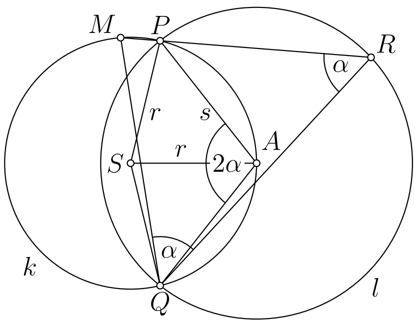
$$n^2\left(\frac{n^2+11}{12}\right)+n\left(\frac{3n^2+13}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}+(n^3+6n). \quad (2)$$

Protože výraz na pravé straně (2) je pro všechna přirozená čísla n podle předchozího odstavce přirozené číslo, je přirozeným číslem i výraz na levé straně, což jsme měli ukázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Úloha 212

Kružnice $k(S; r = |SA|)$ a $l(A; s)$ se protínají v bodech P a Q ($P \neq Q$). Nechť pro bod M kružnice k ($P \neq M \neq Q$) přímka PM protíná kružnici l v bodě $R \neq P$. Pomocí podílu r/s vyjádřete součet kosinů vnitřních úhlů trojúhelníku MQR.



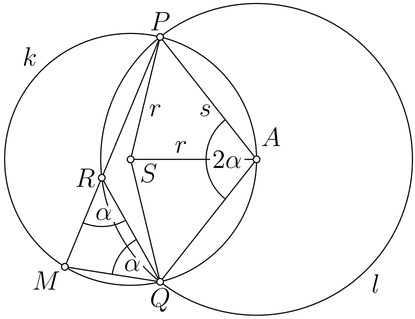
Obr. 1

Šárka Gergelitsová

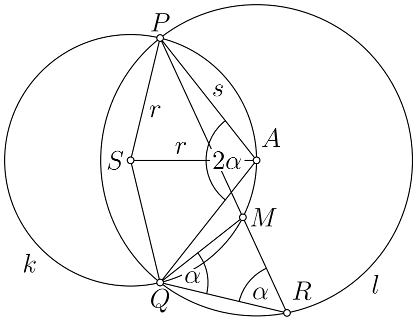
Řešení. Předpokládejme, že bod M leží na oblouku PQ kružnice k, který neobsahuje bod A a bod R není bodem úsečky MP (obr. 1). Označme velikost středového úhlu PAQ kružnice l jako 2α. Velikost jemu odpovídajícího obvodového úhlu PRQ je pak rovna α. Čtyřúhelník $AQMP$ je tětivový, velikost úhlu PMQ tak je $180^\circ - 2\alpha$ a proto zbývající vnitřní úhel MQR trojúhelníku MQR má velikost α.

V případě, že bod R je bodem úsečky MP (obr. 2) je velikost obvodového úhlu PRQ proti středovému úhlu PAQ rovna $180^\circ - \alpha$, tedy velikost úhlu MRQ je α a stejně jako v předcházejícím případě dopočítáme vnitřní uhly trojúhelníku MQR. Konečně v případě, že bod M je bodem oblouku PQ kružnice k obsahujícího bod A (obr. 3) obdobně dospějeme ke stejným velikostem vnitřních úhlů trojúhelníku MQR. Součet kosinů vnitřních úhlů trojúhelníku MQR tak je

$$\begin{aligned}&\cos\alpha + \cos\alpha + \cos(180^\circ - 2\alpha) = \\ &= 2\cos\alpha + (1 - 2\cos^2\alpha) = 1 + 2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha. \qquad (3)\end{aligned}$$



Obr. 2



Obr. 3

Trojúhelník ASP je rovnoramenný. Jeho ramena AS a SP mají délku r, základna AP délku s a velikost vnitřního úhlu při vrcholu A je α. Užitím kosinové věty pro tento trojúhelník dostaneme

$$\cos\alpha = \frac{|AP|^2 + |AS|^2 - |SP|^2}{2 \cdot |AP| \cdot |AS|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{r}{s}}.$$

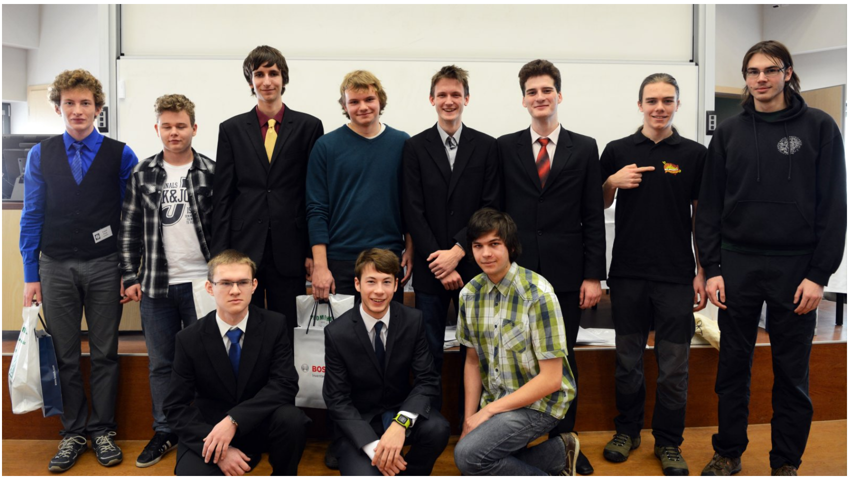
Dosazením do vztahu (3) za $\cos\alpha$ tak dostaneme součet kosinů vnitřních úhlů trojúhelníku MQR jako funkci podílu $\frac{r}{s}$

$$1 + \frac{1}{\frac{r}{s}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{s}\right)^2}.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek

* * * * *



Obrázek ke zprávě na s. 236. Společné foto vítězů celostátního kola kategorie A 56. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2014/2015 (© Archiv JU)